TRAITÉ

D'ÉLECTRICITÉ

ET DE

MAGNÉTISME.

SOCIÉTÉ DE CHIMIE INDUSTRIELLE
28 Rue S. Dominique
(7e)

TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

ET DE

MAGNÉTISME,

PAR

J. CLERK MAXWELL, M. A.
LL. D. EDIN., F. R. SS. L. ET E.
PROFESSEUR DE PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE A L'UNIVERSITÉ DE CAMBRIDGE.

Traduit de l'anglais sur la deuxième édition,

PAR G. SÉLIGMANN-LUI,
Ancien élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Télégraphes,

AVEC

NOTES ET ÉCLAIRCISSEMENTS,

PAR

MM. Cornu, de l'Institut, Potier et Sarrau, Professeurs à l'École Polytechnique.

TOME II.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

1887

(Tous droits réservés.)

210762

TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ ET DE MAGNÉTISME.

TROISIÈME PARTIE.

MAGNÉTISME.

CHAPITRE I.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DU MAGNÉTISME.

371. On nomme *aimants* des corps, tels que le minerai de fer, dit *pierre d'aimant*, la terre elle-même et les pièces d'acier qui ont été soumises à certaines opérations, chez lesquels on constate les propriétés suivantes.

Si en un point quelconque voisin de la surface de la terre, le pôle magnétique excepté, on suspend un aimant de façon qu'il puisse tourner librement autour d'un axe vertical, il tend généralement à se placer dans un certain azimut, et, s'il en est écarté, il oscille autour de cette position. Un corps non aimanté ne manifeste point une pareille tendance, mais se tient également en équilibre dans tous les azimuts.

372. On constate que la force qui agit sur le corps tend à amener une certaine ligne du corps, qu'on appelle l'*axe de l'aimant*, parallèlement à une certaine ligne de l'espace qu'on appelle la *direction de la force magnétique*.

Supposons que l'aimant soit suspendu de manière à pouvoir tourner librement dans tous les sens autour d'un point fixe : pour éliminer l'influence de son poids, nous pouvons supposer que ce point soit son centre de gravité. Laissons arriver l'aimant à sa position d'équilibre, marquons deux de ses points, et notons leur position dans l'espace ; plaçons ensuite l'aimant dans une autre position d'équilibre, et notons la position qu'occupent dans l'espace les deux points marqués de l'aimant.

Puisque dans les deux positions l'axe de l'aimant coïncide avec la direction de la force magnétique, il nous faut trouver la ligne de l'aimant qui occupe dans l'espace la même position, avant et après le mouvement. On sait, par la théorie du mouvement des solides invariables, qu'il existe toujours une telle ligne, et qu'un mouvement équivalent au mouvement réel aurait pu être obtenu par une simple rotation autour de cette ligne.

Pour trouver cette ligne, joignons la première et la seconde position de chacun des points marqués, et traçons les plans perpendiculaires à ces lignes en leur milieu. L'intersection de ces plans est la ligne cherchée, qui indique la direction de l'axe de l'aimant et la direction de la force magnétique dans l'espace.

La méthode que l'on vient de décrire ne convient pas pour la détermination pratique de ces directions : nous reviendrons sur ce sujet en traitant des mesures magnétiques.

On trouve que la direction de la force magnétique est différente aux différents points de la surface de la terre. Si l'on marque le bout de l'axe de l'aimant qui se tourne du côté du nord, on constate qu'entre la direction de l'axe et celle du méridien vrai, il y a, en général, un écart considérable, et que, prenant la chose en gros, le bout marqué de l'axe se dirige vers le bas dans l'hémisphère nord, et vers le haut dans l'hémisphère sud.

L'azimut de la direction de la force magnétique, compté à partir du nord vrai vers l'ouest, est ce que l'on appelle la *variation* ou la *déclinaison magnétique*. L'angle compris entre la direction de la force magnétique et le plan horizontal est appelé l'*inclinaison magnétique*. Ces deux angles déterminent la direction de la force magnétique, et, lorsque l'intensité magnétique est aussi connue, la force magnétique est complètement déterminée. La détermination des valeurs de ces trois éléments aux différents points de la terre, la discussion de la manière dont ils varient suivant le lieu et l'époque de l'observation, et l'étude des causes de la force magnétique et de ses variations constituent la science du Magnétisme terrestre.

373. Supposons maintenant que l'on ait déterminé les axes de plusieurs aimants, et que l'on ait marqué sur chacun d'eux le bout qui se tourne vers le nord. Si l'on suspend librement un de ces aimants, et si l'on en approche un autre, on constate que les deux extrémités marquées se repoussent, qu'une extrémité marquée et une non marquée s'attirent, que deux extrémités non marquées se repoussent.

Si les aimants sont en forme de longues tiges ou de fils, aimantés longitudinalement d'une manière uniforme (*voir* plus loin, § 384), on constate que la plus grande force se fait sentir quand on approche l'une de l'autre les extrémités des aimants, et l'on peut rendre compte du phénomène en supposant que les extrémités semblables des aimants se repoussent, que les extrémités dissemblables s'attirent, et que les parties médianes des aimants n'exercent pas d'action sensible les unes sur les autres.

Les bouts d'un aimant long et mince sont appelés d'ordinaire ses *pôles*. Dans le cas d'un aimant infiniment mince, uniformément aimanté dans toute sa longueur, les extrémités agissent comme des centres de force, et le reste de l'aimant ne semble pas exercer d'action magnétique. Dans aucun aimant réellement existant, l'aimantation n'est exactement uniforme, en sorte qu'on ne peut prendre pour pôles des points isolés. Coulomb (1) a réussi néanmoins, en employant des aimants longs et minces aimantés avec soin, à établir la loi de la force qui agit entre deux pôles magnétiques.

La répulsion qui s'exerce entre deux pôles magnétiques est dirigée suivant la ligne droite qui les joint, et a pour valeur numérique le produit des forces des pôles divisé par le carré de leur distance.

374. Il est clair que cette loi suppose la force de chaque pôle mesurée en fonction d'une certaine unité, dont la grandeur peut se déduire des termes mêmes de la loi.

Le pôle pris pour unité se dirige vers le nord, et il est tel que, placé à l'unité de distance d'un autre pôle unité, il le repousse avec l'unité de force, l'unité de force étant définie comme au § 6. On compte négativement un pôle qui se dirige vers le sud.

Si m_1 et m_2 sont les forces de deux pôles, l la distance qui les sépare, et f la force de répulsion, toutes ces quantités étant exprimées

(1) Les expériences faites sur le magnétisme au moyen de la balance de torsion sont contenues dans les *Mémoires de l'Académie de Paris*, 1780-9, et dans le *Traité de Physique* de Biot, t. III.

numériquement, on a

$$f = \frac{m_1 m_2}{l^2}.$$

Mais si $[m]$, $[L]$ et $[F]$ sont les unités concrètes de pôle magnétique, de longueur et de force,

$$f[F] = \frac{m_1 m_2}{l^2}\left[\frac{M}{L}\right]^2,$$

d'où il suit que

$$[m^2] = [L^2 F] = \left[L^2 \frac{ML}{T^2}\right]$$

ou

$$[m] = \left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right].$$

Les dimensions de l'unité de pôle sont donc : $\frac{3}{2}$ pour la longueur, (-1) pour le temps, $\frac{1}{2}$ pour la masse. Ces dimensions sont les mêmes que celles de l'unité électrostatique d'électricité, qui est définie exactement de la même manière aux § 41 et 42.

375. On peut considérer que l'exactitude de cette loi a été établie par les expériences de Coulomb avec la balance de torsion, et qu'elle a été confirmée par les mesures de Gauss, de Weber et de tous les observateurs des observatoires magnétiques, qui font chaque jour des mesures de quantités magnétiques et qui obtiendraient des résultats ne se liant pas les uns aux autres, si l'on avait admis une loi de la force magnétique erronée. Elle tire encore une autre confirmation de son accord avec les lois des phénomènes électromagnétiques.

376. La quantité que nous avons jusqu'ici appelée la *force d'un pôle* peut aussi être appelée une *quantité de magnétisme,* pourvu que l'on n'attribue pas au magnétisme d'autres propriétés que celles observées pour les pôles des aimants.

Puisque la loi de la force agissant entre deux quantités données de Magnétisme s'exprime exactement par la même forme mathématique que la loi de la force agissant entre des quantités d'électricité de valeur numérique égale, les développements mathématiques relatifs au magnétisme doivent être en grande partie semblables à ceux qui se rapportent à l'électricité. Mais il y a d'autres propriétés des aimants dont on doit se souvenir et qui peuvent jeter quelque lumière sur les propriétés électriques des corps.

Relation entre les pôles d'un aimant.

377. La quantité de magnétisme qui réside à un pôle d'un aimant est toujours égale et contraire à la quantité qui réside à l'autre pôle, ou, plus généralement :

Dans un aimant, la quantité totale de magnétisme, comptée algébriquement, est nulle.

Par suite, dans un champ de force qui est uniforme et parallèle pour tout l'espace occupé par un aimant, la force qui agit sur le bout marqué est exactement égale, contraire et parallèle à la force qui agit sur le bout non marqué, en sorte que la résultante des forces est un couple tendant à amener l'axe de l'aimant dans une direction déterminée, mais non à donner à l'aimant un mouvement d'ensemble dans une direction quelconque.

C'est ce que l'on peut aisément démontrer en mettant un aimant dans un petit vase que l'on fait flotter sur l'eau. Le vase tourne dans une certaine direction, de façon à amener l'axe de l'aimant aussi près que possible de la direction de la force magnétique terrestre, mais il n'y a de mouvement d'ensemble du vase dans aucune direction; il n'est donc pas possible que la force dirigée vers le nord soit plus grande que la force dirigée vers le sud ou inversement. C'est ce qui résulte encore de ce fait que l'aimantation ne change pas le poids d'une pièce d'acier, mais bien la position apparente de son centre de gravité que, sous nos latitudes, elle déplace vers le nord, le long de l'axe. Le centre d'inertie, tel qu'on le détermine par les phénomènes de rotation, n'est pas changé.

378. Si l'on examine le milieu d'un aimant long et mince, on trouve qu'il ne possède pas de propriétés magnétiques; mais, si l'on brise l'aimant en cet endroit, on trouve que chaque morceau a un pôle magnétique à l'endroit de la rupture, et que ce nouveau pôle est exactement égal et contraire à l'autre pôle situé sur le même morceau. Il est donc impossible, soit par aimantation, soit en brisant des aimants, soit par aucun autre moyen, de se procurer un aimant dont les pôles soient inégaux.

Si l'on brise un aimant long et mince en un grand nombre de petits morceaux, on obtient une série de petits aimants dont chacun a des pôles à peu près de même force que ceux du grand aimant primitif. Cette multiplication des pôles n'est pas nécessairement une création

d'énergie, car nous devons nous rappeler qu'après avoir brisé l'aimant nous avons dû dépenser du travail pour séparer les parties, en raison de leur attraction l'une pour l'autre.

379. Mettons maintenant tous les morceaux de l'aimant l'un au bout de l'autre, comme primitivement : à chaque point de jonction, deux pôles exactement égaux et d'espèces contraires se trouveront en contact, de sorte que leur action combinée sur un autre pôle sera nulle. L'aimant ainsi reconstruit a donc les mêmes propriétés que par le passé, à savoir, deux pôles, un à chaque bout, égaux et contraires l'un à l'autre, et une partie comprise entre ces pôles ne présentant pas d'action magnétique.

Puisque nous savons, dans ce cas, que le grand aimant est formé de petits aimants courts et que les phénomènes sont les mêmes que si l'aimant n'était pas brisé, nous pouvons considérer l'aimant, même avant sa rupture, comme formé de petites particules ayant chacune deux pôles égaux et contraires. Si nous supposons que tous les éléments sont formés de semblables particules, il est clair que, puisque la quantité totale de magnétisme de chaque particule est nulle, la quantité sera aussi nulle dans l'aimant entier; en d'autres termes, ses pôles seront égaux et d'espèces opposées.

Théorie de la matière magnétique.

380. Puisque la loi des actions magnétiques est de forme identique à la loi des actions électriques, les mêmes raisons que l'on peut faire valoir pour attribuer les phénomènes électriques à l'action d'un ou de deux fluides peuvent aussi être employées pour établir l'existence d'une ou de deux espèces de matière magnétique, fluide ou autre. En fait, une théorie supposant une matière magnétique, employée en un sens purement mathématique, ne peut manquer d'expliquer les phénomènes, pourvu que l'on puisse introduire sans restriction de nouvelles lois pour tenir compte de faits observés.

Une de ces nouvelles lois doit être que le fluide magnétique ne peut passer d'une molécule ou d'un élément d'un aimant à un autre; mais que les opérations de l'aimantation consistent à séparer, dans une certaine mesure, les fluides contenus dans chaque molécule, de manière que l'un des fluides soit plus concentré à un des bouts, et l'autre fluide plus concentré à l'autre bout de la molécule. C'est là la théorie de Poisson.

Dans cette théorie, une molécule d'un corps susceptible de s'ai-

manter est analogue à un petit conducteur isolé et sans charge, qui, dans la théorie des deux fluides, contient des quantités infiniment grandes, mais exactement égales, des deux électricités. Quand une force électromotrice agit sur le conducteur, elle sépare les deux électricités et les rend apparentes aux deux extrémités opposées du conducteur. De même, dans cette théorie, la force magnétisante sépare les deux espèces de magnétisme qui étaient primitivement dans un état de neutralisation, et les rend apparentes aux extrémités opposées de la molécule aimantée.

Dans certaines substances, comme le fer doux et les autres substances magnétiques auxquelles on ne peut communiquer d'aimantation permanente, cet état magnétique disparaît, comme l'électrisation du conducteur, aussitôt que la force inductrice est écartée. Dans d'autres substances, telles que l'acier trempé, l'état magnétique est difficile à produire et, une fois produit, persiste après que la cause inductrice a disparu.

C'est ce que l'on exprime en disant que, dans ce dernier cas, il y a une force coercitive qui tend à empêcher tout changement d'aimantation, et qui doit être surmontée avant que l'on puisse augmenter ou diminuer la puissance d'un aimant. Cela correspondrait, dans le cas du corps électrisé, à une sorte de résistance différente de celle qu'on observe dans les métaux, équivalant à un isolement complet pour les forces électromotrices inférieures à une certaine valeur.

Cette théorie du magnétisme, de même que la théorie correspondante de l'électricité, est évidemment trop large pour les faits et doit être restreinte par des conditions artificielles. En effet, non seulement elle ne donne pas de raison pour que deux corps ne puissent différer par le seul fait que l'un aurait plus de l'un et l'autre fluide que l'autre, mais encore elle nous permet de dire ce que seraient les propriétés d'un corps ayant un excès de l'un des fluides magnétiques. Il est vrai qu'on donne une raison pour montrer qu'un pareil corps ne peut exister; mais cette raison n'est introduite qu'après coup, pour expliquer ce fait particulier, et ne ressort pas naturellement du développement de la théorie.

381. Nous devons donc chercher une façon de nous exprimer qui ne dise pas trop et qui laisse place à l'introduction de nouvelles idées, à mesure que celles-ci se développeront par l'étude des faits. C'est, je crois, ce que nous obtiendrons en commençant par dire que les molécules d'un aimant sont polarisées.

Sens du mot polarisation.

Si une molécule d'un corps possède des propriétés relatives à une ligne ou à une direction de ce corps, et si, quand le corps conservant ses propriétés est retourné de manière à renverser cette direction, les propriétés de la molécule sont aussi renversées par rapport aux corps environnants, on dit que la molécule est polarisée et que ses propriétés constituent une espèce particulière de polarisation.

Ainsi, on peut dire que la rotation d'un corps autour d'un axe constitue une sorte de polarisation; car, si l'on retourne l'axe bout pour bout pendant que la rotation continue, le corps tourne en sens inverse relativement à l'espace.

On peut dire qu'une molécule conductrice traversée par un courant électrique est polarisée; car, si on la retourne et que le courant continue à circuler dans le même sens relativement à cette molécule, la direction de ce courant dans l'espace est renversée.

Bref, si une quantité mathématique ou physique est de la nature d'un vecteur, ainsi qu'on l'a défini au § 11, on peut dire que le corps ou la molécule à laquelle appartient cette quantité dirigée ou vecteur est polarisée (1), car elle a des propriétés opposées dans les deux directions opposées ou pôles de la quantité dirigée.

Ainsi, les pôles de la Terre ont un rapport avec sa rotation et ont reçu, par conséquent, des noms différents.

Sens du terme polarisation magnétique.

382. Quand nous disons que les molécules d'un aimant sont dans

---

(1) Le mot *polarisation* a été employé dans un sens différent en Optique, où l'on dit qu'un rayon est polarisé quand il a des propriétés relatives à ses côtés, lesquelles sont identiques sur les côtés opposés du rayon. Cette sorte de polarisation se rapporte à un autre genre de quantités dirigées, que l'on pourrait appeler des *quantités dipolaires* par opposition à la première espèce que l'on peut appeler *unipolaire*.

Quand une quantité dipolaire est retournée bout pour bout, elle reste la même qu'auparavant. Les tensions et les pressions des solides, les extensions, les compressions, les déformations et la plupart des propriétés optiques, électriques et magnétiques des corps cristallisés sont des quantités dipolaires.

La propriété que le magnétisme développe dans les corps transparents, de faire tourner le plan de polarisation de la lumière incidente, est, comme le magnétisme lui-même, une propriété unipolaire. La propriété rotatoire citée au § 303 est aussi unipolaire.

un état de polarisation magnétique, nous entendons par là que chacune des plus petites parties en lesquelles l'aimant peut être partagé possède certaines propriétés relatives à un axe défini dans la molécule, que l'on appelle son *axe d'aimantation*, et que les propriétés relatives à un des bouts de cet axe sont opposées aux propriétés relatives à l'autre bout.

Les propriétés que nous attribuons à la molécule sont de la même nature que celles que nous observons dans l'aimant complet; et quand nous attribuons ces propriétés à la molécule, nous ne faisons qu'affirmer ce que nous pouvons démontrer en brisant un aimant en petits morceaux, car on constate que chacun d'eux est un aimant.

Propriétés d'une molécule aimantée.

383. Supposons que l'élément $dxdydz$ soit une molécule d'un aimant, et que ses propriétés magnétiques soient celles d'un aimant qui aurait un pôle positif de force m et une longueur ds. Si P est un point quelconque de l'espace, à une distance r du pôle positif et à une distance r' du pôle négatif, le potentiel magnétique au point P sera $\frac{m}{r}$ dû au pôle positif, et $-\frac{m}{r'}$ dû au pôle négatif, ou

$$V = \frac{m}{rr'}(r' - r); \tag{1}$$

si la distance des pôles ds est très petite, on peut poser

$$r' - r = ds \cos\varepsilon, \tag{2}$$

où ε est l'angle compris entre le vecteur mené de l'aimant au point P et l'axe de l'aimant; d'où

$$V = \frac{m\,ds}{r^2}\cos\varepsilon. \tag{3}$$

Moment magnétique.

384. On appelle *moment magnétique* d'un barreau aimanté uniformément et longitudinalement le produit de sa longueur par la force de son pôle positif.

Intensité d'aimantation.

L'intensité d'aimantation d'une molécule est le rapport de son moment magnétique à son volume. Nous la désignerons par I.

L'aimantation en un point d'un aimant peut être définie par son intensité et sa direction. Sa direction peut être définie par ses cosinus λ, μ, ν des angles qu'elle fait avec les axes.

Composantes de l'aimantation.

L'aimantation en un point d'un aimant, étant un vecteur ou quantité dirigée, peut être exprimée en fonction de ses trois composantes rapportées aux axes de coordonnées. Appelons A, B, C ces composantes,

$$A = I\lambda, \quad B = I\mu, \quad C = I\nu, \tag{4}$$

et la valeur numérique de I est donnée par l'équation

$$I^2 = A^2 + B^2 + C^2. \tag{5}$$

385. Si la partie de l'aimant que nous considérons est l'élément différentiel de volume $dxdydz$, et si I désigne l'intensité d'aimantation de cet élément, $Idxdydz$ est son moment magnétique; substituant cette valeur à mds dans l'équation (3), et nous rappelant que

$$r\cos\varepsilon = \lambda(\xi - x) + \mu(\eta - y) + \nu(\zeta - z), \tag{6}$$

où ξ, η, ζ sont les coordonnées de l'extrémité du vecteur r, mené par le point (x, y, z), nous trouvons pour le potentiel au point (ξ, η, ζ), dû à l'élément magnétique placé en (x, y, z),

$$[A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)]\,\frac{I}{r^3}\,dxdydz. \tag{7}$$

Pour obtenir le potentiel en un point (ξ, η, ζ), dû à un aimant de dimensions finies, il faut trouver l'intégrale de cette quantité pour tous les éléments de volume compris dans l'espace occupé par l'aimant, soit

$$V = \iiint [A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)]\,\frac{I}{r^3}\,dxdydz, \tag{8}$$

ce qui devient, en intégrant par parties,

$$\begin{cases} V = \iint \frac{A}{r}\,dydz + \iint \frac{B}{r}\,dzdx + \iint \frac{C}{r}\,dxdy \\ \qquad - \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right)dxdydz, \end{cases} \tag{9}$$

où la double intégration des premiers termes s'applique à la surface, et la triple intégration du quatrième terme au volume occupé par l'aimant.

Si λ, μ, ν désignent les cosinus directeurs de la normale à un élément de surface dS menée vers le dehors, on peut écrire, comme au § 21, la somme des trois premiers termes sous la forme

$$\int\int (lA + mB + nC)\frac{1}{r}\,dS,$$

où l'intégration doit être étendue à toute la surface de l'aimant.

Si maintenant nous introduisons deux nouveaux symboles, σ et ρ, définis par les équations

$$\sigma = lA + mB + nC,$$
$$\rho = -\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right),$$

l'expression du potentiel peut s'écrire

$$V = \int\int \frac{\sigma}{r}\,dS + \int\int\int \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

386. Cette expression est identique à celle du potentiel électrique dû à un corps ayant une électrisation de densité superficielle σ, et une charge répandue dans toute sa masse, dont la densité de volume est ρ. Donc, si nous admettons que σ et ρ soient la densité superficielle et la densité de volume dans la distribution de la matière fictive que nous avons appelée *matière magnétique*, le potentiel dû à cette distribution fictive est identique à celui qui est produit par l'aimantation réelle des éléments de l'aimant.

La densité superficielle σ est la composante de l'intensité d'aimantation I suivant la normale menée à la surface vers le dehors, et la densité de volume ρ est la convergence (*voir* § 25) de l'intensité d'aimantation en un point quelconque de l'aimant.

Cette façon de représenter l'action d'un aimant comme due à une distribution de matière magnétique est très commode; mais nous devons nous souvenir que ce n'est qu'un moyen artificiel pour figurer l'action d'un système de molécules polarisées.

Action d'une molécule magnétique sur une autre.

387. Si, comme dans le Chapitre des *Sphériques harmoniques*, nous faisons

$$(1)\qquad \frac{d}{dh} = l\frac{d}{dx} + m\frac{d}{dy} + n\frac{d}{dz},$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de l'axe h, le potentiel dû à une

molécule placée à l'origine, ayant son axe parallèle à h_1 et dont le moment magnétique est m_1, sera

$$V_1 = -\frac{d}{dh_1}\frac{m_1}{r} = \frac{m_1}{r^2}\lambda_1, \tag{2}$$

où λ_1 est le cosinus de l'angle compris entre h_1 et r.

Si une deuxième molécule de moment m_2, ayant son axe parallèle à h_2, est placée à l'extrémité du rayon vecteur r, l'énergie potentielle due à l'action d'un aimant sur l'autre est

$$W = m_2\frac{dV_1}{dh_2} = -m_1 m_2 \frac{d^2}{dh_1 dh_2}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{3}$$

$$= \frac{m_1 m_2}{r^3}(\mu_{12} - 3\lambda_1\lambda_2), \tag{4}$$

où μ_{12} est le cosinus de l'angle des axes, et où λ_1, λ_2 sont les cosinus des angles des axes avec r.

Déterminons maintenant le moment du couple dû au premier aimant, qui tend à faire tourner le second autour de son centre.

Supposons que le second aimant tourne d'un angle $d\varphi$ dans un plan perpendiculaire à un troisième axe h_3 : le travail effectué contre les forces magnétiques sera $\frac{dW}{d\varphi}d\varphi$, et le moment des forces agissant sur l'aimant dans ce plan sera

$$-\frac{dW}{d\varphi} = -\frac{m_1 m_2}{r^3}\left(\frac{d\mu_{12}}{d\varphi} - 3\lambda_1\frac{d\lambda_2}{d\varphi}\right). \tag{5}$$

Donc le moment qui agit effectivement sur le second aimant peut être considéré comme la résultante de deux couples : le premier agit dans un plan parallèle aux axes des deux aimants, et tend à *augmenter* l'angle de ces axes avec une force dont le moment est

$$\frac{m_1 m_2}{r^3}\sin(h_1 h_2); \tag{6}$$

le second couple agit dans un plan passant par $r\mu$, par l'axe du second aimant, et tend à *diminuer* l'angle de ces directions avec une force

$$\frac{3m_1 m_2}{r^3}\cos(rh_1)\sin(rh_2), \tag{7}$$

où (rh_1), (rh_2) et $(h_1 h_2)$ désignent les angles compris entre les lignes r, h_1 et h_2.

Pour déterminer la force qui agit sur le second aimant dans une

direction parallèle à la ligne h_3, nous avons à calculer

$$(8)\qquad -\frac{dW}{dh_3} = +m_1 m_2 \frac{d^3}{dh_1 dh_2 dh_3}\left(\frac{1}{r}\right) = -m_1 m_2 \frac{|3Y_3}{r^4},$$

d'après le § 128 *c*;

$$(9)\qquad = 3\frac{m_1 m_2}{r^4}[\lambda_1\mu_{23} + \lambda_2\mu_{31} + \lambda_3\mu_{12} - 5\lambda_1\lambda_2\lambda_3],$$

d'après le § 133;

$$(10)\qquad = 3\lambda_3\frac{m_1 m_2}{r^4}(\mu_{12} - 5\lambda_1\lambda_2) + 3\mu_{13}\frac{m_1 m_2}{r^4}\lambda_2 + 3\mu_{23}\frac{m_1 m_2}{r^4}\lambda_1.$$

Si nous supposons que la force effective soit la résultante de trois forces R, H_1 et H_2 dirigées suivant r, h_1 et h_2, la force dirigée suivant h_3 est

$$(11)\qquad \lambda_3 R + \mu_{13} H_1 + \mu_{23} H_2.$$

Puisque la direction de h_3 est arbitraire, nous devons avoir

$$(12)\qquad R = \frac{3m_1 m_2}{r^4}(\mu_{12} - 5\lambda_1\lambda_2),\quad H_1 = \frac{3m_1 m_2}{r^4}\lambda_2,\quad H_2 = \frac{3m_1 m_2}{r^4}\lambda_1.$$

La force R est une répulsion qui tend à augmenter r; H_1 et H_2 agissent sur le second aimant dans la direction des axes du premier et du second aimant respectivement.

Cette analyse des forces qui agissent entre deux petits aimants a été donnée au moyen de l'*Analyse des Quaternions*, par le professeur Tait, dans le *Quarterly Math. Journal* de janvier 1860. (*Voir* aussi son Ouvrage sur *Les Quaternions*, § 414.)

Positions particulières.

388. 1° Si λ_1 et λ_2 sont tous deux égaux à 1, c'est-à-dire si les aimants sont en ligne droite et dans la même direction, $\mu_{12} = 1$, et la force qui agit entre les aimants est une répulsion,

$$(13)\qquad R + H_1 + H_2 = -\frac{6m_1 m_2}{r^4}.$$

Le signe — indique que la force est une attraction.

2° Si λ_1 et λ_2 sont nuls et $\mu_{12} = 1$, les axes des aimants sont parallèles entre eux et perpendiculaires à r, et la force est une répulsion,

$$(14)\qquad \frac{3m_1 m_2}{r^4}.$$

Dans aucun de ces cas il n'y a couple.

3° Si $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$,

(15) $$\mu_{12} = 0;$$

la force qui agira sur le second aimant sera

$$\frac{3 m_1 m_2}{r^4},$$

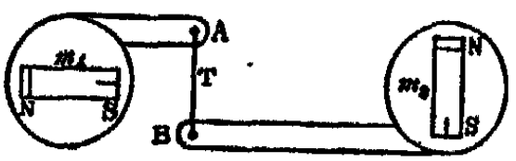
dans la direction de son axe, et le couple sera

$$\frac{2 m_1 m_2}{r^3},$$

tendant à l'amener parallèlement au premier aimant. Cela revient à une force unique $\frac{3 m_1 m_2}{r^4}$ agissant parallèlement à la direction de l'axe du second aimant et coupant r en un point situé aux deux tiers de sa longueur, à partir de m_2.

Ainsi, dans la *fig.* 1 on fait flotter sur l'eau deux aimants; m_2 est

Fig. 1.



dans la direction de l'axe de m_1, mais a lui-même son axe perpendiculaire à celui de m_1. Si deux points A et B, invariablement liés à m_1 et m_2 respectivement, sont reliés au moyen d'un fil T, le système sera en équilibre pourvu que T coupe la ligne $m_1 m_2$ en un point situé au tiers de la distance de m_1 à m_2.

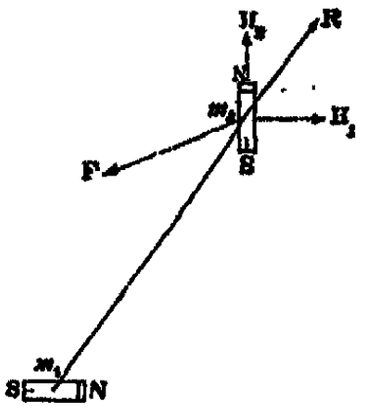
4° Si on laisse le second aimant tourner librement autour de son centre, jusqu'à ce qu'il arrive à une position d'équilibre stable, W sera un minimum relativement à h_2, et, par suite, la composante suivant la direction de h_1 de la force due à m_2 sera maximum. Donc, si nous voulons produire en un point donné et dans une direction donnée la plus grande force magnétique possible, au moyen d'aimants dont les positions des centres sont données, pour déterminer les positions qu'il convient de donner aux axes de ces aimants pour produire l'effet voulu, nous n'avons qu'à placer un des aimants au point donné (*fig.* 2), son axe dans la direction donnée, et à observer la position d'équilibre stable que prend l'axe du second aimant

quand son centre est placé en chacun des autres points donnés. On doit alors placer les axes des aimants dans les directions indiquées par l'axe du second aimant.

Il est clair que, si le magnétisme terrestre se fait sentir, il faut en tenir compte quand on fait cette expérience.

Supposons le second aimant dirigé suivant sa position d'équilibre

Fig. 2.



stable : puisque le couple qui agit sur lui est nul, l'axe du second aimant doit être dans le même plan que celui du premier; d'où

$$(h_1 h_2) = (h_1 r) + (r h_2), \tag{16}$$

et le couple étant

$$\frac{m_1 m_2}{r^3}\,[\sin(h_1 h_2) - 3\cos(h_1 r)\sin(r h_2)], \tag{17}$$

quand cette expression est nulle, nous trouvons

$$\operatorname{tang}(h_1 r) = 2\operatorname{tang}(r h_2) \tag{18}$$

ou

$$\operatorname{tang}(\mathrm{H}_1 m_2 \mathrm{R}) = 2\operatorname{tang}(\mathrm{R}\, m_2 \mathrm{H}_2). \tag{19}$$

Lorsque le second aimant a pris cette position, la valeur de W devient

$$m_2 \frac{dV}{dh_2},$$

où h_2 est la direction de la ligne de force due à m_1 au point m_2; d'où

$$\mathrm{W} = -\,m_2 \sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2}. \tag{20}$$

Donc, le second aimant tendra à se mouvoir vers les points où la force résultante est la plus grande.

La force qui agit sur le second aimant peut se décomposer en une force R, toujours attractive et dirigée vers le premier aimant, et une force H parallèle à l'axe du premier aimant

$$(21) \qquad R = 3\frac{m_1 m_2}{r^4}\frac{4\lambda_1^2+1}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}}, \quad H_1 = 3\frac{m_1 m_2}{r^4}\frac{\lambda_1}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}}.$$

On a représenté sur la *Pl. XIV*, à la p. 17, les lignes de force et les surfaces équipotentielles dans un espace à deux dimensions. On suppose que les aimants qui les produisent sont de longues tiges cylindriques, dont les sections sont figurées par les espaces circulaires blancs, et qui seraient aimantés transversalement dans la direction des flèches.

Si l'on se souvient qu'il y a une tension le long des lignes de force, il est aisé de voir que chaque aimant tend à tourner dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.

Celui de droite tendra aussi à prendre un mouvement d'ensemble vers le haut, celui de gauche un mouvement vers le bas de la page.

Énergie potentielle d'un aimant placé dans un champ magnétique.

389. Soit V le potentiel magnétique dû à un système quelconque d'aimants agissant sur l'aimant considéré. Nous appellerons V le potentiel de la force magnétique extérieure.

Si un petit aimant de force m, de longueur ds, est placé de façon que son pôle positif soit en un point où le potentiel est V, et son pôle négatif en un point où le potentiel est V′, l'énergie potentielle de cet aimant est $m(V-V')$ ou, si ds est mesuré du pôle négatif au pôle positif,

$$m\frac{dV}{ds}ds.$$

Soient I l'intensité d'aimantation, λ, μ, ν ses cosinus directeurs, on peut écrire

$$m\,ds = I\,dx\,dy\,dz$$

et

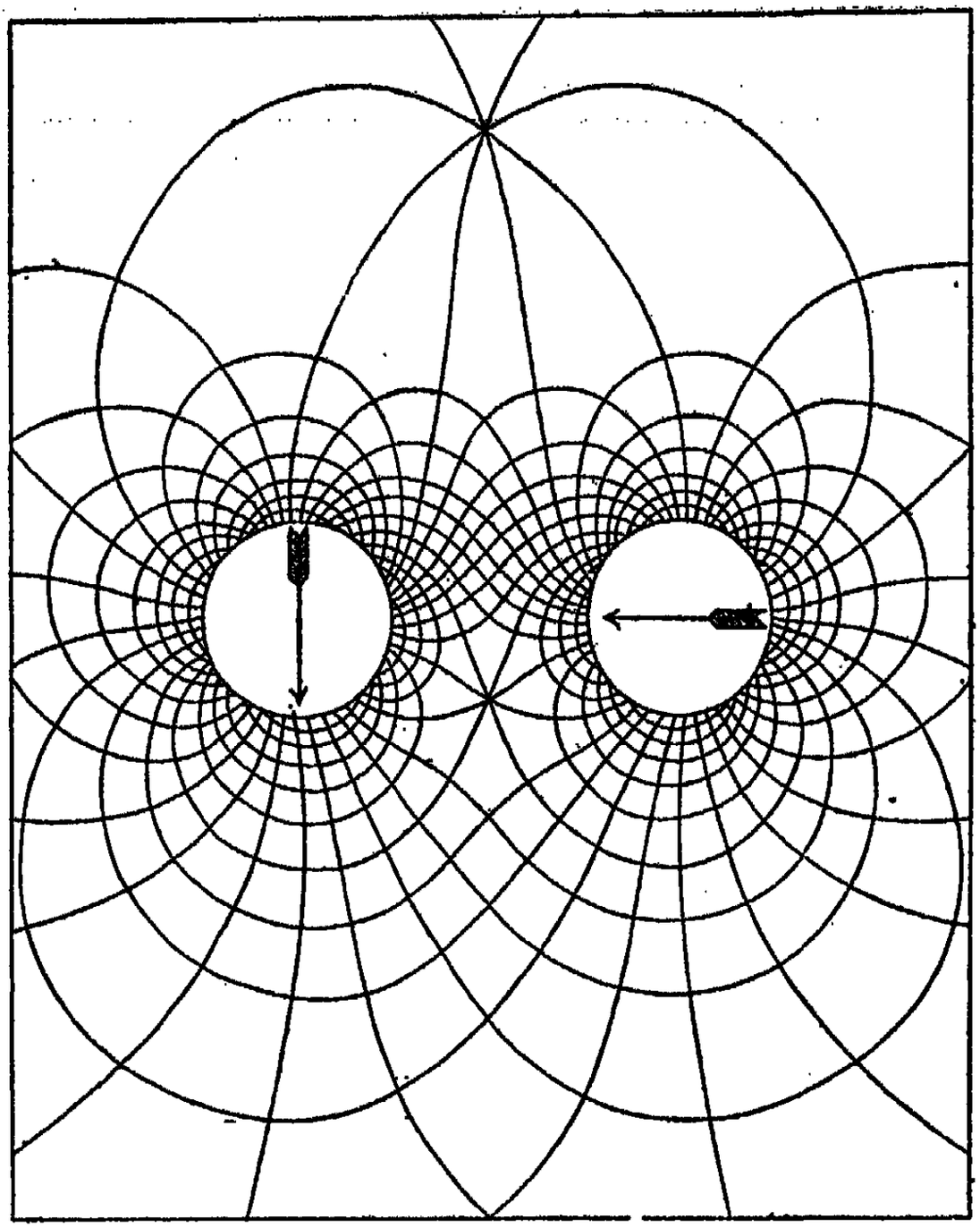
$$(1) \qquad \frac{dV}{ds} = \lambda\frac{dV}{dx} + \mu\frac{dV}{dy} + \nu\frac{dV}{dz},$$

et, finalement, si A, B, C sont les composantes de l'aimantation

$$A = \lambda I, \quad B = \mu I, \quad C = \nu I;$$

de sorte que l'expression (1) de l'énergie potentielle de l'élément d'ai-

Pl. XIV.



Deux cylindres magnétisés transversalement.

mant devient

$$(2) \qquad \left(A\frac{dV}{dx}+B\frac{dV}{dy}+C\frac{dV}{dz}\right)dx\,dy\,dz.$$

Pour obtenir l'énergie potentielle d'un aimant de grandeur finie, nous devons intégrer cette expression pour tous les éléments de l'aimant. Nous obtenons ainsi

$$(3) \qquad W=\int\int\int\left(A\frac{dV}{dx}+B\frac{dV}{dy}+C\frac{dV}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

pour valeur de l'énergie potentielle de l'aimant par rapport au champ magnétique dans lequel il est placé.

L'énergie potentielle est ici exprimée en fonction des composantes de l'intensité d'aimantation et de celles de la force magnétique due aux causes extérieures.

En intégrant par parties, on peut l'exprimer en fonction de la distribution de la matière magnétique et du potentiel magnétique,

$$(4) \qquad \begin{cases} W=\int\int(Al+Bm+Cn)V\,dS \\ \qquad -\int\int\int V\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)dx\,dy\,dz, \end{cases}$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément de surface dS. Si, dans cette équation, on substitue les expressions de la densité superficielle et de la densité de volume de la matière magnétique données au § 386, l'expression devient

$$(5) \qquad W=\int\int V\sigma\,dS+\int\int\int V\rho\,dx\,dy\,dz.$$

On peut aussi écrire l'équation (3) sous la forme

$$(6) \qquad W=-\int\int\int(A\alpha+B\beta+C\gamma)dx\,dy\,dz,$$

où α, β, γ sont les composantes de la force magnétique extérieure.

Moment magnétique et axe d'un aimant.

390. Si, dans tout l'espace occupé par l'aimant, les composantes de la force magnétique extérieure sont uniformes en direction et en grandeur, les composantes α, β, γ seront des quantités constantes; et,

si nous posons

$$(7)\qquad \begin{cases} \iiint A\,dx\,dy\,dz = lK, \\ \iiint B\,dx\,dy\,dz = mK, \\ \iiint C\,dx\,dy\,dz = nK, \end{cases}$$

l'intégration étant étendue à toute la masse de l'aimant, la valeur de W pourra s'écrire

$$(8)\qquad W = -K(l\alpha + m\beta + n\gamma).$$

Dans cette expression l, m, n sont les cosinus directeurs de l'axe de l'aimant, K son moment magnétique. Si ε est l'angle de l'axe de l'aimant et de la direction de la force magnétique $\mathfrak{H}$, la valeur de W peut s'écrire

$$(9)\qquad W = -K\mathfrak{H}\cos\varepsilon.$$

Si l'aimant est suspendu de manière à pouvoir tourner librement autour d'un axe vertical, comme c'est le cas pour une aiguille de boussole ordinaire, soit φ l'azimut de l'axe de l'aimant, et soit θ son inclinaison sur le plan horizontal; soient δ l'azimut et ζ l'inclinaison de la force magnétique terrestre,

$$(10)\qquad \alpha = \mathfrak{H}\cos\zeta\cos\delta, \qquad \beta = \mathfrak{H}\cos\zeta\sin\delta, \qquad \gamma = \mathfrak{H}\sin\zeta,$$

$$(11)\qquad l = \cos\theta\cos\varphi, \qquad m = \cos\theta\sin\varphi, \qquad n = \sin\theta;$$

d'où

$$(12)\qquad W = -K\mathfrak{H}[\cos\zeta\cos\theta\cos(\varphi - \delta) + \sin\zeta\sin\theta].$$

Le moment de la force qui tend à augmenter φ en faisant tourner l'aimant autour de l'axe vertical est

$$(13)\qquad -\frac{dW}{d\varphi} = -K\mathfrak{H}\cos\zeta\cos\theta\sin(\varphi - \delta).$$

Développement du potentiel d'un aimant en harmoniques solides.

391. Soit V le potentiel dû à l'unité de pôle placée au point (ξ, η, ζ). La valeur de V en un point (x, y, z) sera

$$(1)\qquad V = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette expression peut être développée en fonction de sphériques har-

moniques ayant leur centre à l'origine. On a alors

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots, \tag{2}$$

où

$$V_0 = \frac{1}{r}, \tag{3}$$

r étant la distance de (ξ, η, ζ) à l'origine,

$$V_1 = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r^3}, \tag{4}$$

$$\begin{cases} V_2 = \dfrac{3(\xi x + \eta y + \zeta z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{r^5}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{5}$$

Pour déterminer la valeur de l'énergie potentielle développée lorsqu'on place un aimant dans un champ de force exprimé par ce potentiel, nous devons intégrer l'expression (3) de W (§ 389), par rapport à x, y et z, en considérant ξ, η, ζ et r comme des constantes.

Si nous ne considérons que les termes introduits par V_0, V_1 et V_2, le résultat dépend des intégrales suivantes :

$$\begin{cases} l\mathrm{K} = \iiint \mathrm{A}\, dx\, dy\, dz, \\ m\mathrm{K} = \iiint \mathrm{B}\, dx\, dy\, dz, \\ n\mathrm{K} = \iiint \mathrm{C}\, dx\, dy\, dz; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \mathrm{L} = \iiint \mathrm{A}x\, dx\, dy\, dz, \\ \mathrm{M} = \iiint \mathrm{B}y\, dx\, dy\, dz, \\ \mathrm{N} = \iiint \mathrm{C}z\, dx\, dy\, dz; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \mathrm{P} = \iiint (\mathrm{B}z + \mathrm{C}y)\, dx\, dy\, dz, \\ \mathrm{Q} = \iiint (\mathrm{C}x + \mathrm{A}z)\, dx\, dy\, dz, \\ \mathrm{R} = \iiint (\mathrm{A}y + \mathrm{B}x)\, dx\, dy\, dz. \end{cases} \tag{8}$$

Nous trouverons ainsi pour valeur de l'énergie potentielle d'un aimant

mis en présence de l'unité de pôle placée au point (ξ, η, ζ),

$$(9)\quad \begin{cases} W = K\dfrac{l\xi + m\eta + n\zeta}{r^3} \\ \qquad + \dfrac{\xi^2(2L-M-N) + \eta^2(2M-N-L) + \zeta^2(2N-L-M) + 3(P\eta\zeta + Q\zeta\xi + R\xi\eta)}{r^5} \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Cette expression peut aussi être considérée comme l'énergie potentielle de l'unité de pôle en présence de l'aimant ou, plus simplement, comme le potentiel du point (ξ, η, ζ) dû à l'aimant.

Du centre d'un aimant et de ses axes primaire et secondaires.

392. On peut simplifier cette expression en changeant le sens des coordonnées et la position de l'origine. En premier lieu, prenons la direction de l'axe des x parallèle à l'axe de l'aimant, ce qui revient à faire

$$(10)\qquad l = 1, \qquad m = 0, \qquad n = 0,$$

Si nous portons l'origine des coordonnées au point (x', y', z'), la direction des axes restant invariable, les intégrales de volume $l\mathrm{K}$, $m\mathrm{K}$ et $n\mathrm{K}$ ne changent pas, mais les autres sont modifiées comme il suit,

$$(11)\qquad L' = L - lKx', \qquad M' = M - mKy', \qquad N' = N - nKz'.$$

$$(12)\quad \begin{cases} P' = P - K(mz' + ny'), \\ Q' = Q - K(nx' + lz'), \\ R' = R - K(ly' + mx'). \end{cases}$$

Si maintenant nous rendons l'axe des x parallèle à l'axe de l'aimant, et si nous posons

$$(13)\qquad x' = \frac{2L - M - N}{2K}, \qquad y' = \frac{R}{K}, \qquad z' = \frac{Q}{K},$$

les valeurs de M et de N relatives aux nouveaux axes restent les mêmes; la valeur de L' devient $\frac{1}{2}(M + N)$; P ne change pas, et Q et R s'annulent. Nous pouvons donc écrire le potentiel sous la forme

$$(14)\qquad K\frac{\xi}{r^3} + \frac{\frac{3}{2}(\eta^2 - \zeta^2)(M - N) + 3P\eta\zeta}{r^5}.$$

Nous avons donc trouvé un point, fixe par rapport à l'aimant, et tel que le second terme du potentiel prend sa valeur la plus simple quand ce point est pris pour origine des coordonnées. Nous appellerons donc

ce point le *centre de l'aimant*, et l'axe mené par ce point dans la direction définie antérieurement comme étant l'axe magnétique sera appelé *axe principal de l'aimant*.

On peut encore simplifier ce résultat en faisant tourner les axes des y et des z autour de l'axe des x de la moitié de l'angle dont la tangente est $\frac{P}{M-N}$; P devient nul, et le potentiel prend finalement la forme suivante :

$$(15) \qquad K\frac{\xi}{r^3}+\frac{3}{2}\frac{(\eta^2-\zeta^2)(M-N)}{r^5}+\ldots.$$

Telle est la forme la plus simple des deux premiers termes du potentiel d'un aimant. Nous pouvons aussi déterminer le centre d'un aimant en trouvant la position de l'origine des coordonnées, qui rend minimum l'intégrale du carré du second terme du potentiel, étendue à toute la surface d'une sphère de rayon unité.

La quantité qu'il s'agit de rendre minimum est, d'après le § 141,

$$(16) \qquad 4(L^2+M^2+N^2-MN-NL-LM)+3(P^2+Q^2+R^2).$$

Les changements qu'éprouvent les valeurs de cette quantité pour un changement de position de l'origine peuvent se déduire des équations (11) et (12). Donc, les conditions de minimum sont

$$(17) \qquad \begin{cases} 2l(2L-M-N)+3nQ+3mR=0, \\ 2m(2M-N-L)+3lR+3nP=0, \\ 2n(2N-L-M)+3mP+3lQ=0; \end{cases}$$

Si nous supposons $l=1$, $m=0$, $n=0$, ces conditions deviennent

$$(18) \qquad 2L-M-N=0, \qquad Q=0, \qquad R=0,$$

qui sont les conditions dont nous nous sommes servi dans l'étude précédente.

Cette étude peut se comparer à celle où l'on développe le potentiel d'un système de matière soumise à la gravitation. Dans ce dernier cas, le point qu'il est préférable de prendre pour origine est le centre de gravité, et les axes les plus commodes sont les axes principaux d'inertie.

Dans le cas d'un aimant, le point qui correspond au centre de gravité est à une distance infinie dans la direction de l'axe; le point que nous appelons *centre de l'aimant* a des propriétés différentes de celles du centre de gravité. Les quantités L, M, N correspondent aux mo-

SOCIÉTÉ DE CHIMIE INDUSTRIELLE
Dominique PETIT

moments d'inertie P, Q, R aux produits d'inertie d'un corps matériel, à cela près que L, M, N ne sont pas nécessairement des quantités positives.

Quand le centre de l'aimant est pris pour origine, l'harmonique sphérique de second ordre est de la forme sectorielle et son axe coïncide avec celui de l'aimant, ce qui n'a lieu pour aucun autre point.

Quand un aimant est symétrique tout autour de son axe, comme dans le cas d'une figure de révolution, le terme qui contient l'harmonique de second ordre disparaît entièrement.

393. En tous les points de la surface de la terre, sauf en quelques endroits des régions polaires, un des bouts de l'aimant se dirige vers le nord ou, du moins, dans une direction voisine du nord, et l'autre bout dans une direction voisine du sud. Quand nous aurons à parler des bouts d'un aimant, nous emploierons l'expression populaire qui désigne sous le nom d'*extrémité nord* de l'aimant le bout qui se dirige vers le nord. Quand nous voudrons parler le langage de la théorie des fluides magnétiques, nous emploierons les termes *boréal* et *austral*. Le magnétisme boréal est une espèce de matière fictive que l'on admet être plus abondante dans les régions boréales de la terre, et le magnétisme austral est la matière magnétique fictive qui est la plus répandue dans les régions australes de la terre. Le magnétisme du bout nord d'un aimant est austral, et celui du bout sud est boréal. Ainsi, quand nous parlons du bout nord et du bout sud d'un aimant, nous ne comparons pas l'aimant à la terre, considérée comme un grand aimant, nous exprimons simplement la position que l'aimant tend à prendre quand il peut se mouvoir librement. Quand, au contraire, nous voudrons comparer la distribution du fluide magnétique fictif de l'aimant avec celle du fluide terrestre, nous emploierons les mots plus relevés de *magnétisme boréal* et *magnétisme austral*.

394. En parlant d'un champ de force magnétique, nous emploierons l'expression de *nord magnétique* pour désigner la direction marquée par l'extrémité nord d'une aiguille de boussole placée dans le champ de force.

Quand nous parlerons d'une ligne de force magnétique, nous la supposerons toujours tracée du sud magnétique au nord magnétique, et nous appellerons cette direction *direction positive*. De même, le sens de l'aimantation d'un aimant est marqué par une ligne qui va de l'extrémité sud à l'extrémité nord de l'aimant, et l'on considère comme extrémité positive celle qui est tournée vers le nord.

Nous considérerons comme positif le magnétisme austral, c'est-à-dire le magnétisme de cette partie de l'aimant qui est tournée vers le nord. Si nous désignons par m sa valeur numérique, le potentiel magnétique est

$$V = \Sigma\left(\frac{m}{r}\right),$$

et la direction positive sur une ligne de force est celle dans laquelle V diminue.

CHAPITRE II.

FORCE ET INDUCTION MAGNÉTIQUES.

393. Nous avons déjà déterminé (§ 385) le potentiel magnétique $d\Omega$, en un point donné, à un aimant dont l'aimantation en chaque point est connue, et nous avons montré que le résultat mathématique peut s'exprimer soit en fonction de l'aimantation effective de l'aimant, soit en fonction d'une distribution fictive de matière magnétique, en partie condensée à la surface de l'aimant et en partie répandue dans sa masse entière.

On trouve le potentiel ainsi défini par les mêmes opérations mathématiques, que le point donné soit extérieur ou intérieur à l'aimant. La force qui agit sur l'unité de pôle magnétique placée en un point extérieur à l'aimant se déduit du potentiel par la même opération de différentiation que dans le problème d'électricité correspondant. Si les composantes de cette force sont α, β, γ, on a

$$(1) \qquad \alpha = -\frac{dV}{dx}, \qquad \beta = -\frac{dV}{dy}, \qquad \gamma = -\frac{dV}{dz}.$$

Pour déterminer expérimentalement la force magnétique en un point intérieur d'un aimant, nous devons commencer par enlever une partie de la matière magnétique, de façon à former une cavité dans laquelle on placera le pôle magnétique. Or la force agissant sur le pôle dépendra généralement de la forme de la cavité et de l'inclinaison de ses parois relativement à la direction de l'aimantation. Donc, pour éviter toute ambiguïté quand on parle de la force magnétique à l'intérieur d'un aimant, il est nécessaire de bien spécifier la forme et la position de la cavité dans laquelle se mesure la force. Il est clair que si l'on indique la forme et la position de la cavité, on ne doit plus regarder le point où est placé le pôle magnétique comme intérieur à la substance de l'aimant, et par suite les méthodes ordinaires de détermination de la force deviennent immédiatement applicables.

396. Considérons maintenant une partie d'un aimant où la direction et l'intensité d'aimantation soient uniformes. Dans cette partie

supposons creusée une cavité en forme de cylindre ayant son axe parallèle à la direction d'aimantation, et plaçons au milieu de l'axe du cylindre un pôle magnétique de force égale à l'unité.

Puisque les génératrices du cylindre sont parallèles à la direction d'aimantation, il n'y aura point sur la surface courbe de distribution superficielle de magnétisme; et comme les deux extrémités circulaires du cylindre sont perpendiculaires à la direction d'aimantation, il y aura sur ces extrémités une distribution superficielle uniforme dont la densité superficielle est I sur le bout négatif et — I sur le bout positif.

Soient $2b$ la longueur du cylindre et a son rayon. Pour un pôle magnétique placé au milieu de l'axe, la force due à cette distribution superficielle se compose de l'attraction du disque placé du côté positif et de la répulsion du disque placé du côté négatif. Ces deux forces sont égales, dirigées dans le même sens, et leur somme est

$$(2) \qquad R = 4\pi I\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

De cette expression il résulte que la force ne dépend pas des dimensions absolues de la cavité, mais du rapport de la longueur au diamètre du cylindre. Donc, si petite que l'on fasse la cavité, la force due à la distribution superficielle sur ses bases restera généralement finie.

397. Jusqu'ici nous avons supposé que l'aimantation est uniforme et de même direction dans toute la partie de l'aimant où a été creusée la cavité cylindrique. Si l'on ne fait plus ces restrictions sur la nature de l'aimantation, il y a, en général, une distribution de matière magnétique fictive dans la masse de l'aimant. En enlevant le cylindre, on enlève une partie de la matière ainsi distribuée; mais, comme dans des solides semblables les forces aux points correspondants sont proportionnelles aux dimensions linéaires de la figure, la force qui agit sur le pôle magnétique par le fait de la matière magnétique distribuée dans le volume du cylindre éprouvera une variation indéfiniment décroissante, à mesure que les dimensions de la cavité diminueront, tandis que l'effet dû à la densité superficielle sur les parois de la cavité reste, en général, fini.

Si donc nous supposons les dimensions du cylindre assez petites pour que, dans toute la partie enlevée, on puisse considérer l'aimantation comme étant parallèle à l'axe du cylindre et de grandeur constante I, la force agissant sur un pôle magnétique placé au milieu de

ce cylindre creux sera composée de deux parties. La première est due à la matière magnétique distribuée sur la surface extérieure de l'aimant et dans toute sa masse, sauf la partie enlevée ; les composantes de cette force sont α, β, γ et se déduisent du potentiel par les équations (1). La seconde est la force R qui agit suivant l'axe du cylindre, dans le sens de l'aimantation : la grandeur de cette force dépend du rapport de la longueur au diamètre du cylindre creux.

398. *Premier cas.* — Supposons ce rapport très grand, c'est-à-dire le diamètre du cylindre petit relativement à sa longueur. Développant l'expression de R en fonction de $\frac{a}{b}$, nous trouvons

$$(3) \qquad R = 4\pi I\left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2} - \frac{3}{8}\frac{a^4}{b^4} + \cdots\right),$$

quantité qui s'annule quand on rend infini le rapport de b à a. Donc, si la cavité est un cylindre très étroit, ayant son axe parallèle à la direction d'aimantation, la force magnétique à l'intérieur de la cavité n'est point affectée par la distribution superficielle existant aux deux bouts du cylindre, et les composantes de cette force sont seulement α, β et γ, où

$$(4) \qquad \alpha = -\frac{dV}{dx}, \qquad \beta = -\frac{dV}{dy}, \qquad \gamma = -\frac{dV}{dz}.$$

Par définition, nous appellerons *force magnétique à l'intérieur de l'aimant* la force à l'intérieur d'une cavité de cette forme. C'est cette définition que Sir William Thomson a appelée *définition polaire de la force magnétique*. Quand nous aurons occasion de considérer cette force en tant que vecteur, nous la désignerons par $\mathfrak{H}$.

399. *Second cas.* — Supposons la longueur du cylindre petite relativement à son diamètre, en sorte que le cylindre se réduise à un disque mince. Développons R en fonction de $\frac{b}{a}$, il vient

$$(5) \qquad R = 4\pi I\left(1 - \frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{b^3}{a^3} - \cdots\right).$$

dont la valeur limite est $4\pi I$, quand le rapport de a à b devient infini.

Ainsi, lorsque la cavité est en forme de disque mince, dont le plan est normal à la direction de l'aimantation, un pôle magnétique unité placé au milieu de l'axe est soumis à une force $4\pi I$ dans le sens de

l'aimantation, due au magnétisme répandu sur les surfaces circulaires du disque (1).

Puisque A, B, C sont les composantes de I, les composantes de cette force sont $4\pi A$, $4\pi B$, $4\pi C$. Cette force doit être composée avec celles dont les composantes sont α, β, γ.

400. Désignons la force effective qui agit sur l'unité du pôle par le vecteur $\mathfrak{G}$ et ses composantes par a, b, c; on a

$$(6)\qquad \begin{cases} a = \alpha + 4\pi A, \\ b = \beta + 4\pi B, \\ c = \gamma + 4\pi C. \end{cases}$$

Par définition, nous appellerons *induction magnétique à l'intérieur de l'aimant* la force qui agit à l'intérieur d'une cavité en forme de disque, dont les faces planes sont normales à la direction d'aimantation. Cette définition est ce que Sir William Thomson appelle la *définition électromagnétique de la force magnétique*.

Les trois vecteurs, aimantation $\mathfrak{I}$, force magnétique $\mathfrak{H}$ et induction magnétique $\mathfrak{G}$ sont liées par l'équation vectorielle

$$(7)\qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{I}.$$

Intégrale de la force magnétique le long d'une ligne.

401. Puisque la force magnétique, définie comme au § 398, est celle qui est due à la distribution du magnétisme libre sur la surface et dans la masse de l'aimant, et qu'elle n'est pas modifiée par le magnétisme superficiel de la cavité, on peut la déduire directement de l'expression générale du potentiel de l'aimant : l'intégrale de ligne de

---

(1) *Force dans des cavités d'autre forme.*

1° Dans une fente étroite. La force due au magnétisme superficiel est $4\pi I\cos\varepsilon$ dirigée suivant la normale au plan de la crevasse, ε étant l'angle compris entre la normale à ce plan et la direction d'aimantation. Si la crevasse est parallèle à la direction d'aimantation, la force est la force magnétique $\mathfrak{H}$; si la crevasse est perpendiculaire à la direction d'aimantation, la force est l'induction magnétique $\mathfrak{G}$.

2° Cylindre allongé, dont l'axe fait un angle ε avec la direction d'aimantation. La force due au magnétisme superficiel est $2\pi I\sin\varepsilon$; elle est perpendiculaire à l'axe et dans le plan qui contient l'axe et la direction d'aimantation.

3° Dans une sphère la force due au magnétisme superficiel est $\frac{8}{3}\pi I$; elle est dirigée dans la direction de l'aimantation.

la force magnétique le long d'une courbe quelconque allant du point A au point B est donc

$$(8) \qquad \int_A^B \left(\alpha \frac{dx}{ds} + \beta \frac{dy}{ds} + \gamma \frac{dz}{ds}\right) ds = V_A - V_B,$$

où V_A et V_B désignent les potentiels respectifs de A et B.

Intégrale de l'induction magnétique sur une surface.

402. L'induction magnétique à travers la surface S est définie comme étant la valeur de l'intégrale

$$(9) \qquad Q = \int\int \mathfrak{B} \cos\varepsilon \, dS,$$

où $\mathfrak{B}$ désigne la grandeur de l'induction magnétique sur l'élément de surface dS, et ε l'angle entre la direction de l'induction et la normale à l'élément de surface, et où l'intégration doit être étendue à toute la surface qui peut être fermée ou limitée par une courbe fermée.

Si a, b, c désignent les composantes de l'induction magnétique; l, m, n les cosinus directeurs de la normale, l'intégrale peut s'écrire

$$(10) \qquad Q = \int\int (la + mb + nc) dS.$$

Si aux composantes de l'induction magnétique nous substituons leurs valeurs en fonction de la force magnétique et de l'aimantation données au § 400, on trouve

$$(11) \qquad Q = \int\int (l\alpha + m\beta + n\gamma) dS + 4\pi \int\int (lA + mB + nC) dS.$$

Supposons maintenant que la surface sur laquelle s'étend l'intégration soit fermée, et examinons la valeur des deux termes du second membre.

Puisque la force magnétique et le magnétisme libre sont liés par leur relation de même forme mathématique que la force électrique et l'électricité libre, nous pouvons appliquer au premier terme de Q le résultat obtenu au § 77, en substituant les composantes α, β, γ de la force magnétique aux composantes X, Y, Z de la force électrique, et la somme algébrique M de tout le magnétisme libre contenu à l'intérieur de la surface à la somme algébrique e de l'électricité libre.

Nous avons ainsi

$$(12) \qquad \int\int (l\alpha + m\beta + n\gamma) dS = 4\pi M.$$

Puisque chaque molécule magnétique a deux pôles qui sont égaux en grandeur numérique, mais sont de signes contraires, la somme algébrique du magnétisme contenu dans la molécule est zéro. Donc, les molécules qui sont entièrement à l'intérieur de la surface ne peuvent rien apporter à la somme algébrique du magnétisme contenu dans S : la valeur de M ne peut donc dépendre que des particules magnétiques coupées par la surface S.

Considérons un petit élément d'aimant de longueur s, de section transversale k^2, aimanté dans le sens de sa longueur, de sorte que la force de ses pôles soit égale à m. Le moment magnétique de ce petit aimant sera ms; son intensité d'aimantation, qui est le rapport du moment magnétique au volume, sera

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{I} = \frac{m}{k^2}.$$

Coupons ce petit aimant par la surface S, de façon que la direction d'aimantation fasse un angle ε' avec la normale menée extérieurement à la surface; si $d\mathrm{S}$ désigne l'aire de la section, on a

$$\text{(14)} \qquad k^2 = d\mathrm{S}\cos\varepsilon'.$$

Le pôle négatif $-m$ de l'aimant de cet aimant est à l'intérieur de la surface.

Si donc nous désignons par $d\mathrm{M}$ la partie du magnétisme libre intérieur à S qui est fournie par ce petit aimant,

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} d\mathrm{M} = -m = -\mathrm{I}k^2 \\ \qquad = -\mathrm{I}\cos\varepsilon'\, d\mathrm{S}. \end{cases}$$

Pour trouver la somme algébrique M de tout le magnétisme libre compris dans la surface fermée S, nous devons intégrer cette expression sur toute la surface fermée, de sorte que

$$\mathrm{M} = -\int\int \mathrm{I}\cos\varepsilon'\, d\mathrm{S},$$

ou bien, posant A, B, C pour les composantes de l'aimantation, l, m, n pour les cosinus directeurs de la normale extérieure,

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{M} = -\int\int (l\mathrm{A} + m\mathrm{B} + n\mathrm{C})\, d\mathrm{S};$$

nous retrouvons ainsi la valeur de l'intégrale qui forme le second terme de l'équation (11). La valeur de Q dans cette équation peut donc se

trouver en fonction des équations (12) et (16)

$$Q = 4\pi M - 4\pi M = 0, \tag{17}$$

c'est-à-dire que *l'intégrale de l'induction magnétique à travers une surface fermée quelconque est nulle.*

403. Si nous prenons pour surface fermée celle de l'élément différentiel $dx\,dy\,dz$, on a l'équation suivante :

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0. \tag{18}$$

C'est la condition solénoïdale; elle est toujours satisfaite par les composantes de l'induction magnétique.

Puisque la distribution de l'induction magnétique est solénoïdale, l'induction à travers une surface quelconque limitée par une courbe fermée ne dépend que de la forme et de la position de cette courbe et non de la forme de la surface.

404. On appelle *surfaces de nulle induction* des surfaces pour chaque point desquelles

$$la + mb + nc = 0. \tag{19}$$

L'intersection de deux pareilles surfaces est appelée *ligne d'induction*. Les conditions pour qu'une courbe s soit une ligne d'induction sont

$$\frac{1}{a}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{c}\frac{dz}{ds}. \tag{20}$$

Si, par chacun des points d'une courbe fermée, on mène une ligne d'induction, on forme une surface tubulaire appelée *tube d'induction*.

L'induction est la même à travers toutes les sections d'un pareil tube. Si cette induction est égale à l'unité, le tube est appelé un *tube d'induction unité*. Tout ce que dit Faraday (1) des lignes de force et des sphondyloïdes magnétiques est mathématiquement vrai, si on l'entend des lignes et des tubes d'induction magnétique.

En dehors de l'aimant, la force magnétique et l'induction magnétique sont identiques; mais, à l'intérieur de la masse, elles doivent être distinguées soigneusement. Dans un barreau rectiligne unifor-

(1) *Exp. Res.*, série XXVIII.

mément aimanté, la force magnétique due à l'aimant lui-même est dirigée de l'extrémité qui se tourne vers le nord et que nous appelons le *pôle positif*, à l'extrémité qui se dirige vers le sud et que nous appelons *pôle négatif*, et cela à l'intérieur de l'aimant aussi bien que dans l'espace extérieur.

Au contraire, l'induction magnétique est dirigée du pôle positif au pôle négatif à l'extérieur de l'aimant, du pôle négatif au pôle positif à l'intérieur, en sorte que les lignes ou tubes d'induction sont des figures fermées ou cycliques.

On verra plus clairement dans l'étude des phénomènes électromagnétiques l'importance de l'induction magnétique comme quantité physique. Quand on explore le champ magnétique au moyen d'un fil mobile, comme au § 3076 des *Exp. Res.* de Faraday, c'est l'induction magnétique, et non la force magnétique, qui est directement mesurée.

Potentiel vecteur de l'induction magnétique.

405. Nous avons montré au § 403 que l'induction magnétique à travers une surface limitée par une courbe fermée ne dépend que de cette courbe, et non de la forme de la surface qu'elle limite; on doit donc pouvoir déterminer l'induction à travers une courbe fermée par un procédé ne dépendant que de la nature de la courbe, et n'impliquant pas la construction d'une surface passant par la courbe.

C'est ce que l'on peut faire, en trouvant un vecteur $\mathfrak{A}$ lié à l'induction magnétique $\mathfrak{B}$, de telle manière que l'intégrale de $\mathfrak{A}$ prise le long de la courbe fermée soit égale à l'intégrale de $\mathfrak{B}$ prise sur toute surface limitée par la courbe fermée.

Si, au § 24, nous désignons par F, G, H, les composantes de $\mathfrak{A}$, et par a, b, c celles de $\mathfrak{B}$, nous trouvons, pour la relation qui doit exister entre ces composantes,

$$(21) \qquad a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \qquad b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \qquad c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$$

Le vecteur $\mathfrak{A}$, dont F, G, H sont les composantes, est appelé le *potentiel vecteur de l'induction magnétique*.

Si l'on place à l'origine des coordonnées une molécule magnétique dont le moment est m, dont la direction de l'axe d'aimantation est (λ,μ,ν), le potentiel en un point (x, y, z) situé à une distance r de l'origine est, d'après le § 387,

$$-m\left(\lambda\frac{d}{dx} + \mu\frac{d}{dy} + \nu\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{r},$$

et l'on a

$$c = m\left(\lambda\frac{d^2}{dx\,da} + \mu\frac{d^2}{dy\,da} + \nu\frac{d^2}{dz^2}\right)\frac{1}{r},$$

ce qui, d'après l'équation de Laplace, peut se mettre sous la forme

$$m\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{d}{da} - \nu\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{r} - m\frac{d}{dy}\left(\nu\frac{d}{dy} - \mu\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{r}.$$

Les quantités a, b peuvent être traitées de même; d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= m\left(\nu\frac{d}{dy} - \mu\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{r} \\ &= m\frac{\mu z - \nu y}{r^3}. \end{aligned}$$

De cette expression on tire par symétrie G et H. Nous voyons ainsi que le potentiel vecteur en un point donné, dû à une molécule aimantée placée à l'origine, est numériquement égal au moment magnétique de la molécule, divisé par le carré du rayon vecteur et multiplié par le sinus de l'angle compris entre l'axe d'aimantation et le rayon vecteur; la direction du potentiel vecteur est perpendiculaire au plan de l'axe d'aimantation et du rayon vecteur, dans un sens tel que, pour un œil regardant dans la direction positive de l'axe d'aimantation, le potentiel vecteur soit tracé dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.

Donc, étant donné un aimant de forme quelconque, dont A, B, C sont les composantes d'aimantation, placé au point (x, y, z), les composantes du potentiel vecteur en un point (ξ, η, ζ) sont

$$(22)\qquad \begin{cases} \mathrm{F} = \iiint\left(\mathrm{B}\dfrac{dp}{dz} - \mathrm{C}\dfrac{dp}{dy}\right)dx\,dy\,dz, \\ \mathrm{G} = \iiint\left(\mathrm{C}\dfrac{dp}{dx} - \mathrm{A}\dfrac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz, \\ \mathrm{H} = \iiint\left(\mathrm{A}\dfrac{dp}{dy} - \mathrm{B}\dfrac{dp}{dx}\right)dx\,dy\,dz, \end{cases}$$

où, pour abréger, on désigne par p l'inverse de la distance des points (x, y, z) et (ξ, η, ζ), et où les intégrations doivent être étendues à tout l'espace occupé par l'aimant.

406. Le potentiel scalaire, ou potentiel ordinaire de la force magnétique (§ 385), devient, quand on emploie la même notation,

$$(23)\qquad \mathrm{V} = \iiint\left(\mathrm{A}\frac{dp}{dx} + \mathrm{B}\frac{dp}{dy} + \mathrm{C}\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz.$$

En se souvenant que $\frac{dp}{dx} = -\frac{dp}{d\xi}$ et que l'intégrale

$$\iiint A\left(\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz$$

prend la valeur $-4\pi(A)$, quand le point (ξ,η,ζ) est compris dans les limites de l'intégration, et la valeur o, quand ce point n'y est pas compris, (A) étant la valeur de A au point (ξ,η,ζ), nous trouvons, pour valeur de la composante suivant les x de l'induction magnétique,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{dH}{d\eta}-\frac{dG}{d\zeta}\\ &= \iiint\left[A\left(\frac{d^2p}{dy\,d\eta}+\frac{d^2p}{dz\,d\zeta}\right)-B\frac{d^2p}{dx\,d\eta}-C\frac{d^2p}{dx\,d\zeta}\right]dx\,dy\,dz\\ &= -\frac{d}{d\xi}\iiint\left(A\frac{dp}{dx}+B\frac{dp}{dy}+C\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz\\ &\quad -\iiint A\left(\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme de cette expression est évidemment $-\frac{dV}{d\xi}$, ou a, la composante de la force magnétique.

La quantité sous le signe $\iiint$ dans le second terme est nulle pour tous les éléments de volume, sauf celui qui renferme le point (ξ,η,ζ). Si la valeur de A est (A) au point (ξ,η,ζ), il est facile de démontrer que la valeur du second terme est $4\pi(A)$, où (A) est évidemment nul pour tous les points extérieurs à l'aimant.

La valeur de la composante suivant les x de l'induction magnétique peut donc s'écrire

$$(25)\qquad a = \alpha + 4\pi(A),$$

équation identique à la première de celles qui sont données au § 400. Les équations, donnant b et c, sont aussi d'accord avec celles du § 400.

On a déjà vu que la force magnétique $\mathfrak{H}$ se déduit du potentiel magnétique scalaire V, en appliquant le symbole d'opération ∇ de Hamilton, en sorte que l'on peut écrire, comme au § 17,

$$(26)\qquad \mathfrak{H} = -\nabla V,$$

équation qui est vraie en dedans et en dehors de l'aimant.

On voit par l'étude actuelle que l'induction magnétique $\mathfrak{B}$ se déduit

du potentiel vecteur $\mathfrak{A}$ en appliquant le même opérateur ∇, et le résultat est vrai au dedans aussi bien qu'au dehors de l'aimant.

Quand on applique cet opérateur à une fonction vectorielle, on obtient en général une partie scalaire et un vecteur. La partie scalaire, que nous avons appelée la *convergence de la fonction vectorielle*, s'annule si la fonction vectorielle satisfait à la condition solénoïdale

$$\frac{dF}{d\xi} + \frac{dG}{d\eta} + \frac{dH}{d\zeta} = 0. \tag{27}$$

En différentiant les expressions de F, G, H dans les équations (22), on voit que cette condition est satisfaite par ces quantités.

Nous pouvons donc écrire la relation entre l'induction magnétique et son potentiel vecteur

$$\mathfrak{B} = \nabla \mathfrak{A},$$

ce que l'on peut exprimer en disant que l'induction magnétique est la version de son potentiel vecteur (*voir* § 25).

CHAPITRE III.

SOLÉNOIDES ET FEUILLETS MAGNÉTIQUES (1).

Formes particulières d'aimants.

407. Un filament de matière magnétique, long et mince comme un fil, étant aimanté longitudinalement en tous ses points, on appelle *puissance de l'aimant*, dans une section, le produit de l'aire par l'intensité moyenne d'aimantation dans cette section. Si l'on coupait le filament à cette section, sans en changer l'aimantation, on trouverait, après avoir séparé les deux surfaces, qu'elles ont des quantités de magnétisme superficiel égales et contraires, et numériquement égales pour chacune d'elles à la puissance de l'aimant dans la section.

Un filament de matière magnétique, aimanté de façon que la puissance soit la même en toutes les sections, en quelque point de la longueur qu'elles soient prises, est appelé un *solénoïde magnétique*.

Si m est la puissance d'un solénoïde, ds un élément de sa longueur, r la distance de cet élément à un point donné, et ε l'angle de r avec l'axe d'aimantation, le potentiel au point donné dû à l'élément est

$$\frac{m\,ds\cos\varepsilon}{r^2} = \frac{m}{r^2}\frac{dr}{ds}\,ds.$$

Intégrant cette expression par rapport à s, de façon à tenir compte de tous les éléments du solénoïde, le potentiel au point donné est

$$V = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

r_1 étant la distance de l'extrémité positive, et r_2 la distance de l'extrémité négative du solénoïde au point pour lequel on évalue V.

Donc le potentiel et, par suite, tous les effets magnétiques dus à un solénoïde ne dépendent que de sa puissance et de la position de ses extrémités, et pas du tout de la forme, droite ou courbe, qu'il affecte entre ces deux points.

---

(1) Voir *Théorie mathématique du Magnétisme*, de Sir W. Thomson, *Phil. Trans.*, 1850, ou *Reprint*.

Donc les extrémités d'un solénoïde peuvent être appelées rigoureusement ses pôles.

Si un solénoïde a la forme d'une courbe fermée, le potentiel qui lui est dû est nul en tout point, en sorte que ce solénoïde ne peut exercer aucune action magnétique, et que son aimantation même ne peut être constatée si on ne le rompt en un point et qu'on n'en écarte les extrémités.

Si un aimant peut être partagé en solénoïdes qui les uns ont la forme de courbes fermées, les autres ont leurs extrémités sur la surface extérieure de l'aimant, on dit que l'aimantation est solénoïdale; et, puisque l'action de l'aimant ne dépend que de celle des extrémités des solénoïdes, la distribution de la matière magnétique fictive est entièrement superficielle.

Donc la condition pour que l'aimantation soit solénoïdale est

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0,$$

où A, B, C sont les composantes de l'aimantation en un point quelconque de l'aimant.

408. Si, dans un filament magnétique aimanté longitudinalement, la puissance varie aux divers points de la longueur, on peut concevoir ce solénoïde comme formé d'un faisceau de solénoïdes de différentes longueurs, de telle sorte que la somme des puissances des solénoïdes qui passent dans une section donnée soit égale à la puissance du filament dans cette section. Donc un filament quelconque aimanté longitudinalement peut être appelé un *solénoïde complexe*.

Si m est la puissance d'un solénoïde complexe dans une section quelconque, le potentiel dû à l'action de ce solénoïde est

$$V = \int \frac{m}{r^2} \frac{dr}{ds}\, ds,$$

où m est variable,

$$V = \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} - \int \frac{1}{r} \frac{dm}{ds}\, ds.$$

Dans ce cas, on voit que, outre l'action des extrémités qui peuvent être de puissances différentes, il y a une action due à la distribution de matière magnétique fictive, répandue le long du filament avec une densité linéaire

$$\lambda = -\frac{dm}{ds}.$$

Feuillets magnétiques.

409. **Si un feuillet mince de matière magnétique est, en tous ses points, aimanté dans une direction normale à sa surface, on appelle *puissance magnétique du feuillet* en un endroit donné le produit de l'intensité d'aimantation par l'épaisseur de la couche en cet endroit.**

Si la couche a la même puissance partout, on l'appelle un *feuillet magnétique simple;* si sa puissance varie d'un point à un autre, on peut le considérer comme formé d'un certain nombre de feuillets simples superposés et empiétant les uns sur les autres. C'est ce que l'on appelle un *feuillet magnétique complexe.*

Soient dS un élément du feuillet au point Q, et Φ la puissance du feuillet. Le potentiel en un point P, dû à l'élément considéré du feuillet, est

$$dV = \Phi \frac{1}{r^2} dS \cos\varepsilon,$$

où ε est l'angle compris entre le vecteur QP ou r, et la normale à la surface menée du côté positif.

Mais, si $d\omega$ est l'angle solide sous-tendu par dS au point P,

$$r^2 d\omega = dS \cos\varepsilon;$$

d'où

$$dV = \Phi d\omega,$$

et, par suite, dans le cas d'un feuillet magnétique simple,

$$V = \Phi\omega,$$

c'est-à-dire que *le potentiel en un point quelconque dû à un feuillet magnétique est égal au produit de sa puissance par l'angle solide sous-tendu au point* P *par son contour* (1).

410. On peut obtenir le même résultat d'une autre manière, en supposant le feuillet magnétique placé dans un champ de force magnétique quelconque, et déterminant l'énergie potentielle due à cette position.

Si V est le potentiel sur l'élément dS, l'énergie due à cet élément est

$$\Phi\left(l\frac{dV}{dx} + m\frac{dV}{dy} + n\frac{dV}{dz}\right) dS,$$

(1) Ce théorème est dû à GAUSS, *Théorie générale du magnétisme terrestre,* § 38.

c'est-à-dire *le produit de la puissance de l'enveloppe par la partie de l'intégrale de surface de* V *relative à l'élément* d*S du feuillet.*

Donc, intégrant par rapport à tous ces éléments, l'énergie due à la position du feuillet dans le champ est égale au produit de sa puissance par l'intégrale de l'induction magnétique prise pour toute l'étendue de sa surface.

Puisque cette intégrale est la même pour deux surfaces quelconques limitées au même contour, et ne comprenant pas entre elles de centre de force, l'action du feuillet magnétique ne dépend que de son contour.

Supposons que le champ de force soit dû à un pôle magnétique de force m. Nous avons vu (§ 76, *Cor.*) que l'intégrale prise sur une surface limitée par un contour donné est le produit de la force du pôle par l'angle sous-tendu en ce pôle par le contour. Donc l'énergie due à l'action mutuelle du pôle et du feuillet est

$$\Phi m \omega,$$

ce qui (d'après le théorème de Green, § 100) est égal au produit de la force du pôle par le potentiel du feuillet sur le point où est placé le pôle. Le potentiel dû au feuillet est donc

$$\Phi \omega.$$

411. Si un pôle magnétique m part d'un point situé sur la face négative d'un feuillet magnétique, et, suivant dans l'espace un chemin quelconque, revient en tournant autour du contour en un point voisin de son point de départ, mais situé sur le côté positif du feuillet, l'angle sous-tendu varie constamment et croît de 4π pendant que s'accomplit le déplacement. Le travail effectué par le pôle est $4\pi\Phi m$, et le potentiel en un point quelconque de la face positive du feuillet excède de $4\pi\Phi$ le potentiel en un point voisin pris sur la face négative.

Si un feuillet magnétique a la forme d'une surface fermée, le potentiel est nul en tout point extérieur à la surface, et il est égal à $4\pi\Phi$ en tout point intérieur, étant d'ailleurs positif si l'on prend le côté positif vers l'intérieur de l'enveloppe. Donc un pareil feuillet n'exerce aucune action sur un aimant.

412. Si l'on peut partager un aimant en une série de feuillets magnétiques simples, les uns fermés, les autres ayant leur contour sur la surface de l'aimant, on dit que la distribution du magnétisme est lamellaire. Soit φ la somme des forces de toutes les enveloppes que traverse un point pour aller d'un point donné à un point (x, y, z) par un chemin compris à l'intérieur de l'aimant; les conditions pour que

l'aimantation soit lamellaire sont

$$A = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad B = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad C = \frac{d\varphi}{dz}.$$

La quantité φ qui détermine complètement l'aimantation en un point quelconque peut être appelée le *potentiel d'aimantation*. Il faut bien se garder de la confondre avec le potentiel magnétique.

413. Si un aimant peut se décomposer en feuillets magnétiques complexes, on dit qu'il a une distribution magnétique lamellaire complexe. La condition d'une pareille distribution est que l'on puisse mener un système de surfaces coupant orthogonalement les lignes d'aimantation. Cette condition s'exprime par l'équation bien connue

$$A\left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}\right) + B\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right) + C\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right) = 0.$$

Forme du potentiel des aimants solénoïdaux et lamellaires.

414. L'expression générale du potentiel scalaire d'un aimant est

$$V = \int\int\int \left(A\frac{dp}{dx} + B\frac{dp}{dy} + C\frac{dp}{dz}\right) dx\,dy\,dz,$$

où p désigne le potentiel au point (x, y, z) dû à l'unité du pôle magnétique placé au point (ξ, η, ζ), ou, en d'autres termes, l'inverse de la distance entre le point (ξ, η, ζ), dont on mesure le potentiel, et le point (x, y, z), où se trouve l'élément d'aimant auquel le potentiel est dû.

Cette quantité peut s'intégrer par parties, comme aux § 96 et 386,

$$V = \int\int p(Al + Bm + Cn)\,dS - \int\int\int p\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right) dx\,dy\,dz,$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à l'élément dS de la surface de l'aimant.

Si l'aimant est solénoïdal, l'expression sous le signe $\int\int\int$ est nulle pour tous les points compris à l'intérieur de l'aimant ; l'intégrale triple est donc nulle, et le potentiel scalaire est donné pour un point intérieur ou pour un point extérieur à l'aimant, par l'intégrale double qui forme le premier terme.

Le potentiel scalaire d'un aimant solénoïdal est donc complètement

déterminé, quand on connaît pour chaque point de la surface la composante normale de l'aimantation ; et il ne dépend point de la forme des solénoïdes à l'intérieur de l'aimant.

415. Dans le cas d'un aimant lamellaire, l'aimantation est déterminée par le potentiel d'aimantation φ, et l'on a

$$A = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad B = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad C = \frac{d\varphi}{dz}.$$

L'expression de V peut donc s'écrire

$$V = \iiint \left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{dp}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dp}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dp}{dz} \right) dx\,dy\,dz.$$

Intégrant par parties cette expression, on a

$$V = \iint \varphi \left(l\frac{dp}{dx} + m\frac{dp}{dy} + n\frac{dp}{dz} \right) dS - \iiint \varphi \left(\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d^2p}{dy^2} + \frac{d^2p}{dz^2} \right) dx\,dy\,dz.$$

Le second terme est nul, à moins que le point (ξ, η, ζ) ne soit compris à l'intérieur de l'aimant, auquel cas il est égal à $4\pi(\varphi)$, (φ) étant la valeur de φ au point (ξ, η, ζ). L'intégrale de surface peut s'exprimer en fonction de la ligne r qui joint les points (x, y, z) et (ξ, η, ζ), et de l'angle θ que fait cette ligne avec la normale menée extérieurement à dS, de sorte que le potentiel peut s'écrire

$$V = \iint \frac{1}{r^2} \varphi \cos\theta\, dS + 4\pi(\varphi),$$

le second terme étant nul si le point (ξ, η, ζ) n'est pas compris à l'intérieur de l'aimant.

Le potentiel V représenté par cette expression est continu, même à la surface de l'aimant où φ devient subitement nul ; car, si l'on pose

$$\Omega = \iint \frac{1}{r^2} \varphi \cos\theta\, dS,$$

et si Ω_1 est la valeur de Ω pour un point voisin de la surface à l'intérieur de l'aimant, et Ω_2 la valeur de Ω pour un point voisin du premier, mais situé à l'extérieur de la surface,

$$\Omega_2 = \Omega_1 + 4\pi(\varphi)$$

ou

$$V_2 = V_1.$$

La quantité Ω n'est pas continue à la surface.

Les composantes de l'induction magnétique sont liées à Ω par les relations

$$a = -\frac{d\Omega}{dx}, \qquad b = -\frac{d\Omega}{dy}, \qquad c = -\frac{d\Omega}{dz}.$$

416. Dans le cas d'une distribution magnétique lamellaire, nous pouvons aussi simplifier le potentiel vecteur de l'induction magnétique.

Sa composante suivant l'axe des x peut s'écrire

$$F = \int\int\int \left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{dp}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{dn}{dy}\right) dx\,dy\,dz.$$

En intégrant par parties, on peut mettre cette expression sous la forme d'une intégrale de surface,

$$F = \int\int \varphi\left(m\frac{dp}{dz} - n\frac{dp}{dy}\right) dS$$

ou bien

$$F = \int\int p\left(m\frac{d\varphi}{dy} - n\frac{d\varphi}{dz}\right) dS.$$

Les autres composantes de potentiel vecteur peuvent se déduire de ces expressions, en y faisant des substitutions convenables.

Des angles solides.

417. Nous avons déjà démontré qu'en un point P le potentiel, dû à une enveloppe magnétique, est égal au produit de l'angle solide sous-tendu par le contour de l'enveloppe par la force de cette enveloppe. Comme nous aurons l'occasion de parler d'angles solides dans la théorie des courants électriques, nous allons expliquer maintenant comment on peut les mesurer.

Définition. — L'angle solide sous-tendu en un point donné par une courbe fermée a pour mesure l'aire interceptée sur une sphère de rayon unité ayant son centre au point donné par le rayon vecteur issu de ce point et décrivant la courbe fermée. Cette aire doit être comptée positivement ou négativement, suivant que du point donné on la voit à gauche ou à droite du chemin décrit par le rayon vecteur.

Soient (ξ, τ_i, ζ) le point donné, (x, y, z) un point pris sur la courbe. Les coordonnées x, y, z sont des fonctions de s, la longueur de l'arc de courbe comptée à partir d'un certain point. Ce sont des fonctions périodiques de s qui repassent par les mêmes valeurs toutes les fois que s s'est accru d'une longueur entière de la courbe fermée.

Nous pouvons calculer l'angle solide ω directement en partant de la définition. Employant des coordonnées sphériques ayant leur centre au point (ξ, η, ζ) et posant

$$x - \xi = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y - \eta_1 = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z - \zeta = r\cos\theta,$$

nous trouvons l'aire d'une courbe quelconque en intégrant

$$\omega = \int (1 - \cos\theta)\, d\varphi$$

ou en employant des coordonnées rectangulaires

$$\omega = \int d\varphi - \int_0^s \frac{z - \zeta}{r[(x-\zeta)^2 + (y-\eta_1)^2]} \left[(x - \xi)\frac{dy}{ds} - (y - \eta_1)\frac{dx}{ds}\right] ds,$$

l'intégration étant étendue tout le long de la courbe s. Si l'axe des z passe une fois à travers la courbe fermée, le premier terme est 2π. Si l'axe des z ne passe pas à travers la courbe, ce terme est nul.

418. Cette méthode, pour calculer des angles solides, suppose un choix d'axes, ce qui est arbitraire dans une certaine mesure, et elle ne dépend pas seulement de la courbe fermée. Aussi la méthode suivante, qui ne suppose la construction d'aucune surface, peut-elle être donnée en raison de la propriété géométrique qu'elle met en usage.

En même temps que le rayon vecteur partant du point donné décrit la courbe fermée, faisons rouler sur cette courbe un plan passant par le point donné, de façon qu'il soit tangent successivement en tous les points de la courbe. Menons par le point donné et perpendiculairement à ce plan une ligne ayant l'unité de longueur. A mesure que le plan roule sur la courbe fermée, l'extrémité de la perpendiculaire décrit une autre courbe fermée : soit σ la longueur de cette seconde courbe. L'angle solide sous-tendu par la première est

$$\omega = 2\pi - \sigma,$$

ainsi qu'il résulte du théorème bien connu : *L'aire d'une courbe tracée sur une sphère de rayon un, augmentée de la longueur de la courbe polaire, est égale à une circonférence de grand cercle de la sphère.*

Cette construction est souvent commode pour calculer l'angle solide sous-tendu par une figure rectiligne ; mais, pour notre objet qui est de nous faire une idée nette des phénomènes physiques, nous préférerons la méthode suivante, où n'est employée aucune construction qui ne découle des données physiques du problème.

419. On donne dans l'espace une courbe fermée s, et l'on doit déterminer l'angle solide sous-tendu par cette courbe en un point donné P.

Si nous considérons cet angle solide comme le potentiel d'une enveloppe magnétique ayant pour contour la courbe fermée, nous devons le définir comme le travail effectué contre la force magnétique par un pôle magnétique unité venant depuis une distance infinie jusqu'au point P. Si donc σ est le chemin décrit par le pôle en s'approchant de P, le potentiel doit être donné par l'intégrale prise le long de ce chemin. Il doit aussi être le résultat de l'intégration le long de la courbe s. Donc la forme qui convient à l'expression de l'angle solide doit être celle d'une double intégration par rapport à s et à σ.

Si P est à une distance infinie, l'angle solide est évidemment nul. A mesure que le point P s'approche, la courbe fermée, vue de ce point mobile, semble s'élargir, et l'on peut concevoir l'angle solide total comme engendré par le mouvement apparent des divers éléments de la courbe fermée, à mesure que le point mobile s'approche.

Quand le point P vient en P′, parcourant l'élément $d\sigma$, l'élément QQ′ de la courbe fermée, que nous désignons par ds, change de position relativement à P, et la ligne qui correspond à QQ′ sur la sphère de rayon un décrit sur cette surface sphérique une aire que l'on peut représenter par

$$d\omega = \Pi\, ds\, d\sigma. \tag{1}$$

Pour trouver Π, supposons P fixe pendant que la courbe fermée se meut parallèlement à elle-même d'une longueur $d\sigma$, égale à PP′, mais dirigée en sens contraire. Le mouvement relatif du point P sera le même que dans la réalité.

Pendant ce mouvement, l'élément QQ′ décrit une aire en forme de parallélogramme, dont les côtés sont égaux et parallèles à QQ′ et PP′. Si nous construisons une pyramide ayant ce parallélogramme pour base et le point P pour sommet, l'angle solide de cette pyramide sera l'accroissement $d\omega$ que nous cherchons.

Pour déterminer cet angle solide, soient θ et θ' les angles que ds et $d\sigma$ font avec PQ, et soit φ l'angle des plans de ces deux angles. L'aire de la projection du parallélogramme $d\sigma\, ds$ sur un plan perpendiculaire (*fig.* 3) à PQ ou r est

$$ds\, d\sigma \sin\theta \sin\theta' \sin\varphi;$$

et, puisque cette expression est égale à $r^2\,d\omega$, nous trouvons

$$(2) \qquad d\omega = \Pi\,ds\,d\sigma = \frac{1}{r^2}\sin\theta\sin\theta'\sin\varphi\,ds\,d\sigma;$$

d'où

$$(3) \qquad \Pi = \frac{1}{r^2}\sin\theta\sin\theta'\sin\varphi.$$

420. Nous pouvons exprimer θ, θ' et φ en fonction de r et ses coefficients différentiels relatifs à s et σ, car

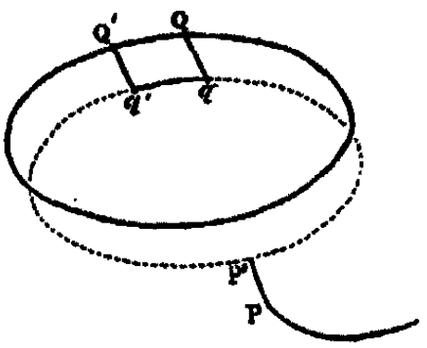
$$(4) \quad \cos\theta = \frac{dr}{ds}, \qquad \cos\theta' = \frac{dr}{d\sigma} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi = r\,\frac{d^2r}{ds\,d\sigma}.$$

Nous trouvons ainsi la valeur suivante de Π^2 :

$$(5) \qquad \Pi^2 = \frac{1}{r^4}\left[1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right] - \frac{1}{r^4}\left(\frac{d^2r}{d\sigma\,ds}\right)^2.$$

Nous pouvons obtenir une troisième expression de Π en coordonnées

Fig. 3.



rectangulaires, en considérant la pyramide dont l'angle solide est $d\omega$ et dont l'axe est r : son volume est

$$\tfrac{1}{3}r^3\,d\omega = \tfrac{1}{3}r^3\,\Pi\,ds\,d\sigma.$$

Mais le volume de la pyramide peut aussi s'exprimer en fonction des projections de r, ds et $d\sigma$ sur les axes des x, des y et des z : c'est le tiers du déterminant de ces neuf projections; nous trouvons ainsi, pour valeur de Π,

$$(6) \qquad \Pi = \frac{1}{r^3}\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \dfrac{d\xi}{d\sigma} & \dfrac{d\eta}{d\sigma} & \dfrac{d\zeta}{d\sigma} \\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \end{vmatrix}.$$

Cette expression donne la valeur de Π, sans l'ambiguïté de signe qu'introduit l'équation (5).

421. La valeur de l'angle solide ω sous-tendu au point P par la courbe fermée peut alors s'écrire

$$\omega = \int\int \Pi \, d\sigma \, ds + \omega_0, \tag{7}$$

où l'intégration par rapport à s doit être étendue tout le long de la courbe fermée, et l'intégration relative à σ depuis un point quelconque A pris sur la courbe suivie par le pôle mobile jusqu'au point P. La constante ω_0 est la valeur de l'angle solide au point A; elle est nulle si le point A est à une distance infinie de la courbe fermée.

La valeur de ω en un point quelconque P ne dépend pas de la forme de la courbe entre A et P, pourvu que cette courbe ne traverse pas l'enveloppe magnétique elle-même. Supposons que l'enveloppe soit infiniment mince, et soient P et P′ deux points voisins situés P sur la surface positive, P′ sur la surface négative de l'enveloppe. Les courbes AP et AP′ sont forcément de part et d'autre du contour de l'enveloppe, de sorte que PAP′ constitue avec la ligne infiniment courte PP′ une courbe fermée entrelacée avec le contour. La valeur de ω en P dépasse sa valeur en P′ de 4π, c'est-à-dire de la surface d'une sphère de rayon égal à l'unité.

Donc, si l'on trace une courbe fermée qui traverse une seule fois l'enveloppe, qui, en d'autres termes, ne s'entrelace qu'une fois avec le contour de l'enveloppe, la valeur de l'intégrale $\int\int \Pi \, ds \, d\sigma$ prise le long des deux courbes est égale à 4π.

Cette intégrale, considérée comme ne dépendant que de la courbe fermée s et de la courbe arbitraire AP, est un exemple d'une fonction à valeurs multiples; car, lorsqu'on passe du point A au point P en suivant différents chemins, l'intégrale prend différentes valeurs suivant le nombre de fois que la courbe AP s'enlace autour de la courbe s.

Si une courbe joignant les points A et P peut être transformée en une autre d'un mouvement continu, sans couper la courbe fermée s, l'intégrale a la même valeur pour ces deux courbes; mais si, pendant la transformation, on coupe n fois la courbe fermée, les valeurs de l'intégrale diffèrent de $4\pi n$.

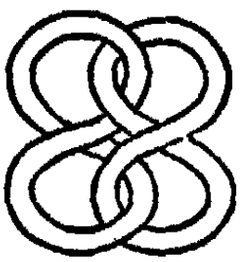
Si σ et s sont deux courbes fermées quelconques de l'espace, non

entrelacées, la valeur de l'intégrale prise une fois sur chacune d'elles est nulle.

Si elles sont entrelacées n fois dans le même sens, la valeur de l'intégrale est $4\pi n$. Mais il est possible que deux courbes soient entrelacées alternativement en sens contraires, de façon qu'elles soient invariablement liées l'une à l'autre et que la valeur de l'intégrale soit cependant zéro (voir *fig.* 4).

C'est précisément la découverte de cette intégrale exprimant le

Fig. 4.



travail effectué par un pôle magnétique qui décrit une courbe fermée en présence d'un courant électrique fermé, et indiquant la relation géométrique de ces deux courbes fermées, qui amena Gauss à déplorer le peu de progrès faits par la Géométrie de position, depuis l'époque de Leibnitz, d'Euler et de Vandermonde. Nous avons maintenant à signaler quelques progrès principalement dus à Riemann, Helmholtz et Listing.

122. Étudions maintenant le résultat obtenu en intégrant par rapport à s le long de la courbe fermée. Un des termes de Π, dans l'équation (7), est

$$\frac{\xi - x}{r^3}\frac{d\eta}{d\tau}\frac{dz}{ds} = \frac{d\eta}{d\tau}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\frac{dz}{ds}\right). \tag{8}$$

Si nous écrivons, pour abréger,

$$\mathrm{F} = \int \frac{1}{r}\frac{dx}{ds}\,ds, \qquad \mathrm{G} = \int \frac{1}{r}\frac{dy}{ds}\,ds, \qquad \mathrm{H} = \int \frac{1}{r}\frac{dz}{ds}\,ds, \tag{9}$$

ces intégrales étant prises une fois le long de la courbe fermée s, ce terme de Π peut s'écrire

$$\frac{d\eta}{d\tau}\frac{d^2\mathrm{H}}{d\xi\,ds},$$

et le terme correspondant de $\int \Pi\,ds$ sera

$$\frac{d\eta}{d\tau}\frac{d\mathrm{H}}{d\xi}.$$

Réunissant tous les termes de Π, nous pouvons écrire

$$(10)\quad \begin{cases} -\dfrac{d\omega}{d\sigma} = -\int \Pi\, ds = \left(\dfrac{dH}{d\eta} - \dfrac{dG}{d\zeta}\right)\dfrac{d\xi}{d\sigma} \\ \qquad + \left(\dfrac{dF}{d\zeta} - \dfrac{dH}{d\xi}\right)\dfrac{d\eta}{d\sigma} + \left(\dfrac{dG}{d\xi} - \dfrac{dF}{d\eta}\right)\dfrac{d\zeta}{d\sigma}. \end{cases}$$

Cette quantité est évidemment le rapport dans lequel décroît le potentiel magnétique ω, quand on suit la courbe σ, ou, en d'autres termes, c'est la force magnétique dans la direction de $d\sigma$.

En prenant successivement $d\sigma$ dans la direction des axes des x, des y et des z, nous obtenons pour valeurs des composantes de la force magnétique

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{d\omega}{d\xi} = \dfrac{dH}{d\eta} - \dfrac{dG}{d\zeta}, \\ \beta = -\dfrac{d\omega}{d\eta} = \dfrac{dF}{d\zeta} - \dfrac{dH}{d\xi}, \\ \gamma = -\dfrac{d\omega}{d\zeta} = \dfrac{dG}{d\xi} - \dfrac{dF}{d\eta}. \end{cases}$$

Les quantités F, G, H sont les composantes du potentiel vecteur du feuillet magnétique, dont la puissance est égale à l'unité et dont le contour est la courbe s. D'ailleurs, elles ne sont pas comme le potentiel scalaire ω des fonctions ayant une série de valeurs, mais elles sont parfaitement déterminées en chaque point de l'espace.

On peut trouver, par la construction géométrique suivante, le potentiel-vecteur en un point P, dû à un feuillet magnétique limité par une courbe fermée :

Soit un point Q mobile le long de la courbe fermée avec une vitesse qui est constamment égale à la distance a au point P ; soit un deuxième point R partant d'un point fixe A avec une vitesse qui est toujours parallèle à celle de Q, mais qui est toujours égale à l'unité. Quand le point Q a décrit une fois la courbe fermée, joignons AR : la ligne AR représente en grandeur numérique et en direction le potentiel vecteur au point P dû à la courbe fermée.

Énergie potentielle d'un feuillet magnétique placé dans un champ de force magnétique.

423. Nous avons déjà montré au § 410 que l'énergie potentielle d'un feuillet magnétique de puissance φ, placée au milieu d'un champ

magnétique de potentiel V, est

$$(12) \qquad M = \varphi \int\int \left(l \frac{dV}{dx} + m \frac{dV}{dy} + n \frac{dV}{dz} \right) dS,$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale menée au feuillet du côté positif, et où l'intégrale est étendue à toute la surface du feuillet.

Or cette intégrale de surface peut être transformée en intégrale de ligne au moyen du potentiel vecteur du champ magnétique; nous pouvons écrire

$$(13) \qquad M = -\varphi \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

l'intégration étant étendue une fois le long de la courbe fermée qui forme le contour du feuillet magnétique, la direction de ds étant en sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre pour un observateur placé du côté positif de l'enveloppe.

Si maintenant nous supposons que ce champ magnétique soit dû à un autre feuillet de puissance φ', nous pouvons déterminer directement la valeur de F au moyen des résultats du § 416 ou du § 405. Si l', m', n' sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément dS' du second feuillet, nous avons

$$F = \varphi' \int\int \left(m' \frac{d}{dz'} \frac{1}{r} - n' \frac{d}{dy'} \frac{1}{r} \right) dS',$$

où r est la distance de l'élément dS' à un point pris sur la limite du premier feuillet.

Or cette intégrale de surface peut être transformée en une intégrale de ligne étendue le long du contour du second feuillet, qui est

$$(14) \qquad \varphi' \int \frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} ds'.$$

De même

$$G = \varphi' \int \frac{1}{r} \frac{dy'}{ds'} ds',$$

$$H = \varphi' \int \frac{1}{r} \frac{dz'}{ds'} ds'.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de M, nous trouvons

$$(15) \qquad M = -\varphi\varphi' \int\int \frac{1}{r} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \right) ds\, ds',$$

l'intégration devant s'étendre une fois le long de s et une fois le long

de s'. Cette expression donne l'énergie potentielle due à l'action mutuelle des deux feuillets; elle reste la même, ce qui devait être quand on échange s et s'. Quand la puissance de chacune des enveloppes est égale à l'unité, cette expression, changée de signe, est appelée *potentiel des deux courbes fermées s et s'*. C'est une quantité très importante dans la théorie des courants. Si nous désignons par ε l'angle compris entre les directions des éléments ds et ds', le potentiel de s et s' peut s'écrire

$$\int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

quantité qui est évidemment de la dimension d'une ligne.

CHAPITRE IV.

AIMANTATION INDUITE.

424. Jusqu'ici nous avons considéré la distribution de l'aimantation dans l'aimant comme une des données explicites de la question. Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la question de savoir si cette aimantation est permanente ou temporaire, si ce n'est dans les parties du raisonnement où nous supposions l'aimant brisé en petits morceaux, ou bien de petites parties enlevées de l'aimant de façon à ne changer l'aimantation en aucun endroit.

Nous devons maintenant considérer l'aimantation des corps au point de vue de sa production ou de sa modification. On constate qu'un barreau de fer, tenu parallèlement à la direction de la force magnétique terrestre, devient magnétique, et que ses pôles sont disposés en sens inverse de ceux de la Terre, c'est-à-dire dans le même sens que ceux d'une aiguille de boussole en équilibre stable.

On constate qu'un morceau de fer doux, placé dans un champ magnétique, présente des propriétés magnétiques. S'il est placé dans une partie de champ où la force magnétique est grande, par exemple entre les pôles d'un aimant en fer à cheval, son aimantation devient interne. S'il est éloigné du champ magnétique, ses propriétés magnétiques s'affaiblissent beaucoup ou disparaissent entièrement. Lorsque les propriétés magnétiques du fer dépendent entièrement de la force magnétique du champ où il est placé et disparaissent quand il est retiré de ce champ, on l'appelle *fer doux*. Du fer doux au sens magnétique est aussi doux au sens littéral : il est facile à courber et à déformer d'une manière permanente, il est difficile à rompre.

Du fer qui garde ses propriétés magnétiques après avoir été retiré du champ magnétique est appelé *fer dur;* il ne prend pas l'état magnétique aussi facilement que le fer doux. Le martelage ou tout autre sorte de vibration permet au fer dur de prendre plus aisément l'état magnétique lorsqu'il est soumis à l'influence d'une force magnétique, et de le perdre plus facilement quand la force magnétique est supprimée. Le fer, qui est dur au sens magnétique, est aussi plus raide à la flexion et plus sujet à se rompre.

Le martelage, le laminage, l'étirage, le refroidissement brusque tendent à durcir le fer; le recuit tend à l'adoucir.

Les différences magnétiques et mécaniques entre les aciers de trempe douce ou aigre sont bien plus grandes qu'entre les fers doux ou durs. L'acier doux est presque aussi facile à aimanter et à désaimanter que le fer; l'acier le plus aigre est la meilleure matière quand on veut faire des aimants permanents.

La fonte, quoique renfermant plus de charbon que l'acier, ne conserve pas aussi bien l'aimantation.

Si l'on pouvait faire un aimant tel que la distribution de son magnétisme ne fût altérée par aucune force magnétique agissant sur lui, on pourrait l'appeler un *corps à aimantation fixe*. On ne connaît d'autre corps satisfaisant à cette condition qu'un circuit métallique conducteur traversé par un courant électrique constant.

Un pareil circuit présente des propriétés magnétiques et, par suite, peut être appelé un *électro-aimant;* mais ces propriétés magnétiques ne sont pas affectées par les autres forces magnétiques du champ. Nous reviendrons sur ce point dans la IVe Partie.

On constate que tous les autres aimants, qu'ils soient faits d'acier trempé ou de pierre d'aimant, sont affectés par toute force magnétique qui agit sur eux.

Il est commode pour les recherches scientifiques de distinguer entre l'aimantation permanente et l'aimantation temporaire. Par définition, l'aimantation permanente est celle qui existe indépendamment de la force magnétique; l'aimantation temporaire est celle qui dépend de cette force. Nous devons observer toutefois que cette distinction n'est pas fondée sur la connaissance de la nature intime des substances magnétiques; ce n'est que l'expression d'une hypothèse introduite pour pouvoir appliquer le calcul à ces phénomènes. Nous reviendrons au Chapitre VI sur la *Théorie physique de l'aimantation*.

425. Nous allons maintenant étudier l'aimantation temporaire, en partant de l'hypothèse que l'aimantation d'une molécule de la substance ne dépend que de la force magnétique agissant sur cette molécule. Cette force peut être due en partie à des causes extérieures, en partie à l'aimantation temporaire des molécules voisines.

On dit qu'un corps, ainsi aimanté par l'action d'une force magnétique, est aimanté par induction et que son aimantation est induite par la force magnétisante.

L'aimantation induite par une force magnétisante donnée varie pour les diverses substances. Elle est la plus grande pour le fer le plus

pur et le plus doux, le rapport de l'aimantation à la force magnétique peut y atteindre la valeur 3a ou même 45 (1).

D'autres substances, telles que le nickel et le cobalt, peuvent prendre une aimantation moindre, et l'on observe des indices de polarité dans toutes les substances, pourvu qu'on les soumette à une force magnétique suffisante.

Si l'aimantation est dans le même sens que la force magnétisante, comme c'est le cas pour le fer, le nickel et le cobalt, etc., la substance est appelée *paramagnétique*, *ferromagnétique* ou, plus simplement, *magnétique*. Si l'aimantation induite est en sens inverse de la force magnétisante, comme dans le bismuth, etc., la substance est dite *diamagnétique*. Dans toutes ces dernières substances, le rapport de l'aimantation à la force magnétique qui la produit est toujours très faible : il est seulement $-\frac{1}{100000}$ pour le bismuth, qui est la substance la plus diamagnétique connue.

Dans les corps cristallisés, soumis à des efforts mécaniques, ou organisés, la direction de l'aimantation ne coïncide pas toujours avec celle de la force magnétique qui la produit. La relation entre les composantes de l'aimantation, rapportée à trois axes fixes dans le corps et les composantes de la force magnétique, peut s'exprimer par un système de trois équations linéaires. Nous montrerons que des neuf coefficients qui figurent dans ces équations, six seulement sont indépendants. Les phénomènes relatifs aux corps de cette espèce sont classés sous le nom de *phénomènes magnétocristallins*.

Placés dans un champ de force, les cristaux tendent à se placer de façon que leur axe de plus grande induction paramagnétique ou de moindre induction diamagnétique soit parallèle aux lignes de force. (*Voir* le § 435.)

Dans le fer doux, la direction de l'aimantation coïncide en chaque point avec celle de la force magnétique et, pour de faibles valeurs de la force magnétique, lui est à peu près proportionnelle. Si la force magnétique croît, l'aimantation croît plus lentement, et il semblerait résulter d'expériences décrites au Chapitre VI qu'il y a pour l'aimantation une valeur limite qui ne peut être dépassée, quelle que soit la force magnétique.

Dans l'exposé qui suit de la *Théorie du magnétisme induit*, nous supposerons d'abord que l'aimantation est proportionnelle à la force magnétique et dans la même direction.

---

(1) Thalén, *Nova Acta Soc. Reg. Sc.*, Upsal, 1863.

Définition du coefficient d'aimantation induite.

426. Soit $\mathfrak{H}$ la force magnétique en un point du corps, définie comme au § 398, et soit $\mathfrak{I}$ l'aimantation en ce point : on appelle *coefficient d'aimantation induite* le rapport de $\mathfrak{I}$ à $\mathfrak{H}$.

Désignant ce coefficient par $\varkappa$, l'équation fondamentale du magnétisme induit est

$$\mathfrak{I} = \varkappa \mathfrak{H}.$$

Le coefficient $\varkappa$ est positif pour le fer et les substances paramagnétiques, négatif pour le bismuth et les substances diamagnétiques. Il atteint la valeur 32 pour le fer, et il est, dit-on, considérable pour le nickel et le cobalt; mais, dans tous les autres cas, c'est une quantité très petite et inférieure à 0,00001.

La force $\mathfrak{H}$ est due partie à l'action des aimants extérieurs au corps aimanté par induction, partie à l'aimantation induite du corps lui-même. Ces deux parties satisfont à la condition d'avoir un potentiel.

427. Soient V le potentiel dû au magnétisme extérieur au corps, Ω celui qui est dû à l'aimantation induite; si U est le potentiel effectif dû aux deux causes simultanément

$$U = V + \Omega. \tag{2}$$

Soient α, β, γ les composantes de la force magnétique $\mathfrak{H}$ suivant les directions des x, des y et des z; soient A, B, C celle de l'aimantation $\mathfrak{I}$; alors, d'après l'équation (1),

$$\begin{cases} A = \varkappa\alpha, \\ B = \varkappa\beta, \\ C = \varkappa\gamma. \end{cases} \tag{3}$$

Multipliant ces équations par dx, dy, dz respectivement et ajoutant, nous avons

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = \varkappa(\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz);$$

mais, puisque α, β, γ sont dérivés d'un potentiel U, le second membre peut s'écrire $-\varkappa\,dU$.

Si donc $\varkappa$ est constant dans toute l'étendue du corps (1), le premier membre doit aussi être la différentielle exacte d'une fonction de $x, y,$

(1) Si $\varkappa$ est variable, l'aimantation satisfait seulement à l'équation du § 413.

ε, que nous appellerons φ, et l'équation devient

$$d\varphi = -\varkappa dU; \tag{4}$$

d'où

$$A = \frac{d\varphi}{dx}, \quad B = \frac{d\varphi}{dy}, \quad C = \frac{d\varphi}{dz}. \tag{5}$$

L'aimantation est donc lamellaire, suivant la définition du § 412.

On a vu au § 386 que, si ρ est la densité de volume du magnétisme libre,

$$\rho = -\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right),$$

qui devient, en vertu de l'équation (3),

$$\rho = -\varkappa\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right);$$

mais, par le § 77,

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 4\pi\rho,$$

d'où

$$(1 + 4\pi\varkappa)\rho = 0$$

ou

$$\rho = 0, \tag{6}$$

pour toute la substance. L'aimantation est donc solénoïdale en même temps que lamellaire (*voir* § 407).

Il n'y a donc point de magnétisme libre, sauf à la surface qui limite le corps. Si ν est la normale à la surface, menée vers l'intérieur, la densité superficielle magnétique est

$$\sigma = -\frac{d\varphi}{d\nu}. \tag{7}$$

Le potentiel Ω dû à cette aimantation peut donc s'obtenir par l'intégrale de surface

$$\Omega = \int\int \frac{\sigma}{r}\, dS. \tag{8}$$

La valeur de Ω est finie et continue, et satisfait à l'équation de Laplace en tout point intérieur ou extérieur à la surface. Si nous distinguons par un accent les valeurs de Ω extérieures à la surface, et si ν' est la normale menée vers l'extérieur, nous avons à la surface

$$\Omega = \Omega', \tag{9}$$

$$\frac{d\Omega}{d\nu} + \frac{d\Omega'}{d\nu'} = -4\pi\sigma,$$

d'après le § 78;

$$= 4\pi \frac{d\varphi}{d\nu},$$

d'après (7);

$$= -4\pi\varkappa \frac{dU}{d\nu},$$

d'après (4);

$$= -4\pi\varkappa\left(\frac{dV}{d\nu} + \frac{d\Omega}{d\nu}\right),$$

d'après (2).

Nous pouvons donc écrire la condition à la surface

$$(1+4\pi\varkappa)\frac{d\Omega}{d\nu} + \frac{d\Omega'}{d\nu} + 4\pi\varkappa\frac{dV}{d\nu} = 0. \tag{10}$$

Donc la détermination du magnétisme induit dans un corps homogène isotrope, limité par une surface S et soumis à l'action de forces magnétiques extérieures dont le potentiel est V, peut se réduire au problème mathématique suivant :

Il s'agit de trouver deux fonctions Ω *et* Ω' *satisfaisant aux conditions suivantes :*

A l'intérieur de la surface S, Ω doit être fini et continu et doit satisfaire à l'équation de Laplace.

A l'extérieur de la surface S, Ω' doit être fini et continu, doit s'annuler à une distance infinie et doit satisfaire à l'équation de Laplace.

En chaque point de la surface, $\Omega = \Omega'$, et les dérivées de Ω, Ω' et V, par rapport à ν, doivent satisfaire à l'équation (10).

Cette méthode, pour traiter les problèmes du magnétisme induit, est due à Poisson. La quantité k, dont il fait usage dans ses Mémoires, n'est pas la même que $\varkappa$, mais lui est liée par la relation

$$4\pi\varkappa(k-1) + 3k = 0. \tag{11}$$

Le coefficient $\varkappa$ que nous avons employé ici a été introduit par J. Neumann.

428. Le problème du magnétisme induit peut se traiter d'une autre manière, en introduisant la quantité que nous avons appelée, avec Faraday, l'*induction magnétique.*

La relation entre l'induction magnétique $\mathfrak{B}$, la force magnétique $\mathfrak{H}$ et l'aimantation $\mathfrak{I}$ est exprimée par la relation

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{I}. \tag{12}$$

L'équation qui exprime le magnétisme induit en fonction de la force

magnétique est

$$\mathfrak{J} = \varkappa \mathfrak{H}; \tag{13}$$

d'où, éliminant $\mathfrak{J}$, nous trouvons

$$\mathfrak{B} = (1 + 4\pi\varkappa)\mathfrak{H}, \tag{14}$$

pour la relation entre l'induction magnétique et la force magnétique dans les substances dont l'aimantation est induite par une force magnétique.

Dans le cas le plus général, $\varkappa$ peut être une fonction, non seulement de la position du point dans la substance, mais encore de la direction du vecteur $\mathfrak{H}$; mais, dans le cas qui nous occupe maintenant, $\varkappa$ est une quantité numérique.

Si nous posons

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa, \tag{15}$$

on peut définir μ comme étant le rapport de l'induction magnétique à la force magnétique, et nous pouvons appeler ce rapport le *pouvoir inducteur magnétique de la substance,* le distinguant ainsi de $\varkappa$ qui est le coefficient d'aimantation induite.

Si nous désignons par U le potentiel magnétique total, composé de V, potentiel dû aux causes extérieures, et de Ω, potentiel dû à l'aimantation induite, nous pouvons exprimer, comme il suit, les composantes a, b, c de l'induction magnétique, et celles α, β, γ de la force magnétique

$$\begin{cases} a = \mu\alpha = -\mu \dfrac{dU}{dx}, \\ b = \mu\beta = -\mu \dfrac{dU}{dy}, \\ c = \mu\gamma = -\mu \dfrac{dU}{dz}. \end{cases} \tag{16}$$

Les composantes a, b, c satisfaisant à l'équation solénoïdale

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0, \tag{17}$$

le potentiel U doit satisfaire à l'équation de Laplace

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 0 \tag{18}$$

pour tous les points où μ est constant, c'est-à-dire pour tous les points d'une substance homogène ou de l'espace vide.

A la surface même, désignant par ν une normale dirigée vers la substance magnétique, et par ν' une normale dirigée vers l'extérieur, et distinguant par des accents les symboles relatifs à des quantités extérieures à la substance, la condition de continuité de l'induction magnétique est

$$(19) \qquad a\frac{dx}{d\nu} + b\frac{dy}{d\nu} + c\frac{dz}{d\nu} + a'\frac{dx}{d\nu'} + b'\frac{dy}{d\nu'} + c'\frac{dz}{d\nu'} = 0$$

ou, par les équations (16),

$$(20) \qquad \mu\frac{dU}{d\nu} + \mu'\frac{dU'}{d\nu'} = 0.$$

Le coefficient d'induction magnétique μ' relatif au milieu extérieur à l'aimant est égal à l'unité, à moins que le milieu environnant ne soit magnétique ou diamagnétique.

Si nous substituons à U sa valeur en fonction de V et de Ω, et à μ sa valeur en fonction de $\varkappa$, nous obtenons la même équation (10), à laquelle nous étions arrivés par la méthode de Poisson.

Le problème du magnétisme induit, considéré au point de vue de la relation entre l'induction magnétique et la force magnétique, correspond exactement au problème de la conduction des courants électriques dans les milieux hétérogènes traité au § 310.

La force magnétique se déduit du potentiel magnétique, absolument comme la force électrique se déduit du potentiel électrique.

L'induction magnétique est une quantité de la nature d'un flux, et satisfait aux mêmes conditions de continuité que le courant électrique.

Le pouvoir inducteur spécifique magnétique correspond dans un problème à la conductibilité spécifique dans l'autre. C'est pour cela que Sir William Thomson, dans sa *Théorie du magnétisme induit* (*Reprint*, p. 484; 1872), a appelé cette quantité *la perméabilité du milieu*.

Nous sommes maintenant préparés à envisager la *Théorie du magnétisme induit* sous ce que je crois être le point de vue de Faraday.

Quand une force magnétique agit sur un milieu, magnétique, diamagnétique ou neutre, elle y produit un phénomène appelé *induction magnétique*.

L'induction magnétique est une quantité dirigée de la nature d'un flux, et satisfait aux mêmes conditions de continuité que les courants électriques et les autres flux.

Dans les milieux isotropes, la force et l'induction magnétique sont

dans la même direction, et l'induction magnétique est égale au produit de la force magnétique par une quantité que nous avons appelée *coefficient d'induction* et que nous avons désignée par μ.

Dans le vide, le coefficient d'induction est égal à l'unité. Dans les quantités susceptibles de prendre de l'aimantation par induction, le coefficient d'induction $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$, $\varkappa$ étant la quantité déjà définie sous le nom de *coefficient d'aimantation induite*.

429. Soient μ, μ' les valeurs de μ de part et d'autre de la surface de séparation de deux milieux. Si V et V′ sont les potentiels dans les deux milieux, les forces magnétiques dirigées vers la surface sont

$$\frac{dV}{dv} \quad \text{et} \quad \frac{dV'}{dv'}.$$

Les quantités d'induction magnétique à travers un élément de surface dS, comptées vers la surface, sont pour les deux milieux respectivement

$$\mu \frac{dV}{dv} d\mathrm{S} \quad \text{et} \quad \mu' \frac{dV'}{dv'} d\mathrm{S}.$$

Puisque le flux total à travers dS est nul,

$$\mu \frac{dV}{dv} + \mu' \frac{dV'}{dv'} = 0;$$

mais, d'après la théorie du potentiel, aux environs d'une surface où la densité est σ,

$$\frac{dV}{dv} + \frac{dV'}{dv'} + 4\pi\sigma = 0,$$

d'où

$$\frac{dV}{dv}\left(1 - \frac{\mu}{\mu'}\right) + 4\pi\sigma = 0.$$

Si $\varkappa_1$ est le rapport de l'aimantation superficielle à la force normale dans le premier milieu dont le coefficient est μ, nous avons

$$4\pi\varkappa_1 = \frac{\mu - \mu'}{\mu'}.$$

Donc $\varkappa_1$ est positif ou négatif, suivant que μ est plus grand ou plus petit que μ'. Si nous posons $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ et $\mu' = 1 + 4\pi\varkappa'$,

$$\varkappa_1 = \frac{\varkappa - \varkappa'}{4\pi\varkappa' + 1}.$$

Dans cette expression $\varkappa$ et $\varkappa'$ sont les coefficients d'aimantation in-

duite du premier et du second milieu, déduits d'expériences faites dans l'air; $\varkappa_1$ est le coefficient d'aimantation induite du premier milieu quand il est entouré par le second.

Si $\varkappa'$ est plus grand que $\varkappa$, $\varkappa_1$ est négatif, et l'aimantation apparente du second milieu est de sens contraire à la force magnétisante.

Ainsi, un vase contenant une solution aqueuse faible d'un sel paramagnétique de fer, étant suspendu au milieu d'une solution plus concentrée du même sel, et étant soumis à l'action d'un aimant, se meut comme si son aimantation était en sens inverse de celle d'un aimant suspendu librement à la même place.

On peut expliquer ce phénomène en supposant que la solution contenue dans le vase est, en réalité, aimantée dans le même sens que la force magnétisante, mais que la solution qui entoure le vase est elle-même aimantée plus fortement dans le même sens. Par suite, le vase est comme un aimant faible placé entre deux aimants forts, tous étant aimantés dans la même direction et ayant leurs pôles contraires en contact. Le pôle nord de l'aimant faible est bien tourné dans la même direction que le pôle nord des aimants forts; mais, comme il est en contact avec le pôle sud d'un aimant plus fort, il y a, dans le voisinage de son pôle nord, un excès de magnétisme sud qui fait paraître le petit aimant aimanté en sens inverse.

Toutefois, pour certaines substances, l'aimantation apparente est négative, lors même qu'on les suspend dans ce que l'on appelle *le vide*.

Si nous supposons $\varkappa = 0$ pour le vide, il sera négatif pour ces substances; mais on n'a découvert aucune substance pour laquelle $\varkappa$ ait une valeur négative numériquement supérieure à $\frac{1}{4\pi}$; donc μ est positif pour toutes les substances.

Les substances pour lesquelles $\varkappa$ est négatif et, par suite, μ plus petit que l'unité, sont appelées *substances diamagnétiques*. Celles pour lesquelles $\varkappa$ est positif et μ plus grand que l'unité sont appelées *substances paramagnétiques*, *ferromagnétiques* ou simplement *magnétiques*.

Nous considérerons la théorie physique des propriétés diamagnétiques et paramagnétiques, quand nous en viendrons à l'électromagnétisme (§ 831-845).

430. La théorie mathématique de l'induction magnétique a été donnée pour la première fois par Poisson (1). L'hypothèse sur laquelle il fon-

(1) *Mémoires de l'Institut*, 1824.

dait sa théorie était celle de deux fluides magnétiques, hypothèse qui a les mêmes avantages mathématiques et les mêmes difficultés physiques que l'hypothèse des deux fluides électriques. Pour expliquer ce fait qu'un morceau de fer aimanté par induction ne peut se charger de quantités inégales des deux espèces de magnétisme, il suppose que la substance en général ne conduit pas ces fluides et que ce sont seulement certaines petites portions de la substance qui contiennent les fluides dans des conditions leur permettant d'obéir aux forces qui les sollicitent. Ces petits éléments magnétiques contiennent chacun des quantités exactement égales des deux fluides, et ces fluides se meuvent dans chaque élément avec une liberté parfaite, mais ne peuvent jamais passer d'un élément magnétique à un autre.

Le problème est donc de la même nature que celui qui est relatif à un certain nombre de petits conducteurs électriques disséminés dans un milieu diélectrique isolant. Les conducteurs peuvent être de forme quelconque, pourvu qu'ils soient petits et ne se touchent point.

Si ce sont des corps allongés, tous orientés dans la même direction générale, ou s'ils sont plus accumulés dans une direction que dans une autre, le milieu, ainsi que l'a montré Poisson lui-même, n'est plus isotrope. Pour éviter des complications inutiles, Poisson suppose que tous ces éléments sont sphériques et que leur distribution n'est en rapport avec aucun système d'axes. Il suppose que le volume total de tous les éléments magnétiques compris dans une unité de volume de la substance est k.

Nous avons déjà étudié (§ 314) la conductibilité électrique d'un milieu dans lequel sont répandues de petites sphères d'une autre matière.

Si la conductibilité du milieu est μ_1 et celle des petites sphères μ_2, nous avons trouvé pour la conductibilité totale du système composé

$$\mu = \mu_1 \frac{2\mu_1 + \mu_2 + 2k(\mu_2 - \mu_1)}{2\mu_1 + \mu_2 - k(\mu_2 - \mu_1)}.$$

Posant $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = \infty$, cette expression devient

$$\mu = \frac{1 + 2k}{1 - k}.$$

Cette quantité μ est la conductibilité électrique d'un milieu formé de sphères de conductibilité infinie disséminées dans un milieu de conductibilité égale à l'unité, le volume total des sphères contenues dans l'unité de volume étant égal à k.

Le symbole μ représente le coefficient d'induction magnétique d'un

milieu formé de sphères de perméabilité infinie, disséminées dans un milieu de perméabilité égale à l'unité.

Le symbole k, que nous appellerons *coefficient magnétique* de Poisson, représente le rapport du volume des éléments magnétiques au volume total de la substance.

Le symbole $\varkappa$ est connu sous le nom de *coefficient d'aimantation* induite de Neumann. Il a l'avantage de rendre plus aisée la transformation des problèmes magnétiques en problèmes relatifs à l'électricité ou à la chaleur.

Les relations entre ces trois symboles sont les suivantes :

$$k = \frac{4\pi\varkappa}{4\pi\varkappa + 3}, \qquad k = \frac{\mu - 1}{\mu + 2},$$

$$\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}, \qquad \varkappa = \frac{3k}{4\pi(1-k)},$$

$$\mu = \frac{1 + 2k}{1 - k}, \qquad \mu = 4\pi\varkappa + 1.$$

Si nous posons $\varkappa = 32$, ce qui est la valeur donnée par les expériences de Thalén sur le fer doux (1), nous trouvons $k = \frac{1281}{1285}$. Tel est, d'après la théorie de Poisson, le rapport du volume des molécules magnétiques au volume total du fer. Or il est impossible de remplir un espace avec des sphères égales, de telle manière que le rapport de leur volume au volume total soit si voisin de l'unité, et il est très peu probable qu'une aussi forte proportion du volume du fer soit occupée par des molécules solides, quelle que soit leur forme. C'est là une des raisons pour lesquelles nous devons abandonner l'hypothèse de Poisson. On en donnera d'autres au Chapitre VI. D'ailleurs, la valeur des études mathématiques de Poisson n'en est en rien diminuée, puisqu'elles reposent, non sur son hypothèse, mais sur le fait expérimental de l'aimantation par induction.

---

(1) *Recherches sur les propriétés magnétiques du fer* (*Nova Acta*, Upsal, 1863).

CHAPITRE V.

PROBLÈMES PARTICULIERS RELATIFS A L'INDUCTION MAGNÉTIQUE.

Feuillet sphérique creux.

431. Le premier exemple d'un problème d'induction magnétique entièrement résolu est celui qui a été donné par Poisson, dans le cas d'un feuillet sphérique creux soumis à l'action de forces quelconques.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que l'origine des forces magnétiques soit dans l'espace extérieur au feuillet.

Si V est le potentiel dû au système magnétique extérieur, nous pouvons le développer en une série d'harmoniques solides de la forme

$$V = C_0 S_0 + C_1 S_1 r + \ldots + C_i S_i r^i, \tag{1}$$

où

r est la distance au centre de l'enveloppe,

S_i est un harmonique de surface d'ordre i,

C_i est un coefficient.

La série est convergente, pourvu que r soit inférieur à la distance au plus voisin des aimants du système auquel est dû ce potentiel. Donc, pour le feuillet sphérique creux et l'espace qui lui est intérieur, ce développement est convergent.

Soient a_2 le rayon extérieur et a_1 le rayon intérieur du feuillet, et Ω le potentiel dû à son magnétisme induit. En général, la forme de la fonction Ω sera différente dans l'espace creux, dans la masse du feuillet et dans l'espace extérieur. Développons ces fonctions en séries harmoniques, et bornons notre attention aux termes qui renferment l'harmonique de surface S_i: nous trouvons que, si Ω_1 est celui qui correspond à l'espace creux intérieur, le développement de Ω_1 doit être formé d'harmoniques positifs de la forme $A_i S_i r^i$, puisque le potentiel ne doit pas devenir infini à l'intérieur de la sphère de rayon a_1.

Dans la masse du feuillet, où r_1 est compris entre a_1 et a_2, le développement peut contenir des puissances positives et des puissances négatives de r, de la forme

$$A_2 S_i r^i + B_2 S_i r^{-(i+1)}.$$

En dehors du feuillet, r est plus grand que a_2; et, comme le développement doit rester convergent si grand que soit r, nous devons n'avoir que des puissances négatives de la forme

$$B_3 S_i r^{-(i+1)}.$$

Les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction Ω sont : 1° d'être finie; 2° d'être continue; 3° de s'annuler à l'infini; 4° de satisfaire en tout point à l'équation de Laplace.

En raison de la condition 1°, $B_1 = 0$.

En raison de 2°, pour $r = a_1$,

$$(2) \qquad (A_1 - A_2) a_1^{2i+1} - B_2 = 0,$$

et pour $r = a_2$,

$$(3) \qquad (A_2 - A_3) a_2^{2i+1} + B_2 - B_3 = 0.$$

En raison de 3°, $A_3 = 0$; la condition 4° est satisfaite partout, puisque les fonctions sont harmoniques; mais il y a, en outre, d'autres conditions à satisfaire à la surface intérieure et à la surface extérieure, en vertu de l'équation (10), § 427.

A la surface intérieure, où $r = a_1$,

$$(4) \qquad (1 + 4\pi\varkappa) \frac{d\Omega_2}{dr} - \frac{d\Omega_1}{dr} + 4\pi\varkappa \frac{dV}{dr} = 0;$$

à la surface extérieure, où $r = a_2$,

$$(5) \qquad -(1 - 4\pi\varkappa) \frac{d\Omega_2}{dr} + \frac{d\Omega_3}{dr} - 4\pi\varkappa \frac{dV}{dr} = 0.$$

De ces conditions nous tirons les équations

$$(6) \quad (1 + 4\pi\varkappa)[i A_2 a_1^{2i+1} - (i+1) B_2] - i A_1 a_1^{2i+1} + 4\pi\varkappa i C_i a_1^{2i+1} = 0,$$

$$(7) \quad (1 + 4\pi\varkappa)[i A_2 a_2^{2i+1} - (i-1) B_2] + (i+1) B_3 + 4\pi\varkappa i C_i a_2^{2i+1} = 0,$$

et si nous posons

$$(8) \qquad N_i = \frac{1}{(1 + 4\pi\varkappa)(2i+1)^2 + (4\pi\varkappa)^2 i(i+1)\left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right]},$$

nous trouvons

$$(9)\qquad A_i = -(4\pi\varkappa)^2 i(i+1)\left[1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right]N_i C_i,$$

$$(10)\qquad A_i = -\tfrac{1}{2}\pi\varkappa i\left\{2i+1+4\pi\varkappa(i+1)\left[1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right]\right\}N_i C_i,$$

$$(11)\qquad B_i = 4\pi\varkappa i(2i+1)\,a_1^{i+1}N_i C_i,$$

$$(12)\qquad B_i = -\tfrac{1}{2}\pi\varkappa i[2i+1+4\pi\varkappa(i+1)](a_1^{i+1}-a_1^{i+1})N_i C_i.$$

Ces quantités, étant substituées dans le développement harmonique, donnent la partie du potentiel qui est due à l'aimantation du feuillet.

La quantité N_i est toujours positive, puisque $1+4\pi\varkappa$ ne peut jamais être négative. Donc A_1 est toujours négatif, ou, en d'autres termes, l'action du feuillet aimanté sur un point qui lui est intérieur est toujours opposée à celle de la force magnétique extérieure, que l'enveloppe soit paramagnétique ou diamagnétique. La valeur effective du potentiel résultant, à l'intérieur du feuillet, est

$$(C_i + A_i)S_i r^i$$

ou bien

$$(13)\qquad (1+4\pi\varkappa)(2i+1)^2 N_i S_i C_i r^i.$$

432. Quand $\varkappa$ est un nombre considérable, comme dans le cas du fer doux, la force magnétique à l'intérieur n'est qu'une très faible fraction de ce qu'elle est au dehors, à moins que le feuillet ne soit très mince.

C'est ainsi que Sir William Thomson a pu rendre son galvanomètre marin indépendant des forces magnétiques extérieures en le renfermant dans un tube de fer doux.

433. Le cas le plus important dans la pratique est celui où $i=1$. Dans ce cas

$$(14)\qquad N = \frac{1}{9(1+4\pi\varkappa)+2(4\pi\varkappa)^2\left[1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right]},$$

$$(15)\qquad \begin{cases} A_1 = -2(4\pi\varkappa)^2\left[1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right]N_1 C_1, \\ A_2 = -\tfrac{1}{2}\pi\varkappa\left\{3+8\pi\varkappa\left[1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right]\right\}N_1 C_1, \\ B_1 = 12\pi\varkappa a_1^3 N_1 C_1, \\ B_2 = -\tfrac{1}{2}\pi\varkappa(3+8\pi\varkappa)(a_2^3-a_1^3)N_1 C_1. \end{cases}$$

Dans ce cas, la force magnétique à l'intérieur du feuillet creux est uniforme et égale à

$$(16)\qquad C_1 + A_1 = \frac{9(1+4\pi\varkappa)}{9(1+4\pi\varkappa)+2(4\pi\varkappa)^2\left[1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right]}C_1.$$

Si nous voulons déterminer $\varkappa$, en mesurant la force magnétique à l'intérieur d'un feuillet creux et en la comparant avec la force magnétique extérieure, la valeur la plus avantageuse à donner à l'épaisseur du feuillet peut se déduire de l'équation

$$(17)\qquad 1-\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{9}{2}\frac{1+4\pi\varkappa}{(4\pi\varkappa)^2}.$$

La force magnétique à l'intérieur de l'enveloppe est alors la moitié de ce qu'elle est à l'extérieur. Comme dans le cas du fer, $\varkappa$ est un nombre compris entre 20 et 30, l'épaisseur de l'enveloppe devrait être d'environ $\frac{1}{100}$ du rayon. Cette méthode ne peut s'appliquer que si la valeur de $\varkappa$ est grande; car, si $\varkappa$ est petit, la valeur de A_1, qui dépend de son carré, devient négligeable.

Pour une sphère à peu près pleine, avec une très petite cavité sphérique,

$$(18)\qquad \begin{cases} A_1 = -\dfrac{2(4\pi\varkappa)^2}{(3+4\pi\varkappa)(3+8\pi\varkappa)}C_1, \\ A_2 = -\dfrac{4\pi\varkappa}{3+4\pi\varkappa}C_1, \\ B_3 = -\dfrac{4\pi\varkappa}{3+4\pi\varkappa}C_1 a_2^3. \end{cases}$$

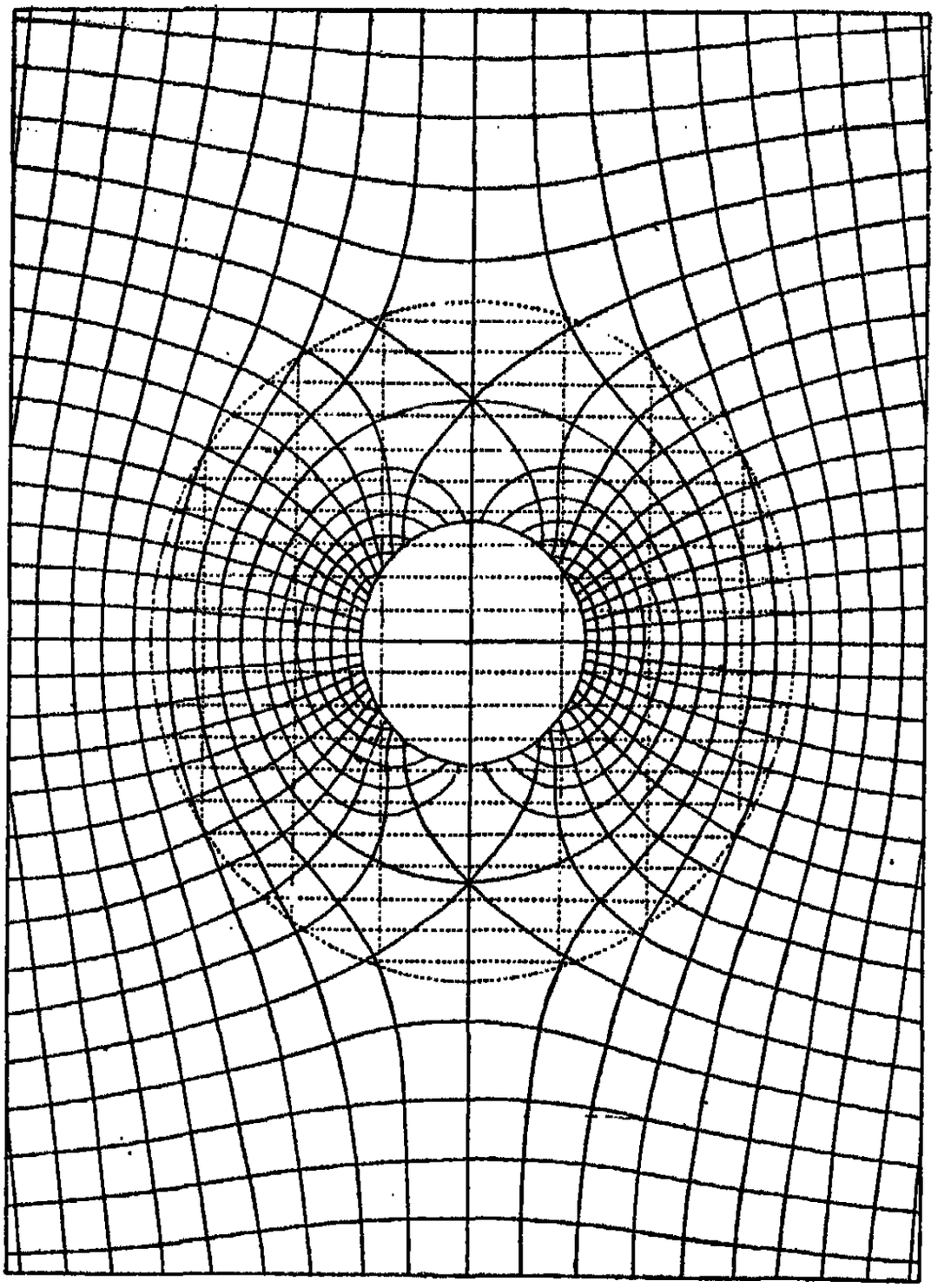
On aurait pu déduire directement toute cette étude de celle de la conduction dans une enveloppe sphérique qui a été donnée au § 312; il suffira de poser dans les expressions qui y sont données

$$k_1 = (1+4\pi\varkappa)k_2,$$

et de se souvenir que A_1 et A_2 dans le problème de la conduction électrique équivalent à $C_1 + A_1$ et $C_1 + A_2$ dans le problème de l'induction magnétique.

434. La solution correspondante pour l'espace à deux dimensions est représentée à la *Pl. XV*. On a figuré la manière dont les lignes de force, qui, à une certaine distance du centre de la figure, sont à peu près horizontales, seraient déformées par une tige cylindrique aimantée transversalement et placée dans sa position d'équilibre

Pl. XV.



Cylindre aimanté transversalement, placé nord et sud, dans un champ magnétique uniforme.

stable. Les lignes qui coupent ce système orthogonalement représentent les surfaces équipotentielles : une d'elles est une circonférence. Le grand cercle pointillé représente la section d'un cylindre formé d'une substance paramagnétique, et les lignes droites pointillées horizontales, situées à l'intérieur de ce cercle, qui continuent les lignes d'induction extérieures, sont les lignes d'induction intérieures à la substance. Les lignes pointillées verticales représentent les surfaces équipotentielles et continuent le système extérieur. On remarquera que les lignes d'induction se rapprochent à l'intérieur de la substance, et que les surfaces équipotentielles s'éloignent dans le cylindre paramagnétique qui, pour employer le langage de Faraday, conduit les lignes d'induction mieux que le milieu environnant.

Si nous considérons le système des lignes verticales comme celui des lignes d'induction, et le système des lignes horizontales comme celui des surfaces équipotentielles, nous avons, en premier lieu, le cas d'un cylindre aimanté transversalement, et placé dans sa position d'équilibre instable au milieu des lignes de force qu'il fait s'écarter. En second lieu, considérant le grand cercle pointillé comme étant la section d'un cylindre diamagnétique, les lignes droites pointillées qu'il renferme, ainsi que les lignes extérieures, représentent l'effet dû à une substance diamagnétique, d'écarter les lignes d'induction et de rapprocher les surfaces équipotentielles, une pareille substance conduisant l'induction magnétique moins bien que le milieu environnant (1).

---

(1) [Dans la *Pl. XV*, les sections droites des cylindres équipotentiels et les lignes d'induction sont tracées de manière à former une série de carrés curvilignes. Si A est l'aimantation transversale, ou suivant l'axe des x (horizontal) du cylindre figuré par un trait plein, $2\pi a^2 \frac{x}{r^2} A$ est le potentiel dû à cette aimantation au dehors du cylindre; le potentiel total, en désignant par X la force du champ, est alors $\left(-\frac{2\pi a^2 A}{r^2} + X\right)x$, ce qui détermine la forme des équipotentielles qui seront tracées pour des valeurs équidistantes du potentiel. Les lignes orthogonales ou d'induction ont pour équations $\left(\frac{2\pi a^2 A}{r^2} + X\right)y = \text{const.}$, la valeur de la constante étant l'induction à travers une surface de hauteur égale à l'unité comprise entre le plan vertical projetant l'axe des x et le cylindre projetant la ligne d'induction; elles sont tracées pour des valeurs de l'induction croissantes d'une unité, ainsi que les courbes équipotentielles. A et X sont de même signe ou de signe contraire, suivant que l'aimant est en équilibre stable ou instable. Pour passer du premier au second cas, il suffit de tourner la planche de 90° : les lignes d'induction deviennent des équipotentielles et réciproquement.

Lorsqu'on substitue à l'aimant un cylindre paramagnétique, celui-ci s'aimante

Cas d'une sphère où les coefficients d'aimantation ne sont pas les mêmes dans les différentes directions.

435. Soient α, β, γ les composantes de la force magnétique; A, B, C les composantes de l'aimantation en un point quelconque; la relation linéaire la plus générale entre ces quantités est

$$(1)\qquad \begin{cases} A = r_1\alpha + p_3\beta + q_2\gamma, \\ B = q_3\alpha + r_2\beta + p_1\gamma, \\ C = p_2\alpha + q_1\beta + r_3\gamma, \end{cases}$$

où les coefficients r, p, q sont les coefficients d'aimantation.

Supposons maintenant que telles soient les conditions de l'aimantation à l'intérieur d'une sphère de rayon a, et que l'aimantation soit, en tous les points de la substance, uniforme et de même direction, et que ses composantes soient A, B et C.

Supposons aussi que la force magnétisante extérieure soit uniforme et parallèle à une direction donnée, et que ses composantes soient X, Y et Z.

La valeur de V est donc

$$(2)\qquad V = -(Xx + Yy + Zz),$$

et celle de Ω', le potentiel de l'aimantation à l'extérieur à la sphère, est, d'après le § 391,

$$(3)\qquad \Omega' = \frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{r^3}(Ax + By + Cz).$$

La valeur du potentiel Ω de l'aimantation à l'intérieur de la sphère est

$$(4)\qquad \Omega = \frac{4\pi}{3}(Ax + By + Cz).$$

Le potentiel effectif à l'intérieur de la sphère est

$$V + \Omega,$$

de sorte que nous aurons, pour composantes de la force magnétique à

---

comme l'aimant dans sa position d'équilibre stable; et si a' est le rayon de ce cylindre, A' son aimantation, les courbes resteront les mêmes à l'extérieur du cylindre, à condition que $a'^2A' = a^2A$.

Si, au contraire, on lui substitue un cylindre diamagnétique, celui-ci est équivalent à un aimant dans sa position d'équilibre instable. L'aimantation induite a pour valeur $\frac{X}{1 + 2\pi\varkappa}$. (P.)]

l'intérieur de la sphère,

$$(5)\qquad \begin{cases} \alpha = X - \frac{4}{3}\pi A, \\ \beta = Y - \frac{4}{3}\pi B, \\ \gamma = Z - \frac{4}{3}\pi C; \end{cases}$$

d'où

$$(6)\qquad \begin{cases} (1+\frac{4}{3}\pi r_1)A + \frac{4}{3}\pi p_3 B + \frac{4}{3}\pi q_2 C = r_1 X + p_3 Y + q_2 Z, \\ \frac{4}{3}\pi q_3 A + (1+\frac{4}{3}\pi r_2)B + \frac{4}{3}\pi p_1 C = q_3 X + r_2 Y + p_1 Z, \\ \frac{4}{3}\pi p_2 A + \frac{4}{3}\pi q_1 B + (1+\frac{4}{3}\pi r_3)C = p_2 X + q_1 Y + r_3 Z. \end{cases}$$

Résolvant ces équations, nous trouvons

$$(7)\qquad \begin{cases} A = r'_1 X + p'_3 Y + q'_2 Z, \\ B = q'_3 X + r'_2 Y + p'_1 Z, \\ C = p'_2 X + q'_1 Y + r'_3 Z, \end{cases}$$

où

$$(8)\qquad \begin{cases} D' r'_1 = r_1 + \frac{4}{3}\pi(r_3 r_1 - p_2 q_2 + r_1 r_2 - p_3 q_3) + (\frac{4}{3}\pi)^2 D, \\ D' p'_1 = p_1 - \frac{4}{3}\pi(q_2 q_3 - p_1 r_1), \\ D' q'_1 = q_1 - \frac{4}{3}\pi(p_2 p_3 - q_1 r_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où D est le déterminant des coefficients des seconds membres des équations (6), et D' le déterminant des coefficients des premiers membres.

Le système des coefficients p', q', r' n'est symétrique (1) que si le système des coefficients de la forme p, q, r est lui-même symétrique, c'est-à-dire si les coefficients de la forme p sont égaux aux coefficients correspondants de la forme q.

436. Le moment du couple qui tend à faire tourner la sphère autour de l'axe des x, de y vers z, s'obtient en considérant les forces qui agissent sur un élément de volume, et en prenant leur somme pour toute la sphère. Le résultat est

$$(9)\qquad \begin{cases} L = \frac{4}{3}\pi a^3 (ZB - YC) \\ \quad = \frac{4}{3}\pi a^3 [p'_1 Z^2 - q'_1 Y^2 + (r'_2 - r'_3) YZ + X(q'_3 Z - p'_2 Y)]. \end{cases}$$

Si nous faisons

$$X = 0, \qquad Y = F\cos\theta, \qquad Z = F\sin\theta,$$

ce qui correspond à une force magnétique F située dans le plan des yz,

(1) *Voir* § 297.

et faisant avec l'axe des y un angle θ; et si nous faisons tourner la sphère pendant que cette force reste constante, le travail accompli pendant la rotation de la sphère sera

$$\int_0^{2\pi} L\,d\theta$$

pour chaque révolution complète; ce qui est égal à

$$\frac{8}{3}\pi^2 a^3 F^2 (p'_1 - q'_1). \tag{10}$$

Donc, pour que la sphère tournante ne puisse devenir une source inépuisable d'énergie, il faut que $p'_1 = q'_1$, et, de même, $p'_2 = q'_2$ et $p'_3 = q'_3$ (1).

Ces équations montrent que, dans les équations primitives, le coefficient de B à la troisième équation est égal à celui de C à la deuxième, et ainsi de suite.

Donc le système des équations est symétrique, et les équations rapportées aux axes principaux d'aimantation deviennent

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{r_1}{1+\frac{4}{3}\pi r_1} X, \\ B &= \frac{r_2}{1+\frac{4}{3}\pi r_2} Y, \\ C &= \frac{r_3}{1+\frac{4}{3}\pi r_3} Z. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

---

(1) L'égalité des coefficients p et q peut être démontrée comme il suit :

Supposons que les forces qui agissent sur la sphère la fassent tourner d'un angle $\delta\theta$ autour d'un diamètre dont les cosinus directeurs sont λ, μ, ν; si W désigne l'énergie de la sphère, nous avons, par le § 430,

$$-\delta W = \frac{4}{3}\pi a^3 [(ZB - YC)\lambda + (XC - ZA)\mu + (YA - XB)\nu]\,d\theta;$$

mais, si les axes des coordonnées sont fixes dans la sphère, nous avons, en raison de la rotation,

$$\delta X = (Y\nu - Z\mu)\,\delta\theta, \quad \ldots,$$

nous pouvons donc poser

$$-\delta W = \frac{4}{3}\pi a^3 (A\,\delta X + B\,\delta Y + C\,\delta Z).$$

Pour que la sphère tournante ne puisse devenir une source d'énergie, il faut que le second membre de l'équation précédente soit une différentielle exacte. Donc, puisque A, B, C sont des fonctions linéaires de X, Y, Z, il résulte que W est une fonction du deuxième degré de X, Y, Z, et l'on déduit de suite le résultat cherché. (*Voir aussi* Sir W. Thomson, *Reprint of papers on Electricity and Magnetism*, p. 480-481.)

Le moment du couple qui tend à faire tourner la sphère autour de l'axe des x est

$$(12) \qquad L = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \frac{r_2 - r_3}{(1+\tfrac{1}{3}\pi r_2)(1+\tfrac{1}{3}\pi r_3)} YZ.$$

Dans la plupart des cas, il n'y a qu'une très petite différence entre les coefficients d'aimantation dans les différentes directions : nous pouvons donc poser

$$(13) \qquad L = \tfrac{2}{3}\pi a^3 \frac{r_2 - r_3}{(1+\tfrac{1}{3}\pi r)^2} F^2 \sin 2\theta.$$

Telle est la force qui tend à faire tourner une sphère cristalline, autour de l'axe des x, de y vers z ; cette force tend toujours à amener parallèlement à la ligne de force magnétique l'axe de plus grand coefficient magnétique (ou de moindre coefficient diamagnétique).

La *Pl. XVI* représente le cas correspondant dans l'espace à deux dimensions (1).

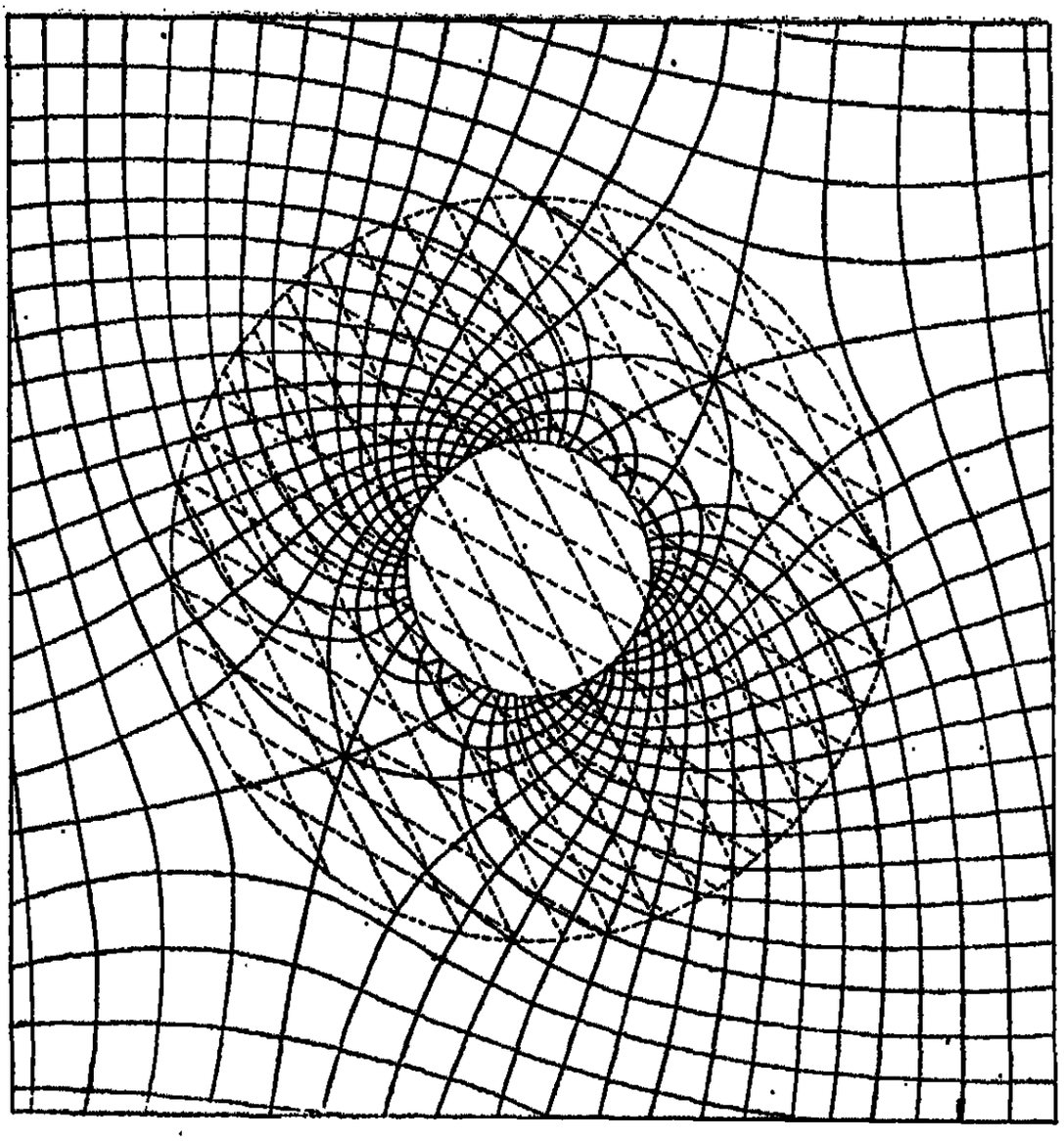
Si nous supposons que la partie supérieure de la figure soit tournée vers le nord, elle représente les perturbations des lignes de force et des surfaces équipotentielles dues à un aimant aimanté transversalement et placé son pôle nord à l'est. La force résultante tend à faire tourner le cylindre de l'est vers le nord. Le grand cercle pointillé représente la section d'un cylindre d'une substance cristalline qui aurait un plus grand coefficient d'aimantation suivant un axe nord-est sud-ouest, que suivant un axe nord-ouest sud-est. Les lignes pointillées à l'intérieur du cercle représentent les lignes d'induction et les surfaces équipotentielles, qui, dans ce cas, ne sont plus perpendiculaires les unes aux autres. La force résultante qui agit sur le cylindre tend évidemment à le faire tourner de l'est vers le nord.

437. Le cas d'un ellipsoïde placé dans un champ de force magnétique uniforme et parallèle a été résolu par Poisson d'une manière très ingénieuse.

Si V est le potentiel en un point (x, y, z) dû à la gravitation d'un corps de forme quelconque et de densité uniforme ρ, $-\frac{dV}{dx}$ est le po-

(1) [Dans cette figure, les courbes équipotentielles ont pour équation $\frac{2\pi a^3 Ax}{r^2} - Yy = \text{const}$, Y étant la force du champ et A l'aimantation (horizontale) de l'aimant, tandis que les lignes d'induction sont $\frac{2\pi a^3 Ay}{r^2} - Yx = \text{const}$, et sont symétriques des premières par rapport à la bissectrice $x = y$. (P.)]

Pl. XVI.



Cylindre aimanté transversalement placé est et ouest,
dans un champ magnétique uniforme.

tentiel magnétique dû au même corps ayant une aimantation uniforme dans le sens des x et d'intensité $I = \rho$.

En effet, en un point quelconque, $-\frac{dV}{dx}\delta x$ est l'excès de la valeur V du potentiel du corps sur la valeur V′ que prend ce potentiel quand le corps est déplacé de $-\delta x$ dans la direction des x.

Si nous supposons le corps déplacé de la distance $-\delta x$, et sa densité ρ devenue $-\rho$, en d'autres termes, la substance attractive du corps remplacée par une substance répulsive $-\frac{dV}{dx}\delta x$ sera le potentiel dû à l'ensemble de ce nouveau corps et de l'ancien.

Or considérons un élément du corps comprenant le volume δv. La quantité de matière est $\rho\,\delta v$ et, correspondant à celui-ci dans le second corps, est un élément dont la quantité de matière est $-\rho\,\delta v$, situé à une distance $-\delta x$. L'effet de ces deux éléments est équivalent à celui d'un aimant de force $\rho\,\delta v$ et de longueur δx. L'intensité d'aimantation s'obtient en divisant le moment magnétique d'un élément par son volume; le résultat est

$$\rho\,\delta x.$$

Donc, $-\frac{dV}{dx}\delta x$ est le potentiel magnétique du corps aimanté avec l'intensité $\rho\,\delta x$, dans la direction des x, et $-\frac{dV}{dx}$ est celui du corps aimanté avec l'intensité ρ.

Ce potentiel peut aussi être considéré à un point de vue différent. On a déplacé le corps de la distance $-\delta x$, et on lui a attribué la densité $-\rho$. Dans tout l'espace commun aux deux positions du corps, la densité est zéro, du moins en ce qui est relatif à l'attraction; car les deux densités égales et contraires se neutralisent l'une l'autre. Il reste donc un feuillet formé de matière positive d'un côté, de matière négative de l'autre, à laquelle on peut considérer que le potentiel est dû. L'épaisseur de l'enveloppe, au point où la normale menée vers l'extérieur fait avec l'axe des x un angle ε, est $\delta x \cos\varepsilon$, et sa densité est ρ. La densité superficielle est donc $\rho\,\delta x \cos\varepsilon$ et, dans le cas où le potentiel est $-\frac{dV}{dx}$, la densité superficielle est

$$\rho \cos\varepsilon.$$

Nous pouvons trouver de cette manière le potentiel d'un corps aimanté uniformément parallèlement à une direction donnée. Or, si cette aimantation uniforme est due à l'induction magnétique, la force

magnétisante doit aussi être uniforme et parallèle en tous les points du corps.

Cette force est formée de deux parties : l'une due aux causes extérieures, l'autre à l'aimantation du corps. Si donc la force magnétique extérieure est uniforme et parallèle, la force magnétique due à l'aimantation doit aussi être uniforme et parallèle en tous les points du corps.

Donc, pour que cette méthode puisse conduire à une solution du problème de l'induction magnétique, il faut que $\frac{dV}{dx}$ soit, pour l'intérieur du corps, une fonction linéaire des coordonnées x, y, z, et, par suite, V doit être une fonction quadratique de ces coordonnées.

Or les seuls cas que nous connaissions où, pour l'intérieur d'un corps, V est une fonction quadratique des coordonnées, sont ceux où le corps est limité par une surface du deuxième degré complète; et le seul cas où un pareil corps ait des dimensions finies est celui de l'ellipsoïde. Nous appliquerons donc la méthode au cas d'un ellipsoïde.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

l'équation d'un ellipsoïde, et désignons par Φ_0 l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a^2+\varphi^2)(b^2+\varphi^2)(c^2+\varphi^2)}} \quad (1). \tag{2}$$

Si nous posons

$$L=4\pi abc\,\frac{d\Phi_0}{d(a^2)}, \qquad M=4\pi abc\,\frac{d\Phi_0}{d(b^2)}, \qquad N=4\pi abc\,\frac{d\Phi_0}{d(c^2)}, \tag{3}$$

la valeur du potentiel à l'intérieur de l'ellipsoïde sera

$$V_0=-\frac{\rho}{2}(Lx^2+My^2+Nz^2)+\text{const.} \tag{4}$$

Si l'ellipsoïde est aimanté à l'intensité uniforme I, dans une direction faisant avec les axes des x, des y et des z des angles dont les cosinus sont l, m et n, les composantes de l'aimantation sont

$$A=Il, \qquad B=Im, \qquad C=In,$$

et le potentiel dû à cette aimantation à l'intérieur de l'ellipsoïde sera

$$\Omega=-I(Llx+Mmy+Nnz). \tag{5}$$

---

(1) *Voir* Thomson et Tait, *Natural Philosophy*, 522.

Si la force magnétisante extérieure est $\mathfrak{H}$ et ses composantes X, Y et Z, son potentiel sera

$$V = -(Xx + Yy + Zz). \tag{6}$$

Donc les composantes de la force magnétisante effective en un point quelconque situé à l'intérieur du corps sont

$$X + AL,\ Y + BM,\ Z + CN. \tag{7}$$

Les relations les plus générales entre l'aimantation et la force magnétisante sont données par trois équations linéaires, comprenant neuf coefficients; mais, pour satisfaire aux conditions de conservation de l'énergie, il est nécessaire, dans le cas de l'induction magnétique, que trois de ces coefficients soient respectivement égaux à trois autres, de sorte que nous aurons

$$\begin{cases} A = \varkappa_1 (X + AL) + \varkappa'_3 (Y + BM) + \varkappa'_2 (Z + CN), \\ B = \varkappa'_3 (X + AL) + \varkappa_2 (Y + BM) + \varkappa'_1 (Z + CN), \\ C = \varkappa'_2 (X + AL) + \varkappa'_1 (Y + BM) + \varkappa_3 (Z + CN). \end{cases} \tag{8}$$

Au moyen de ces équations, nous pouvons déterminer A, B, C en fonction de X, Y, Z, ce qui donne la solution la plus générale du problème.

Le potentiel à l'extérieur de l'ellipsoïde se compose alors de celui qui est dû à l'aimantation de l'ellipsoïde et de celui qui est dû aux forces magnétiques extérieures.

438. Le seul cas important dans la pratique est celui où

$$\varkappa'_1 = \varkappa'_2 = \varkappa'_3 = 0. \tag{9}$$

Nous avons alors

$$\begin{cases} A = \dfrac{\varkappa_1}{1 - \varkappa_1 L} X, \\ B = \dfrac{\varkappa_2}{1 - \varkappa_2 M} Y, \\ C = \dfrac{\varkappa_3}{1 - \varkappa_3 N} Z. \end{cases} \tag{10}$$

Si l'ellipsoïde a deux axes égaux, et s'il est de la forme planétaire ou aplatie,

$$b = c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}, \tag{11}$$

$$\begin{cases} L = -4\pi \left(\dfrac{1}{e^2} - \dfrac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e \right), \\ M = N = -2\pi \left(\dfrac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e - \dfrac{1 - e^2}{e^2} \right). \end{cases} \tag{12}$$

Si l'ellipsoïde est en forme d'œuf ou allongé

$$a = b = c\sqrt{1-e^2}, \tag{13}$$

$$\begin{cases} L = M = -2\pi\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1-e^2}{2e^3}\log\frac{1+e}{1-e}\right), \\ N = -4\pi\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)\left(\frac{1}{2e}\log\frac{1+e}{1-e} - 1\right); \end{cases} \tag{14}$$

dans le cas de la sphère où $e = 0$,

$$L = M = N = -\tfrac{1}{3}\pi. \tag{15}$$

Dans le cas d'un ellipsoïde planétaire très aplati, L devient à la limite égal à -4π, et M et N égaux à $-\pi^2\frac{a}{c}$.

Dans le cas d'un ellipsoïde en œuf très allongé, L et M approchent de la valeur -2π, tandis que N tend vers

$$-\frac{4}{\pi}\frac{a^2}{c^2}\left(\log\frac{2c}{a} - 1\right)$$

et s'annule quand $e = 1$.

De ces résultats, il ressort que :

1° Quand le coefficient d'aimantation $\varkappa$ est très petit, positif et négatif, l'aimantation induite est à peu près égale à la force magnétisante multipliée par le coefficient $\varkappa$, et est presque indépendante de la forme du corps.

2° Si $\varkappa$ est une quantité positive considérable, l'aimantation dépend surtout de la forme du corps et est presque indépendante de la valeur exacte de $\varkappa$, excepté dans le cas où une force longitudinale agit sur un ellipsoïde en œuf assez allongé pour que $N\varkappa$ soit une petite quantité, quoique $\varkappa$ soit grand.

3° Si la valeur de $\varkappa$ pouvait être négative et égale à $\frac{1}{4\pi}$, nous aurions une aimantation de valeur infinie dans le cas d'une force magnétisante agissant normalement à un disque plat. L'absurdité de ce résultat confirme ce qui a été dit au § 428.

Donc, tant que $\varkappa$ est petit, ce qui est le cas pour tous les diamagnétiques, et pour tous les corps magnétiques, à l'exception du fer, du nickel et du cobalt, les expériences, pour la détermination de $\varkappa$, peuvent se faire sur des corps de forme quelconque.

Mais si, comme dans le cas du fer, $\varkappa$ est un nombre considérable, des expériences faites sur des sphères ou des figures aplaties ne conviendraient pas pour déterminer $\varkappa$. Ainsi, dans le cas d'une sphère, le

rapport de l'aimantation à la force magnétisante est de 1 à 4,22, si $\varkappa = 30$, valeur qu'il a dans certaines sortes de fer; et, si $\varkappa$ était infini, ce rapport deviendrait celui de 1 à 4,19 : on voit donc qu'une très légère erreur sur la détermination de l'aimantation en entraînerait une très grosse sur la valeur de $\varkappa$.

Si l'on emploie, au contraire, un morceau de fer en forme d'œuf très allongé, tant que $N\varkappa$ aura une valeur médiocre relativement à l'unité, on pourra déduire la valeur de $\varkappa$ de celle de l'aimantation; et plus la valeur de N sera petite, et plus on obtiendra une valeur exacte de $\varkappa$.

En fait, si l'on donne à $N\varkappa$ une valeur suffisamment petite, une petite erreur sur la valeur de N lui-même, n'introduira guère d'erreur, de sorte que l'on peut employer, au lieu d'un œuf, un corps allongé quelconque, un fil ou une longue tige.

Nous devons toutefois nous rappeler que c'est seulement quand le produit $N\varkappa$ est petit relativement à l'unité que cette substitution est permise. En fait, la distribution du magnétisme sur un long cylindre terminé par des surfaces planes ne ressemble pas à la distribution sur un œuf allongé. Ce magnétisme libre est très concentré vers les bouts du cylindre, tandis que, dans le cas de l'œuf, il varie proportionnellement à la distance de l'équateur.

On peut, au contraire, ainsi que nous l'avons déjà vu au § 152, comparer la distribution de l'électricité sur un cylindre, à sa distribution sur un œuf.

Ces résultats nous permettent aussi de comprendre comment on peut autant augmenter le moment magnétique d'un aimant permanent, en lui donnant une forme allongée. Si l'on aimante un disque à l'intensité I, dans une direction normale à sa surface, et qu'on l'abandonne ensuite à lui-même, les molécules intérieures seront soumises à une force de désaimantation constante et égale à $4\pi I$; et, si cette force ne suffit pas par elle-même à détruire une partie du magnétisme, elle y parvient rapidement à l'aide des vibrations ou des changements de température.

Si l'on aimante un cylindre transversalement, la force de désaimantation n'est plus que $2\pi I$.

Si l'aimant est en forme de sphère, elle est $\frac{4}{3}\pi I$.

Dans un disque aimanté transversalement, elle est

$$\pi \frac{2a}{c} I;$$

et, dans un œuf allongé aimanté longitudinalement, elle est la plus

petite de toutes,

$$\tfrac{4}{3}\pi\,\frac{a^2}{c^2}\,\mathrm{I}\log\frac{2c}{a}.$$

Donc un aimant allongé a moins de chances de perdre son magnétisme qu'un aimant gros et court.

Dans un ellipsoïde qui a des coefficients magnétiques différents pour ses trois axes, le moment de la force qui tend à le faire tourner autour de l'axe des x est

$$\tfrac{4}{3}\pi abc(\mathrm{BZ}-\mathrm{CY}) = \tfrac{4}{3}\pi abc\,\mathrm{YZ}\,\frac{\varkappa_2-\varkappa_3+\varkappa_2\varkappa_3(\mathrm{M}-\mathrm{N})}{(1-\varkappa_2\mathrm{M})(1-\varkappa_3\mathrm{N})}.$$

Si $\varkappa_2$ et $\varkappa_3$ sont petits, cette force dépend surtout des qualités cristallines du corps, et non de sa forme, pourvu que ses dimensions ne soient pas très inégales; mais, si $\varkappa_2$ et $\varkappa_3$ sont considérables, comme dans le cas du fer, la force dépendra principalement de la forme du corps et le fera tourner de façon que son axe le plus long soit parallèle aux lignes de force.

Si l'on pouvait obtenir un champ de force magnétique suffisamment intense, quoique uniforme, un corps diamagnétique isotrope allongé se placerait aussi de façon que sa plus longue dimension fût parallèle aux lignes de force magnétique.

439. La question de la distribution de l'aimantation dans un ellipsoïde de révolution soumis à l'action de forces magnétiques quelconques a été étudiée par J. Neumann (1). Kirchhoff a étendu la méthode au cas d'un cylindre de longueur infinie soumis à l'action de forces quelconques (2).

Green, dans la XVIIe Section de son *Essai*, a donné une étude de la distribution du magnétisme dans un cylindre de longueur finie, soumis à l'action d'une force extérieure uniforme et parallèle à son axe. Quoique certaines parties de cette analyse ne soient pas très rigoureuses, il est probable cependant que le résultat représente en gros l'état effectif de l'aimantation dans ce cas très important. A coup sûr, il exprime très convenablement la transition du cas où $\varkappa$ est un nombre considérable à celui où $\varkappa$ est un nombre très petit; mais il est absolument en défaut dans le cas où $\varkappa$ est négatif, comme dans le cas des substances diamagnétiques.

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 37; 1848.

(2) *Journal de Crelle*, t. 48; 1854.

Green trouve qu'à une distance x du milieu d'un cylindre de rayon a et de longueur $2l$ la densité linéaire est

$$\lambda = \pi\varkappa X p a \frac{e^{\frac{px}{a}} - e^{-\frac{px}{a}}}{e^{\frac{pl}{a}} - e^{-\frac{pl}{a}}},$$

où p est une quantité numérique à tirer de l'équation

$$0,231863 - 2\log_e p + 2p = \frac{1}{\pi\varkappa p^2}.$$

Voici quelques-unes des valeurs correspondantes de p et de $\varkappa$:

$\varkappa$.	p.	$\varkappa$.	p.
∞	0	9,137	0,08
336,4	0,01	7,517	0,09
62,02	0,02	6,319	0,10
48,416	0,03	0,1427	1,00
29,475	0,04	0,0002	10,00
20,185	0,05	0,0000	∞
14,794	0,06	négatif.	imaginaire.
11,802	0,07		

Si la longueur du cylindre est grande relativement à son rayon, la quantité totale du magnétisme libre de chaque côté du milieu du cylindre est, ainsi qu'il devait être,

$$M = \pi a^2 \varkappa X.$$

De cette quantité, $\frac{1}{2}pM$ est répandu sur la surface plane qui termine le cylindre, et la distance du centre de gravité de toute la masse M, au milieu du cylindre, est

$$\frac{a}{p}.$$

Si $\varkappa$ est très petit, p est grand et la presque totalité du magnétisme libre est sur les bouts du cylindre. Si $\varkappa$ augmente, p diminue, et le magnétisme libre se répand sur une plus grande longueur à partir des extrémités. Si $\varkappa$ est infini, le magnétisme libre en chaque point du cylindre est proportionnel à la distance au milieu, et la distribution est semblable à celle de l'électricité sur un conducteur placé dans un champ de force uniforme.

440. Dans toutes les substances, à l'exception du fer, du nickel et du cobalt, le coefficient d'aimantation est si petit que l'aimantation

induite du corps ne produit qu'une très légère modification des forces en jeu dans le champ magnétique. Nous pouvons donc admettre, pour une première approximation, que la force magnétique agissant effectivement à l'intérieur du corps est la même que si le corps n'existait pas. Donc, dans cette première approximation, l'aimantation superficielle du corps est

$$\varkappa \frac{dV}{dv},$$

où $\frac{dV}{dv}$ est l'accroissement du potentiel magnétique dû aux aimants extérieurs, le long d'une normale menée intérieurement à la surface. Si, maintenant, nous calculons le potentiel dû à cette distribution superficielle, nous pouvons l'employer pour passer à une seconde approximation.

Pour trouver l'énergie mécanique due à la distribution magnétique dans cette première approximation, nous devons trouver l'intégrale

$$E = \tfrac{1}{2}\int\int \varkappa V \frac{dV}{dv}\, dS,$$

pour toute la surface du corps. Or nous avons montré (§ 100) qu'elle est égale à l'intégrale

$$E = -\tfrac{1}{2}\int\int\int \varkappa \left(\left|\frac{dV}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dV}{dy}\right|^2 + \left|\frac{dV}{dz}\right|^2 \right) dx\, dy\, dz,$$

prise pour tout l'espace occupé par le corps; ou bien, si R est la force magnétique résultante,

$$E = -\tfrac{1}{2}\int\int\int \varkappa R^2\, dx\, dy\, dz.$$

Or, puisque le travail effectué par les forces magnétiques, pendant un déplacement δx du corps, est $X\,\delta x$, où X est la force mécanique dans le sens des x, et puisque

$$\int X\,\delta x + E = \text{const.},$$

$$X = -\frac{dE}{dx} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\int\int\int \varkappa R^2\, dx\, dy\, dz = \tfrac{1}{2}\int\int\int \varkappa \frac{dR^2}{dx}\, dx\, dy\, dz,$$

ce qui montre que l'effet de la force sur le corps est le même que si chacune des parties de ce corps tendait à se déplacer des points où R^2 est plus petit vers ceux où R^2 est plus grand, avec une force égale à

$$\tfrac{1}{2}\varkappa \frac{d(R^2)}{dx}$$

par unité de volume.

Si κ est négatif, comme dans les diamagnétiques, la force est dirigée, ainsi que l'a montré Faraday, des parties les plus énergiques aux parties les moins énergiques du champ magnétique. La plupart des actions observées dans le cas des corps diamagnétiques dépendent de cette propriété.

Magnétisme d'un navire.

441. Presque toutes les parties de la science magnétique trouvent leur usage dans la navigation. L'action directrice du magnétisme terrestre sur une aiguille de boussole nous fournit la seule méthode permettant de déterminer la marche d'un navire quand le Soleil et les étoiles sont cachés. On crut d'abord que la déclinaison de l'aiguille, en l'écartant du méridien vrai, serait un obstacle à l'emploi de la boussole en navigation; mais, après que l'on eut surmonté cette difficulté en dressant des cartes magnétiques, on reconnut que la déclinaison même devait aider le marin à déterminer la position de son navire.

L'opération la plus difficile en navigation a toujours été de déterminer la longitude. La déclinaison n'étant pas la même aux différents points d'un même parallèle, une observation de déclinaison jointe à la connaissance de la latitude permettrait au marin de trouver sa position sur une carte magnétique.

Mais, depuis quelque temps, on a fait un si grand usage du fer dans la construction des navires, qu'il est devenu absolument impossible de se servir de la boussole si l'on ne tient compte de l'action qu'exerce sur elle le navire en tant que corps magnétique.

C'est, comme nous l'avons vu, un problème très difficile que de déterminer la distribution du magnétisme dans un corps de forme quelconque soumis à l'influence du magnétisme terrestre, lors même qu'il n'intervient ni tension mécanique, ni aucune autre cause de perturbation.

Mais, dans le cas actuel, le problème est simplifié par les considérations suivantes :

On suppose le centre de la boussole placé en un point fixe du navire, assez loin de toute masse de fer pour que le magnétisme de l'aiguille n'induise sur le navire aucune aimantation appréciable. On suppose, en outre, l'aiguille de la boussole assez petite pour que l'on puisse considérer la force magnétique comme étant la même en tous ses points.

On suppose enfin qu'il n'entre dans le navire que deux sortes de fer :

1° Du fer dur, aimanté d'une manière constante;

2° Du fer doux, dont l'aimantation est induite par la terre ou par d'autres aimants.

Rigoureusement, nous devrions admettre que le fer le plus dur, non seulement est susceptible d'induction, mais encore peut perdre de différentes manières une partie de ce qu'on appelle son *aimantation permanente*.

Le fer le plus doux est aussi capable de conserver ce que l'on appelle une *aimantation résiduelle*. Les propriétés véritables du fer ne sauraient être exactement représentées, si on le suppose formé du fer doux et du fer dur, qui ont été définis précédemment. Mais on a reconnu que, quand un navire n'est soumis qu'à l'action de la force magnétique terrestre H, sans tensions extraordinaires, comme il s'en produit en cas de tempête, l'hypothèse que son magnétisme est dû en partie à une aimantation permanente et en partie à l'induction conduit à des résultats suffisamment exacts, lorsqu'on l'applique à la correction des compas.

Les équations sur lesquelles est fondée la théorie de la variation du compas ont été données par Poisson, dans le tome V des *Mémoires de l'Institut*, p. 533; 1824.

Ces équations ne comportent, relativement au magnétisme induit, d'autre hypothèse que la suivante :

Si une force magnétique X due au magnétisme extérieur produit dans le fer du navire une aimantation induite, et que cette aimantation induite exerce sur l'aiguille une action perturbatrice dont les composantes sont X′, Y′ et Z′, tout changement dans un rapport donné de la force magnétique extérieure donnera lieu à un changement dans le même rapport des composantes de la force perturbatrice.

Il est vrai que, quand la force magnétique qui agit sur le fer devient très grande, l'aimantation induite cesse d'être proportionnelle à la force magnétique extérieure; mais ce défaut de proportionnalité est tout à fait insensible pour des forces magnétiques de la grandeur de celles qui sont dues à l'action de la terre.

Donc, on peut admettre dans la pratique que, si une force magnétique, dont la valeur est l'unité, donne lieu, par l'intermédiaire du fer du navire, à une force perturbatrice de l'aiguille du compas, dont les composantes sont a suivant les x, d suivant les y, et g suivant les z, les composantes de la force perturbatrice due à une force X dans la direction des x seront aX, dX et gX.

Si donc nous prenons des axes fixes dans le navire, et tels que x soit dirigée vers la proue, y vers tribord, et z vers la quille du navire; et si X, Y, Z sont les composantes de la force magnétique terrestre dans ces directions, et X′, Y′, Z′ les composantes de la force due à l'action combinée de la terre et du navire sur l'aiguille du

compas,

$$X' = X + aX + bY + cZ + P,$$
$$Y' = Y + dX + eY + fZ + Q,$$
$$Z' = Z + gX + hY + kZ + R.$$

Dans ces équations, a, b, c, d, e, f, g, h, k sont neuf coefficients constants dépendant de la quantité, de la disposition et de la capacité d'induction du fer doux situé dans le navire.

P, Q, R sont des quantités constantes dépendant de l'aimantation permanente du navire.

Il est évident que, si l'induction magnétique est une fonction linéaire de la force magnétique, ces équations sont suffisamment générales; elles ne sont autres que l'expression la plus générale d'un vecteur comme fonction linéaire d'un autre vecteur.

On peut aussi montrer qu'elles ne sont pas trop générales; car, pour une disposition convenable du fer, on peut faire varier un quelconque des coefficients indépendamment de tous les autres.

En effet, une tige de fer, longue et mince, soumise à l'action d'une force magnétique longitudinale, prend des pôles qui ont chacun une force numériquement égale au produit de la section transversale de la tige par la force magnétisante et par le coefficient d'aimantation induite. Une force magnétique transversale à la tige produit une aimantation beaucoup plus faible, dont l'effet est presque insensible à une distance de quelques diamètres.

Si donc on place une longue tige de fer dans la direction de l'avant à l'arrière, avec une de ses extrémités à une distance x de l'aiguille du compas, mesurée vers la proue du navire, et si la section de la tige est A et son coefficient d'aimantation $\varkappa$, la force du pôle sera $A\varkappa X$, et si $A = \frac{ax^2}{\varkappa}$, la force exercée par ce pôle sur l'aiguille de la boussole sera aX. On peut supposer cette tige assez longue pour que l'on puisse négliger l'effet de l'autre pôle sur le compas.

Nous avons ainsi un moyen de donner au coefficient a telle valeur que l'on voudra.

Si nous plaçons une autre tige de section B, qui ait une de ses extrémités au même point situé à une distance x de l'aiguille vers la proue du navire, et qui s'étende vers tribord à une distance assez grande pour que le pôle éloigné n'ait plus d'action sensible sur le compas, la force perturbatrice due à cette tige sera dirigée suivant les x et sera égale à $\frac{B\varkappa Y}{x^2}$, ou, si $B = \frac{bx^2}{\varkappa}$, la force sera bY.

Cette tige introduit donc le coefficient b.

Une troisième tige partant du même point et dirigée du haut en bas introduira le coefficient c.

Les coefficients d, e, f peuvent être produits au moyen de trois tiges dirigées vers l'avant, vers tribord et vers le fond du navire, et partant d'un point situé à tribord du compas; les coefficients g, h, k, au moyen de trois tiges dirigées dans les mêmes directions, et partant d'un point situé au-dessous du compas.

Donc on peut faire varier séparément chacun de ces coefficients, au moyen de tiges de fer convenablement placées.

Les quantités P, Q, R sont les composantes de la force agissant sur la boussole, qui est due à l'aimantation permanente du navire, et à cette partie de l'aimantation induite qui est due à l'action de l'aimantation permanente.

Une discussion complète des équations (1) et de la relation entre la direction magnétique vraie du navire et la direction indiquée par la boussole a été donnée par M. Archibald Smith, dans le *Manuel de la déviation du compas,* publié par l'Amirauté.

On y donne une très bonne méthode graphique pour étudier la question. Prenant pour origine un point fixe, on trace, à partir de ce point, une ligne représentant en grandeur et en direction la partie horizontale de la force magnétique qui agit effectivement sur l'aiguille du compas. Quand on fait éviter le navire, de façon qu'il ait le cap dans les différents azimuts successivement, l'extrémité de cette ligne décrit une courbe dont chaque point correspond à un azimut particulier.

On appelle *dygogramme* une pareille courbe qui donne la grandeur et la direction de la force qui agit sur l'aiguille, en fonction de l'azimut magnétique du navire.

Il y a deux espèces de dygogrammes. Dans la première, la courbe est tracée sur un plan qui reste fixe dans l'espace quand le navire tourne sur lui-même. Dans la seconde, la courbe est tracée sur un plan fixe relativement au navire.

Le dygogramme de première espèce est un limaçon de Pascal, celui de seconde espèce est une ellipse. Pour la construction et l'usage de ces courbes, ainsi que pour un grand nombre de théorèmes, aussi intéressants pour le mathématicien qu'importants pour le navigateur, on renvoie le lecteur au *Manuel de la déviation du compas,* publié par l'Amirauté.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DU MAGNÉTISME INDUIT DE WEBER.

442. Nous avons vu que Poisson considère l'aimantation du fer comme due à une séparation de fluides magnétiques qui se produirait dans chaque molécule magnétique. Si nous désirons éviter cette hypothèse de l'existence de fluides magnétiques, nous pouvons énoncer la même théorie sous une autre forme, en disant que chaque molécule devient un aimant quand une force magnétisante agit sur elle.

La théorie de Weber diffère de celle-ci en ce qu'elle suppose que les molécules de fer sont toujours des aimants, avant même l'application de la force magnétisante; mais dans le fer ordinaire les axes magnétiques des molécules sont orientés indifféremment dans tous les sens, de sorte que le fer pris dans son ensemble ne manifeste point de propriétés magnétiques.

Quand une force magnétique agit sur le fer, elle tend à orienter dans la même direction les axes de toutes les molécules et à faire ainsi un aimant du fer pris dans son ensemble.

Si les axes de toutes les molécules étaient rendus parallèles, le fer présenterait la plus grande intensité d'aimantation dont il est susceptible. Ainsi, la théorie de Weber implique l'existence d'une limite de l'intensité d'aimantation, et la preuve expérimentale de l'existence d'une pareille limite est nécessaire à cette théorie. On doit à Joule (1) et à J. Müller (2) des expériences qui accusent une tendance vers une limite d'aimantation.

Les expériences de Beetz (3), faites sur du fer électrolytique déposé sous l'influence d'une force magnétique, fournissent la démonstration la plus complète de l'existence de cette limite.

Un fil d'argent étant verni, on dénudait le métal en grattant le vernis suivant une ligne longitudinale très fine. Ce fil était plongé dans la solution d'un sel de fer et placé dans un champ magnétique, la ligne mise à nu étant parallèle aux lignes de force magnétique. En faisant

(1) *Annals of Electricity*, t. IV, p. 131, 1839; *Phil. Mag.*, [4], t. II, p. 316.
(2) *Pogg. Ann.*, t. LXXIX, p. 337; 1850.
(3) *Pogg. Ann.*, t. CXI; 1860.

de ce fil la cathode d'un courant électrique traversant la solution, du fer se déposait molécule par molécule sur l'étroite surface dénudée. On examina ensuite, au point de vue magnétique, le filament de fer ainsi formé, et l'on trouva que son moment magnétique était très grand pour une si petite masse de fer; et, si l'on faisait agir dans le même sens une puissante force magnétisante, on trouvait que l'accroissement d'aimantation temporaire était très petit, et que l'aimantation permanente n'était pas changée. Une force magnétisante de sens inverse ramenait aussitôt le filament du fer aux conditions du fer aimanté à la manière ordinaire.

La théorie de Weber, qui suppose que dans ce cas la force magnétisante a orienté dans la même direction les axes de toutes les molécules de fer, au moment où elles se déposaient, s'accorde très bien avec les faits observés.

Beetz a trouvé que, si l'on continue l'électrolyse sous l'influence d'une force magnétisante, l'intensité d'aimantation du fer qui se dépose ultérieurement diminue. Probablement les axes des molécules sont déviés de la direction des lignes de force au moment où les molécules sont mises en liberté à côté des molécules déjà déposées; de sorte que l'on ne peut approcher du parallélisme que dans le cas d'un filament de fer très fin.

Si, comme le suppose Weber, les molécules de fer sont déjà des aimants, toute force magnétisante suffisante pour rendre leurs axes parallèles au moment où les molécules se déposent par voie électrolytique doit suffire pour produire dans le filament déposé la plus grande intensité d'aimantation.

Si, au contraire, les molécules de fer ne sont point des aimants, mais sont seulement capables de s'aimanter, l'aimantation du filament déposé dépendra de la force magnétisante de la même manière que dans le cas du fer doux ordinaire. Les expériences de Beetz ne laissent point de place pour cette dernière hypothèse.

443. Nous admettrons donc, avec Weber, que dans chaque unité de volume de fer il y a n molécules magnétiques et que le moment magnétique de chacune est m. Si les axes de toutes les molécules étaient placés parallèlement les uns aux autres, le moment magnétique de l'unité de volume serait

$$M = nm,$$

et ce serait là la plus grande intensité d'aimantation dont le fer est susceptible.

Weber suppose que dans le fer ordinaire non aimanté les axes des molécules sont dirigés indifféremment dans tous les sens.

Pour représenter cet état, supposons une sphère décrite et un rayon mené du centre parallèlement à l'axe de chacune des n molécules. La distribution des extrémités de ces rayons exprimera celle des axes des molécules. Dans le cas du fer ordinaire, ces n points seront également distribués sur toutes les parties de la surface de la sphère; de sorte que le nombre des molécules dont les axes font avec l'axe des x un angle inférieur à α sera

$$\frac{n}{2}(1-\cos\alpha),$$

et le nombre des molécules dont les axes font avec l'axe des x un angle compris entre α et $\alpha + d\alpha$ est

$$\frac{n}{2}\sin\alpha d\alpha.$$

Telle est la disposition des molécules dans un morceau de fer qui n'a jamais été aimanté.

Supposons maintenant que l'on fasse agir sur le fer, dans la direction de l'axe des x, une force magnétique X, et considérons une molécule dont l'axe était primitivement incliné sur l'axe de l'angle α.

Si cette molécule était parfaitement libre de tourner, elle se placerait l'axe parallèle à l'axe des x; et si toutes les molécules faisaient de même, la force magnétisante la plus minime suffirait à développer le plus haut degré d'aimantation : mais ce n'est pas là le cas.

Les molécules ne tournent pas de manière à amener leurs axes parallèlement à l'axe des x, soit que chaque molécule soit soumise à une force tendant à la maintenir dans sa position primitive, soit qu'un effet équivalent soit produit par les actions mutuelles du système entier des molécules.

Weber adopta la première de ces hypothèses comme étant la plus simple; il suppose que, quand une molécule est déviée, elle est sollicitée de revenir à sa position primitive par une force égale à celle que produirait une force magnétique D, agissant dans la direction primitive de son axe.

La direction que prend effectivement l'axe de la molécule est donc celle de la résultante de X et de D.

Soit (*fig.* 5) APB la section d'une sphère dont le rayon représente, à une certaine échelle, la force D, et soit OP un rayon parallèle à l'axe d'une molécule déterminée dans sa position primitive.

Soit SO représentant à la même échelle la force magnétisante X,

que l'on suppose agir de S vers O. Si la molécule est soumise à la force X dans la direction de SO, et à une force D dans une direction parallèle à OP, direction primitive de l'axe, son axe se placera dans la direction de la résultante SP de X et de D.

Puisque les axes des molécules sont, à l'origine, orientés dans toutes les directions, P peut être indifféremment un point quelconque de la sphère. Sur la *fig.* 5, où X est plus petit que D, la position finale SP de l'axe peut être dans une direction quelconque, mais non indifféremment, car il y a plus de molécules ayant leurs axes tournés vers A que vers B. Dans la *fig.* 6, où X est plus grand que D, les axes des molécules seront tous compris à l'intérieur du cône STT', tangent à la sphère.

Fig. 5.

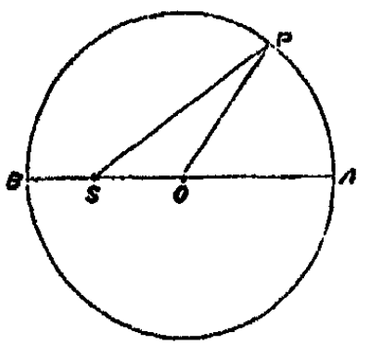
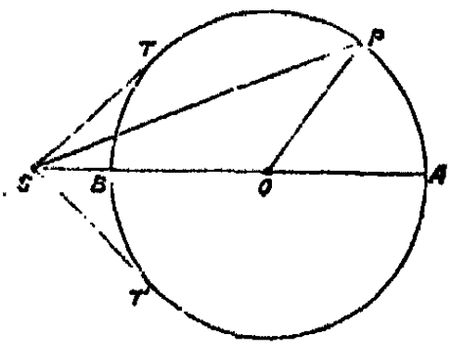


Fig. 6.



Il y a donc deux cas différents, suivant que X est plus petit ou plus grand que D.

Soient

$\alpha = AOP$ l'inclinaison primitive de l'axe d'une molécule sur l'axe des x;

$\theta = ASP$ l'inclinaison de cet axe quand il a été dévié par la force X;

$\beta = SPO$ l'angle de déviation;

$SO = X$ la force magnétisante;

$OP = D$ la force qui tend à ramener la molécule à sa position primitive;

$SP = R$ la résultante de X et de D;

m le moment magnétique de la molécule.

Le moment du couple dû à X, qui tend à diminuer l'angle θ, est

$$mL = mX \sin\theta,$$

et le moment du couple dû à D, qui tend à augmenter l'angle θ, est

$$mL = mD \sin\beta.$$

Égalant ces valeurs et nous souvenant que $\beta = \alpha - \theta$, nous trouvons

$$\tang\theta = \frac{D\sin\alpha}{X + D\cos\alpha}, \tag{1}$$

qui détermine la direction de l'axe après la déviation.

Nous avons à trouver maintenant l'intensité de l'aimantation produite dans la masse par la force X; et, pour cela, il faut décomposer le moment magnétique de chaque molécule, suivant la direction des x, et ajouter ensemble toutes ces composantes.

La composante du moment d'une molécule suivant la direction des x est

$$m\cos\theta.$$

Le nombre des molécules, dont l'inclinaison primitive était comprise entre α et $\alpha + d\alpha$, est

$$\frac{n}{2}\sin\alpha\, d\alpha.$$

Nous avons donc à intégrer

$$I = \int_0^{\pi} \frac{mn}{2}\cos\theta\sin\alpha\, d\alpha, \tag{2}$$

en nous souvenant que θ est une fonction de α.

Nous pouvons exprimer θ et α en fonction de R : l'expression à intégrer devient

$$\frac{mn}{2}\,\frac{1}{2X^2D}\,(R^2 + X^2 - D^2)\,dR, \tag{3}$$

dont l'intégrale générale est

$$\frac{mnR}{12X^2D}\,(R^2 + 3X^2 - 3D^2) + C. \tag{4}$$

Dans le premier cas, celui où X est plus petit que D, les limites de l'intégration sont $R = D + X$ et $R = D - X$. Dans le second cas, où X est plus grand que D, les limites sont $R = X + D$ et $R = X - D$.

Quand X est plus petit que D,

$$I = \frac{2}{3}\,\frac{mn}{D}\,X; \tag{5}$$

quand X est égal à D,

$$I = \tfrac{2}{3}mn; \tag{6}$$

quand X est plus grand que D,

$$I = mn\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{D^2}{X^2}\right), \tag{7}$$

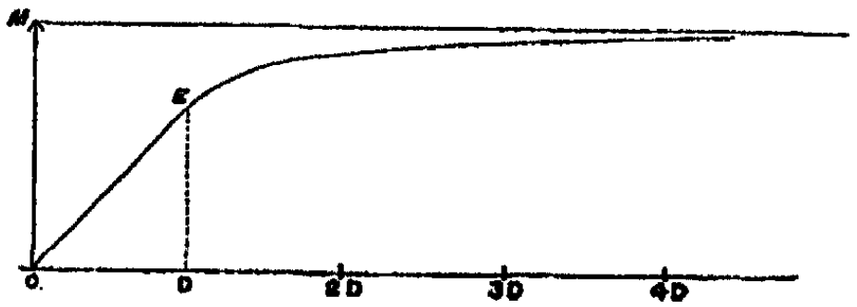
et quand X devient infini,

$$I = mn. \tag{8}$$

D'après cette théorie, qui a été adoptée par Weber (¹), pendant que la force magnétisante croît de zéro à D, l'aimantation augmente dans la même proportion. Lorsque la force magnétisante atteint la valeur D, l'aimantation atteint les $\frac{2}{3}$ de sa valeur limite. Quand la force magnétisante est encore augmentée, l'aimantation, au lieu de grandir indéfiniment, tend vers une limite finie.

Cette loi d'aimantation est exprimée par la *fig.* 7, où la force magnétisante est comptée de O vers la droite, et où l'aimantation est

Fig. 7.



portée en ordonnée. Les résultats de Weber lui-même offrent un accord satisfaisant avec cette loi. Il est probable pourtant que la valeur de D n'est pas la même pour toutes les molécules d'un même morceau de fer; de sorte que la transition de la ligne droite qui va de O en E, à la courbe au delà de E, n'est peut-être pas aussi brusque qu'on l'a figuré ici.

444. Sous cette forme, la théorie ne rend pas compte du magnétisme résiduel dont on constate l'existence après avoir supprimé la force magnétisante. C'est pourquoi j'ai cru désirable d'examiner les résultats que donnerait l'introduction d'une nouvelle hypothèse relative aux conditions dans lesquelles la position d'équilibre d'une molécule peut subir une modification permanente.

(¹) Il doit y avoir quelque erreur d'inadvertance dans la formule donnée par Weber, comme résultat de cette intégration, pour laquelle il ne donne pas la marche suivie (*Trans. Acad. Sax.*, t. I, p. 572, 1852; ou *Pogg. Ann.*, t. LXXXVII, p. 167, 1852). Sa formule est

$$I = mn \frac{X}{\sqrt{X^2 + D^2}} \frac{X^4 + \frac{7}{6} X^2 D^2 + \frac{2}{3} D^4}{X^4 + X^2 D^2 + D^4}.$$

Supposons que l'axe d'une molécule magnétique puisse revenir à sa position primitive après que la force déviatrice a cessé d'agir tant que l'angle de déviation β est inférieur à β_0, mais que, pour une déviation β supérieure à β_0, il ne puisse plus revenir à sa position antérieure et conserve une déviation $\beta - \beta_0$, qu'on peut appeler l'*écart permanent de la molécule*.

On ne doit pas regarder cette hypothèse sur la loi de la déviation moléculaire comme reposant sur aucune connaissance exacte de la structure intime des corps; on l'a adoptée, dans l'ignorance où nous sommes du véritable état des choses, pour aider l'imagination à poursuivre les spéculations dont Weber a donné l'idée.

Soit

$$L = D \sin \beta_0. \tag{9}$$

Si le moment du couple qui agit sur une molécule est inférieur à mL, il n'y a pas de déviation permanente; mais, s'il est supérieur à L, il y a un changement permanent de la position d'équilibre.

Pour suivre les conséquences de cette hypothèse, décrivons une sphère de centre O et de rayon $OL = L$.

Tant que X reste inférieur à L, tout se passe comme dans le cas qu'on vient d'examiner; mais, dès que X surpasse L, il commence à se produire une déviation permanente de certaines molécules.

Prenons le cas de la *fig.* 8, où X est plus grand que L, mais plus

Fig. 8.

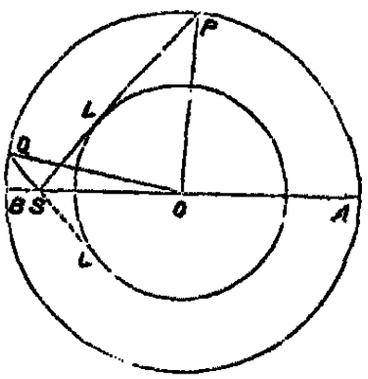
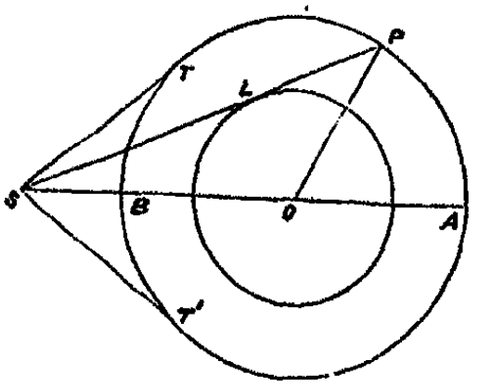


Fig. 9.



petit que D. De S comme sommet, menons un cône tangent à la sphère L, qui coupe en P et en Q la sphère D. Si, dans sa position primitive, l'axe d'une molécule était compris entre OA et OP ou entre OB et OQ, il est dévié d'un angle inférieur à β_0 et ne prend pas de déviation permanente; mais, si l'axe de la molécule se trouvait primitivement entre OP et OQ, un couple, dont le moment est supérieur à L, agit sur lui et le dévie dans la position SP; et, quand la

force de déviation cesse d'agir, il ne reprend point sa position primitive, mais reste d'une manière permanente dans la direction OP.

Posons

$$L = X \sin \theta_0,$$

où $\theta_0 =$ PSA ou QSB; toutes les molécules dont les axes auraient eu, dans la première hypothèse, des inclinaisons θ comprises entre θ_0 et $\pi - \theta_0$, auront l'inclinaison θ_0 tant qu'agit la force X.

Donc, pendant le temps qu'agit la force X, les molécules dont les axes sont compris à l'intérieur des deux nappes du cône qui a θ_0 pour demi-angle au sommet seront disposées comme dans le premier cas; mais toutes les molécules dont les axes seraient, dans la première théorie, extérieurs aux nappes du cône, éprouveront une déviation permanente, en sorte que leurs axes formeront un manteau serré autour de la nappe du cône qui est tournée vers A.

Quand X croît, le nombre des molécules qui appartiennent au cône décrit autour de B décroît constamment, et, quand X devient égal à D, toutes les molécules sont arrachées de leur position d'équilibre et sont poussées dans la frange du cône qui entoure A; de sorte que, quand X devient plus grand que D, toutes les molécules font partie du cône qui entoure A ou de son manteau.

La force X étant supprimée, tout revient à son état primitif, dans le cas où X est plus petit que L. Si X est compris entre L et D, il y a autour de A un cône dont l'angle est

$$AOP = \theta_0 + \beta_0,$$

et autour de B un autre cône dont l'angle est

$$BOQ = \theta_0 - \beta_0,$$

à l'intérieur desquels les axes des molécules ont une distribution uniforme. Mais toutes les molécules, dont les axes avaient primitivement une direction extérieure à ces deux cônes, ont été arrachées de leur position primitive, et forment un manteau autour du cône qui entoure A.

Si X est plus grand que D, le cône qui entoure B disparaît entièrement, et les molécules qui le formaient donnent lieu à un manteau autour de A et sont inclinées de l'angle $\theta_0 + \beta_0$.

445. Traitant ce cas de la même manière que plus haut (1), nous

(1) Les résultats indiqués dans le texte peuvent s'obtenir, à une légère exception près, par les opérations données plus loin, la théorie modifiée du § 441 s'énon-

trouvons, pour l'intensité de l'aimantation temporaire pendant que la force X agit sur un morceau de fer que l'on suppose n'avoir jamais été aimanté :

Pour X plus petit que L,

$$I = \tfrac{1}{3} M \frac{X}{D};$$

çant comme il suit : l'axe d'une molécule magnétique revient à sa position primitive quand la force de déviation cesse d'agir, s'il a été dévié d'un angle β plus petit que β_1; mais, si la déviation est supérieure à β_1, la force qui tend à empêcher la déviation est vaincue, et la molécule peut être déviée dans la même direction que les molécules dont la déviation est β_0; et, quand la force de déviation cesse d'agir, la molécule prend une direction parallèle à celle des molécules dont la déviation était β_0. Cette direction peut être appelée l'*écart permanent des molécules*.

Dans le cas où $X > L$ et $< D$, l'expression I du moment magnétique est formée de deux parties : la première est due aux molécules intérieures aux cônes AOP, BOQ, et s'obtient exactement comme celle du § 443, en tenant le compte voulu des limites de l'intégration. En nous reportant à la *fig.* 8, nous trouvons, d'après l'énoncé de la théorie précédente, que la seconde partie est

$$\tfrac{1}{2} mn \cos \mathrm{ASP} \frac{\text{projection de QP sur BA}}{\mathrm{OP}}.$$

L'ensemble des deux parties donne, après réduction, le résultat énoncé dans le texte.

Si $X > D$, l'intégrale est encore formée de deux parties, dont l'une doit être prise sur le cône AOP comme au § 443. La seconde partie est (*fig.* 9)

$$\tfrac{1}{2} mn \cos \mathrm{ASP} \frac{\text{projection de BP sur BA}}{\mathrm{OP}}.$$

Dans ce cas, la valeur de I, après réduction, diffère de celle qui est donnée dans le texte par le troisième terme : nous avons alors $-\frac{1}{6}\frac{D^2}{X^2}$ au lieu de $-\frac{1}{6}\frac{D}{X}$.

L'effet de ce changement sur le Tableau des valeurs numériques données dans le texte sera que, pour X = 6, 7, 8, les valeurs correspondantes de I seront 889, 917, 930. Ces modifications ne changent pas le caractère général de la courbe d'aimantation temporaire donnée à la *fig.* 10.

La valeur de I', dans le cas de la *fig.* 8, est

$$\tfrac{1}{2} mn \left(\int_0^{\mathrm{AOP}} \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha + \int_{\mathrm{AOQ}}^{\pi} \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha + \cos \mathrm{AOP} \frac{\text{projection de QP sur BA}}{\mathrm{OP}} \right).$$

On trouverait de même la valeur de I' dans le cas de la *fig.* 9.

pour X égal à L,

$$I = \frac{2}{3} M \frac{L}{D};$$

pour X compris entre L et D,

$$I = M\left[\frac{2}{3}\frac{X}{D} + \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right)\left(\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{X^2}{D^2} - \frac{L^2}{D^2}}\right)\right];$$

pour X égal à D,

$$I = M\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right];$$

pour X plus grand que D,

$$I = M\left[\frac{1}{3}\frac{X}{D} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{D}{X} + \frac{(D^2 - L^2)^{\frac{3}{2}}}{6X^2 D} - \frac{\sqrt{X^2 - L^2}}{6X^2 D}(2X^2 - 3XD + L^2)\right];$$

pour X infini,

$$I = M.$$

Quand X est plus petit que L, l'aimantation suit la première loi et est proportionnelle à la force magnétisante. Dès que X surpasse L, l'aimantation croît plus rapidement, parce que les molécules commencent à passer d'un cône sur l'autre; mais cet accroissement rapide s'arrête bientôt, parce que le nombre des molécules qui forment le cône négatif diminue, et finalement l'aimantation atteint sa valeur limite M.

Si nous admettions que les valeurs de L et de D sont différentes pour les différentes molécules, nous obtiendrions des résultats où les différentes phases de l'aimantation ne seraient pas si distinctement tranchées.

L'aimantation résiduelle I′, produite par la force magnétisante X et observée après que cette force a cessé d'agir, varie comme il suit :

Pour X plus petit que L, pas d'aimantation résiduelle;

Pour X compris entre L et D,

$$I' = M\left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)\left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right);$$

Pour X égal à D,

$$I' = M\left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^2;$$

Pour X plus grand que D,

$$I' = \frac{1}{2} M\left(1 - \frac{L^2}{XD} + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right)^2;$$

Pour X infini,

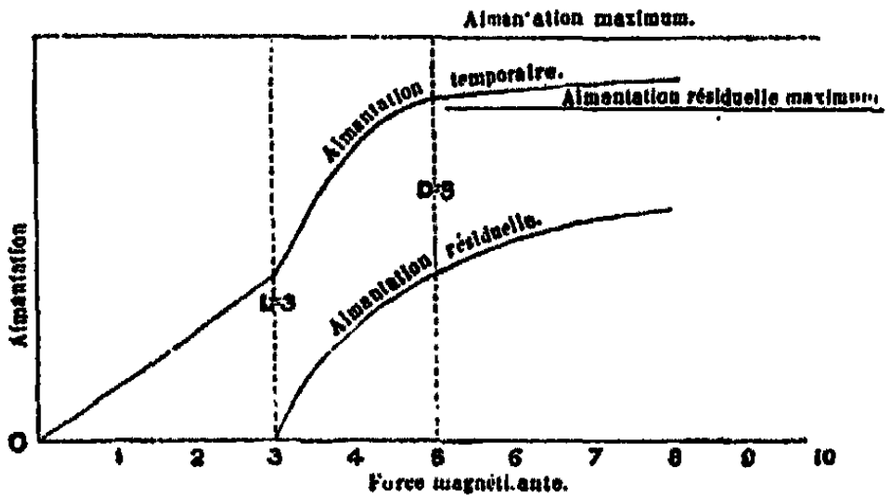
$$I' = \tfrac{1}{2} M \left(1 + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right)^2.$$

Si nous faisons M = 1000, L = 3 et D = 5, nous trouvons les valeurs suivantes de l'aimantation temporaire et de l'aimantation résiduelle :

Force magnétisante. X.	Aimantation temporaire. I.	Aimantation résiduelle. I'.
0	0	0
1	133	0
2	267	0
3	400	0
4	729	280
5	837	410
6	864	485
7	882	537
8	897	574
∞	1000	810

Ces résultats sont représentés sur la *fig.* 10.

Fig. 10.



La courbe d'aimantation temporaire est d'abord une ligne droite de X = 0 à X = L; ensuite elle s'élève plus rapidement jusqu'à X = D; et, à mesure que X croît, elle s'approche de son asymptote horizontale.

La courbe d'aimantation résiduelle commence pour X = L, et tend vers une asymptote située à une hauteur égale à 0,81 M.

Il faut se rappeler que le magnétisme résiduel que l'on vient de calculer se rapporte au cas où, après suppression de la force magnétisante, il n'y a pas de force de désaimantation due à la distribution du magnétisme sur le corps. Les calculs ne s'appliquent donc qu'au seul cas de corps très allongés aimantés longitudinalement. Pour des corps courts et épais, le magnétisme résiduel est diminué par la réaction du magnétisme libre, comme si l'on faisait agir sur lui une force magnétisante de sens inverse.

440. La valeur scientifique d'une telle théorie, où l'on introduit tant d'hypothèses, où l'on fait entrer tant de constantes dont on peut disposer, ne saurait s'estimer uniquement par sa concordance numérique avec certaines séries d'expériences. Si elle a quelque intérêt, c'est parce qu'elle nous permet de concevoir ce qui se passe dans un morceau de fer pendant l'aimantation. Pour mettre cette théorie à l'épreuve nous allons l'appliquer au cas d'un morceau de fer soumis d'abord à une force magnétisante X_0, et soumis ensuite à une nouvelle force magnétisante X_1.

Si la force magnétisante X_1 agit dans le même sens que X_0, sens que nous appellerons la *direction positive*, et si elle est plus petite que X_0, elle ne produira point de déplacement permanent des molécules, et, quand elle cessera d'agir, l'aimantation résiduelle sera la même qu'avait produite X_0. Si X_1 est plus grande que X_0, elle produira exactement le même effet que si X_0 n'avait pas agi auparavant.

Mais supposons que X_1 agisse dans la direction négative et que

$$X_0 = L \operatorname{cosec} \theta_0, \qquad X_1 = -L \operatorname{cosec} \theta_1,$$

Quand X_1 croît numériquement, θ_1 diminue; les premières molécules sur lesquelles X_1 produira une déviation permanente sont celles qui forment le manteau du cône autour de A; ces molécules, quand elles ne sont pas déviées, ont une inclinaison $\theta_0 + \beta_0$.

Dès que $\theta_1 - \beta_0$ devient inférieur à $\theta_0 + \beta_0$, la désaimantation commence. Puisque, à cet instant, $\theta_1 = \theta_0 + 2\beta_0$, la force X nécessaire pour produire la désaimantation est inférieure à la force X_0 qui a produit l'aimantation.

Si les valeurs de D et de L étaient les mêmes pour toutes les molécules, pour le plus léger accroissement de X_1, tout le manteau de molécules dont les axes ont l'inclinaison $\theta_0 + \beta_0$ serait jeté dans une autre position où les axes seraient inclinés de $\theta_1 + \beta_0$ sur l'axe négatif OB.

Quoique la désaimantation ne se produise pas d'une manière aussi soudaine, elle est cependant assez rapide pour que cette manière d'expliquer les faits puisse y trouver une confirmation.

Supposons qu'en donnant à la force inverse X_1 une valeur convenable on ait exactement désaimanté le morceau de fer.

Les axes des molécules ne sont plus disposés indifféremment dans tous les sens, comme dans un morceau de fer qui n'a jamais été aimanté, mais ils forment trois groupes.

1° A l'intérieur d'un cône dont le demi-angle au sommet est $\theta_1 - \beta_0$ et qui entoure le pôle positif, les axes des molécules restent dans leur position primitive.

2° De même dans un cône dont le demi-angle au sommet est $\theta_0 - \beta_0$, qui entoure le pôle négatif.

3° Les directions des axes des autres molécules forment une nappe conique entourant le pôle négatif dont l'inclinaison est $\theta_1 + \beta_0$.

Quand X_0 est plus grand que D, le second groupe disparaît. Quand X_1 est plus grand que D, le premier groupe disparaît aussi.

Donc l'état du fer qui paraît désaimanté est différent de celui du fer qui n'a jamais été aimanté.

Pour montrer qu'il en est ainsi, considérons l'effet d'une force magnétisante X_2, agissant dans la direction positive ou la direction négative; le premier effet permanent que produira cette force sera sur les molécules du troisième groupe, dont les axes font avec l'axe négatif des angles $\theta_1 + \beta_0$.

Si la force X_2 agit dans le sens négatif, elle commence à produire un effet permanent aussitôt que $\theta_2 + \beta_0$ devient inférieur à $\theta_1 + \beta_0$, c'est-à-dire dès que X_2 devient plus grand que X_1. Si elle agit dans le sens positif, elle commence à réaimanter le fer dès que $\theta_2 - \beta$ est inférieur à $\theta_1 + \beta_0$, c'est-à-dire quand $\theta_2 = \theta_1 + 2\beta_0$ ou quand X_2 est encore bien inférieur à X_1.

De notre hypothèse il résulte donc que :

Quand une pièce de fer a été aimantée par une force X_0, son aimantation ne peut être accrue que par une force supérieure à X_0. Au contraire, une force inverse inférieure à X_0 suffit pour diminuer son aimantation.

Si le fer a été exactement désaimanté par la force inverse X_1, il ne peut être aimanté dans le sens inverse que par une force supérieure à X_1; mais une force positive inférieure à X_1 suffit pour commencer à réaimanter le fer dans la direction primitive.

Ces résultats sont d'accord avec les observations de Ritchie (1), Jacobi (2), Marianini (3) et Joule (4).

Un exposé très complet des relations qui existent entre l'aimantation du fer et de l'acier et les forces magnétiques ou les tensions mécaniques est donné par Wiedemann, dans son *Galvanismus*. Par une comparaison détaillée des effets de l'aimantation et de ceux de la tension, il montre que les notions d'élasticité et de plasticité auxquelles nous sommes conduits par les expériences sur la torsion temporaire et la torsion permanente des fils s'appliquent également à l'aimantation temporaire et à l'aimantation permanente du fer et de l'acier.

447. Matteucci (5) a reconnu que, si une barre de fer dur est soumise à l'extension pendant que l'on fait agir sur elle une force magnétisante, son aimantation temporaire augmente. Ce résultat a été confirmé par Wertheim. Le magnétisme est diminué par l'extension pour les barreaux de fer doux.

Le magnétisme permanent d'un barreau augmente quand on soumet ce barreau à l'extension et diminue quand on le comprime.

Donc, si un morceau de fer aimanté d'abord dans une certaine direction est ensuite soumis à l'extension dans une autre direction, la direction de l'aimantation tend à se rapprocher de la direction de l'extension; et, s'il est soumis à la compression, la direction de l'aimantation tend à devenir normale à la direction de la compression.

Fig. 11.

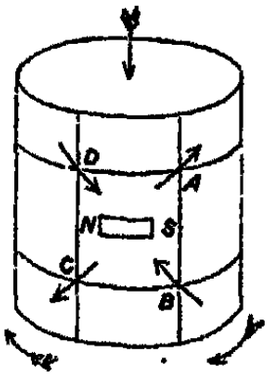
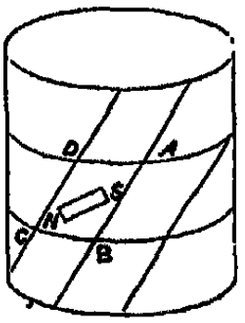


Fig. 12.



(1) *Phil. Mag.*, 1833.
( ) *Pogg. Ann.*, 1834.
(3) *Annales de Chimie et de Physique*, 1846.
(4) *Phil. Trans.*, 1855; p. 287.
(5) *Annales de Chimie et de Physique*, 1858.

C'est ce qui explique les résultats d'une expérience de Wiedemann. Si l'on fait passer dans un fil vertical un courant de haut en bas, et si, pendant le passage du courant ou après qu'il a cessé, on fait subir au fil une torsion à droite, l'extrémité inférieure devient un pôle nord.

Ici le courant de haut en bas aimante chaque partie du fil dans une direction tangentielle, ainsi que l'indiquent les lettres NS (*fig.* 11).

La torsion du fil à droite détermine l'extension de la partie ABCD (*fig.* 12), suivant la diagonale AC et sa compression suivant la diagonale BD. La direction de l'aimantation tend donc à s'approcher de AC et à s'écarter de BD; et c'est ainsi que le bout inférieur devient un pôle nord, et le bout supérieur un pôle sud.

Effet de l'aimantation sur les dimensions de l'aimant.

448. En 1842, Joule (1) a reconnu qu'un barreau de fer s'allonge quand on l'aimante en faisant passer un courant électrique dans une bobine qui l'entoure. Plus tard (2), il a montré, en plaçant le barreau de fer dans un tube de verre plein d'eau, que le volume du fer n'augmente pas par l'aimantation : il en a conclu que les dimensions transversales diminuaient.

Enfin, il a fait passer un courant électrique par l'axe d'un tube de fer, et l'a fait revenir extérieurement au tube, de façon à enfermer celui-ci dans une sorte de solénoïde magnétique dont l'aimantation était perpendiculaire à son axe, et, dans ce cas, il a trouvé que la longueur de l'axe du tube diminue.

Il a reconnu qu'une tige de fer soumise à une pression longitudinale s'allonge lorsqu'on l'aimante; mais, si la tige est soumise à une tension longitudinale considérable, l'effet de l'aimantation est de la raccourcir.

C'était le cas pour un fil d'un quart d'inch de diamètre ($0^{cm},635$) soumis à une tension de plus de 600 livres (224^{kg} environ).

Un fil d'acier dur se raccourcit toujours par l'aimantation, qu'il soit soumis à une tension ou à une pression. Le changement de longueur ne dure qu'autant que la force magnétisante agit, et l'on n'observe point de variation de longueur due à l'aimantation permanente de l'acier.

Joule a trouvé que l'allongement des fils de fer est à peu près pro-

---

(1) *Annales d'Électricité* de Sturgeon, t. VIII, p. 219.

(2) *Phil. Mag.*, 1847.

portionnel au carré de leur aimantation effective, de sorte que le premier effet du courant de désaimantation est de raccourcir le fil.

D'autre part, il a trouvé que le raccourcissement des fils tendus et de l'acier varie proportionnellement au produit de l'aimantation et du courant magnétisant.

Wiedemann a trouvé qu'un fil vertical étant aimanté, le pôle sud en haut, et un courant étant envoyé de haut en bas dans le fil, l'extrémité inférieure, si elle est libre, se tord dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, ainsi qu'on l'a vu plus haut, ou, en d'autres termes, que le fil se tord comme une vis à droite, si la relation entre le courant longitudinal et le courant d'aimantation est une relation *à droite*.

Dans ce cas, l'aimantation due à l'action du courant sur l'aimantation précédemment existante est dans le sens d'une vis à droite entourant le fil. Cette torsion indiquerait donc que, quand le fil est aimanté, il s'allonge dans le sens de l'aimantation et se contracte dans les directions perpendiculaires; ce qui est d'accord avec les résultats de Joule.

Pour plus de détails sur la théorie de l'aimantation, *voir* § 832-845.

CHAPITRE VII.

MESURES MAGNÉTIQUES.

449. Les principales mesures magnétiques sont la détermination de l'axe magnétique et du moment magnétique d'un aimant, de la direction et de la grandeur de la force magnétique en un point donné.

Puisque ces mesures se font près de la surface de la Terre, les aimants sont toujours soumis à l'action de la gravité et à celle du magnétisme terrestre, et, comme ils sont faits d'acier, leur aimantation est en partie permanente et en partie induite. Le magnétisme permanent est modifié par les changements de température, par une induction énergique ou par des chocs violents; l'aimantation temporaire change avec chaque variation de la force magnétique extérieure.

La façon la plus commode d'observer la force qui agit sur un aimant consiste à rendre l'aimant mobile librement autour d'un axe vertical. C'est ce que l'on fait dans les boussoles ordinaires, en suspendant l'aimant en équilibre sur un pivot vertical. Plus la pointe du pivot est fine, et plus est petit le moment du frottement qui contrarie l'action de la force magnétique. Pour des observations plus délicates, on suspend l'aimant par un fil formé d'une fibre de soie sans torsion, simple ou repliée parallèlement sur elle-même un nombre de fois suffisant, chaque brin supportant une fraction du poids aussi égale que possible. La force de torsion d'un tel fil est bien inférieure à celle d'un fil de métal de même résistance, et l'on peut la calculer en fonction de l'azimut observé de l'aimant, ce qui n'est pas le cas pour la force due au frottement d'un pivot.

On peut élever ou abaisser le fil de suspension en agissant sur une vis horizontale qui tourne dans un écrou fixe : le fil s'enroule dans le filet de la vis, de façon à rester toujours dans la même ligne verticale pendant que la vis tourne.

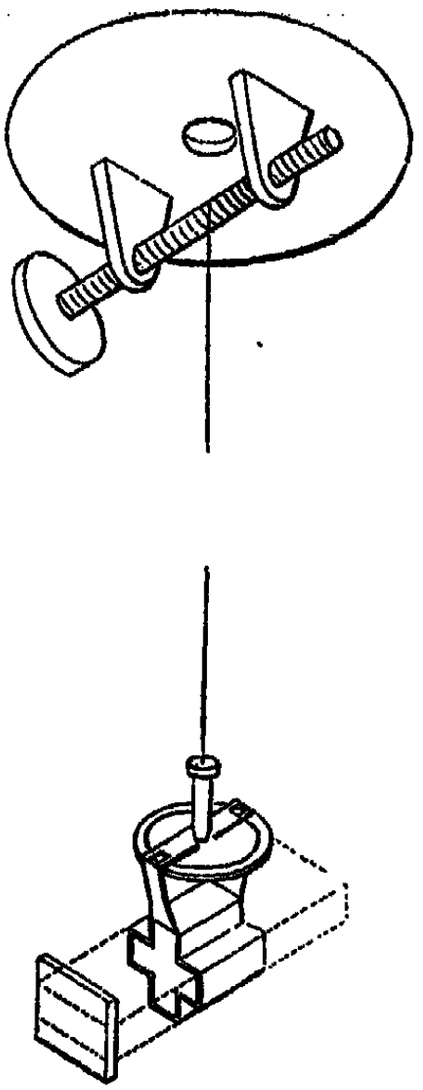
Le fil de suspension porte un petit cercle divisé horizontal, que l'on appelle *cercle de torsion*, et un étrier muni d'un index qu'on peut placer en coïncidence avec telle division que l'on veut du cercle de torsion. L'étrier est fait de telle sorte que l'on puisse y fixer l'aimant, l'axe horizontal et l'une de ses faces tournée vers le haut.

Pour déterminer le zéro de torsion, on place dans l'étrier un corps

non magnétique, de même poids que l'aimant, et l'on observe la position du cercle de torsion une fois en équilibre.

L'aimant lui-même est un morceau d'acier trempé aigre. D'après Gauss et Weber, sa longueur doit être égale (*fig.* 13) au moins à

Fig. 13.



huit fois sa plus grande dimension transversale. Cela est nécessaire quand on tient surtout à la fixité de la direction de l'axe magnétique dans l'aimant. Si l'on veut obtenir des mouvements rapides, l'aimant peut être plus court; et même, pour observer des changements brusques de force magnétique, il peut être avantageux d'employer un barreau aimanté transversalement et ayant sa plus grande dimension suivant la verticale (1).

(1) Joule, *Proc. Phil. Soc. Manchester*, 29 novembre 1864.

430. L'aimant est pourvu d'un dispositif qui permet de déterminer sa position angulaire. Pour les observations ordinaires, on taille en pointe ses extrémités qui se meuvent au-dessus d'un cercle divisé, et on lit leur position sur cette graduation en plaçant l'œil dans le plan déterminé par le fil de suspension et la pointe de l'aiguille.

Pour des observations plus précises, on fixe à l'aimant un miroir plan, de façon que la normale au miroir coïncide, autant que possible, avec l'axe d'aimantation. C'est la méthode de Gauss et Weber.

Une autre méthode consiste à fixer à un des bouts de l'aimant une lentille, et à l'autre une échelle gravée sur verre, la distance de l'échelle à la lentille étant égale à la distance focale principale de la lentille. Il faut que la ligne droite qui joint le zéro de l'échelle au centre optique de la lentille coïncide, autant que possible, avec l'axe magnétique.

Comme ces méthodes optiques ont une grande importance dans un grand nombre de recherches scientifiques pour déterminer la position angulaire d'un système suspendu, nous allons en examiner, une fois pour toutes, la théorie mathématique.

Théorie de la méthode du miroir.

Nous supposerons que l'appareil dont on veut déterminer la position angulaire puisse tourner autour d'un axe vertical. Cet axe est généralement formé par un fil de suspension, métallique ou autre. Le miroir doit être exactement plan, de façon qu'à une distance de plusieurs mètres on y puisse voir distinctement par réflexion une échelle divisée en millimètres.

La normale au milieu du miroir doit passer par l'axe de suspension et être rigoureusement horizontale. Nous désignerons cette normale sous le nom de *ligne de collimation de l'appareil*.

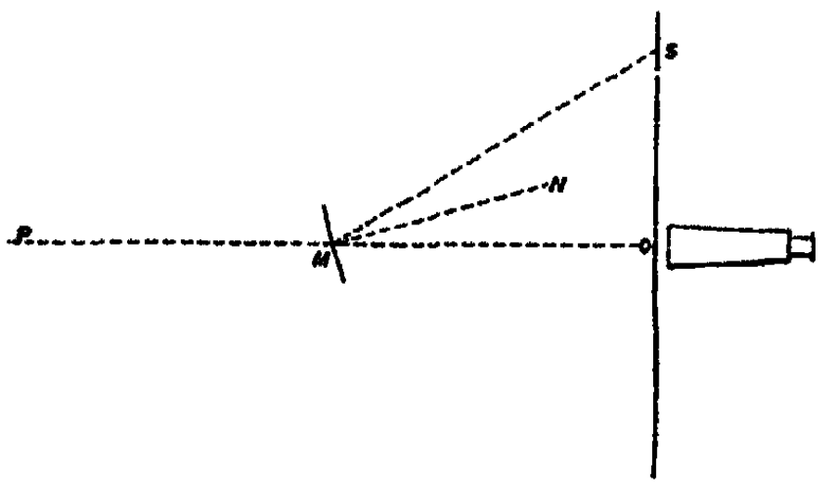
Ayant déterminé grossièrement la direction moyenne de la ligne de collimation dans les expériences que l'on doit faire, on installe, à une distance convenable, une lunette en avant et un peu au-dessus du miroir.

Cette lunette peut se mouvoir dans un plan vertical : elle est pointée sur le fil de suspension, juste au-dessus du miroir, et l'on établit sur la ligne de visée un repère fixe, situé à une distance horizontale de l'objectif égale au double de la distance de l'objectif au miroir : si cela est possible, on dispose l'appareil de façon que ce repère se trouve sur un mur ou sur quelque autre objet fixe. Pour voir à la fois dans la lunette le repère et le fil de suspension, on peut placer sur l'objectif

un opercule présentant une fente suivant un diamètre vertical, que l'on enlève pour les autres observations. On règle alors la lunette de manière à voir distinctement le repère en coïncidence avec le réticule vertical, puis on place un fil à plomb devant l'objectif, tout près de son centre optique, de façon qu'il pende plus bas que la lunette. Au-dessous de celle-ci, et juste derrière le fil à plomb, on installe une échelle divisée en parties égales, de façon qu'elle soit coupée en son milieu, et à angle droit, par le plan passant par le repère, le fil de suspension et le fil à plomb. La somme des hauteurs de l'échelle et de l'objectif au-dessus du sol doit être égale au double de la hauteur du miroir. Si la division de l'échelle où passe le fil à plomb est vue en coïncidence avec le réticule de la lunette, la ligne de collimation du miroir est comprise dans le plan du repère et du centre optique de l'objectif. Si le réticule coïncide avec une autre division de l'échelle, voici comment on trouve la position angulaire de la ligne de collimation.

Prenons pour plan horizontal le plan du papier, et projetons les divers points sur ce plan. Soient O le centre de l'objectif de la lunette et P le repère fixe; P et le réticule sont des foyers conjugués par rapport à l'objectif; soit M le point où OP coupe le plan du miroir, et soit MN la normale au miroir. OMN $= \theta$ est l'angle que la ligne de

Fig. 14.



collimation fait avec le plan fixe. Soit MS une ligne dans le plan de OM et de MN, telle que NMS soit égal à OMN : S sera la partie de l'échelle que l'on verra par réflexion dans le miroir en coïncidence avec le réticule. Mais, puisque MN est horizontal, les angles projetés OMN et NMS de la *fig.* 14 sont égaux, et OMS $= 2\theta$.

Donc

$$OS = OM \operatorname{tang} 2\theta.$$

Nous avons donc à mesurer OM en divisions de l'échelle; si s_0 est la division de l'échelle qui coïncide avec le fil à plomb, et s celle que l'on a observée,

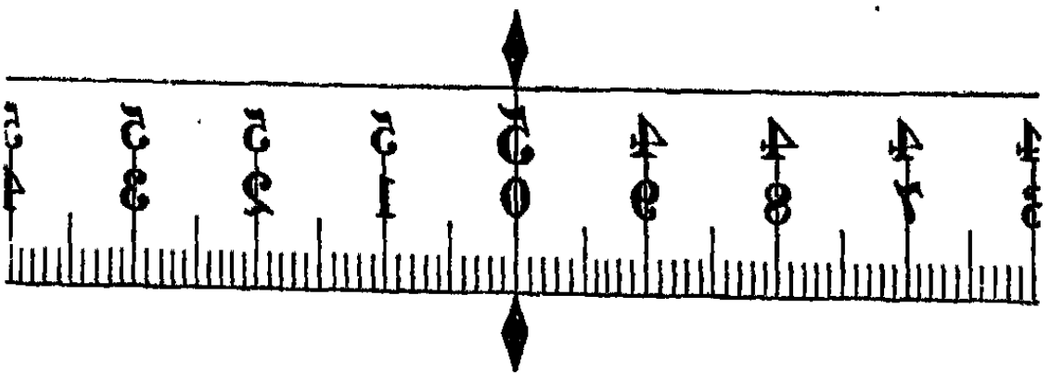
$$s - s_0 = \mathrm{OM} \tang 2\theta,$$

d'où l'on peut tirer θ. Quand on mesure OM, il faut se rappeler que si le miroir est en verre argenté par derrière, l'image virtuelle de la surface réfléchissante est en arrière de la face antérieure du verre à une distance égale à $\frac{\ell}{\mu}$, où ℓ est l'épaisseur du verre et μ son indice de réfraction.

Nous devons aussi nous rappeler que, si la ligne de suspension ne passe pas par le point de réflexion, la position de M change avec θ. Aussi est-il bon, quand on le peut, de faire coïncider le centre du miroir avec la ligne de suspension.

Il est encore utile, surtout si l'on doit observer des mouvements angulaires considérables, de donner à l'échelle la forme d'un cylindre circulaire creux, ayant pour axe la ligne de suspension. Les angles s'observent de suite en mesure circulaire, sans que l'on ait recours à une Table de tangentes. L'échelle doit être disposée avec soin pour que l'axe du cylindre coïncide avec le fil de suspension. Les nombres inscrits sur l'échelle doivent toujours courir dans le même sens, d'un bout à l'autre, pour éviter les lectures négatives. La *fig.* 15 représente

Fig. 15.



le milieu d'une échelle destinée à servir avec un miroir et une lunette renversant les images.

Cette méthode est la meilleure quand les mouvements à observer sont lents. L'observateur, assis devant la lunette, voit l'image de l'échelle se déplacer vers la droite ou vers la gauche en défilant devant le réticule. Avec une horloge à côté de lui, il peut noter l'instant du passage d'une division donnée de l'échelle, ou bien la division qui

passe à un instant donné marqué par un battement de l'horloge, ou encore les limites extrêmes de chaque oscillation.

Si le mouvement est plus rapide, il devient impossible de lire les divisions de l'échelle, excepté au moment de repos qui marque la fin d'une oscillation. On peut placer en une division donnée de l'échelle une marque bien visible, et noter l'instant du passage de cette marque.

Si l'appareil est très léger et les forces très variables, le mouvement est si prompt et si brusque que des observations à la lunette ne seraient plus possibles. Dans ce cas, l'observateur regarde directement l'échelle et y observe l'image d'un fil projeté au moyen d'une lampe.

Il est clair que, puisque l'image de l'échelle réfléchie par le miroir et réfractée par l'objectif coïncidait avec le réticule, l'image du réticule suffisamment éclairé coïncidera avec l'échelle. Pour observer de cette manière, on fait l'obscurité dans la chambre et l'on projette sur le réticule les rayons concentrés d'une lampe dans la direction de l'objectif. On voit sur l'échelle une tache lumineuse brillante traversée par l'ombre du fil. On peut suivre de l'œil ses mouvements, remarquer et lire ensuite à loisir les divisions de l'échelle auxquelles elle parvient. Si l'on désire noter le moment du passage de la tache en un point donné de l'échelle, on peut y placer une épingle ou un morceau de fil métallique brillant, qui jettera un éclat de lumière au moment du passage.

Si l'on remplace la tache et le fil qui la traverse par un diaphragme percé d'un petit trou, l'image se réduit à un petit point lumineux se mouvant à droite et à gauche sur l'échelle; et, si l'on remplace l'échelle par un cylindre qu'un mouvement d'horlogerie fait tourner autour d'un axe horizontal, et qu'on recouvre de papier photographique, le point lumineux trace une courbe que l'on peut plus tard rendre visible. Chaque abscisse de la courbe répond à un instant déterminé, et l'ordonnée indique la position angulaire du miroir à cet instant. C'est ainsi que l'on a organisé à Kew et dans d'autres observatoires un système d'enregistrement continu de tous les éléments du magnétisme terrestre.

Dans certains cas, on se passe de la lunette : un fil vertical est éclairé par une lampe placée derrière lui, et le miroir, de forme concave, forme sur l'échelle l'image du fil, qui se détache comme une ligne noire sur une tache lumineuse.

451. Dans l'appareil portatif de Kew, l'aimant est en forme de tube; à l'une des extrémités est une lentille, à l'autre une échelle tracée

sur verre, placée de manière à être au foyer principal de la lentille. La lumière envoyée par derrière l'échelle traverse la lentille et est ensuite reçue dans une lunette.

Puisque l'échelle est au foyer principal de la lentille, les rayons émis par une quelconque des divisions sortent parallèles; et, si la lunette a été réglée pour les corps célestes, on voit l'échelle en coïncidence optique avec les fils du réticule. Si une division donnée de l'échelle coïncide avec la croisée des fils du réticule, la ligne qui joint cette division au centre optique de la lentille doit être parallèle à la ligne de collimation de la lunette. En fixant l'aimant et en déplaçant la lunette, on peut déterminer la valeur angulaire des divisions de l'échelle; et ensuite, quand l'aimant est suspendu et que la position de la lunette est connue, on peut, à chaque instant, déterminer la position de l'aimant en lisant la division de l'échelle qui coïncide avec la croisée des fils.

La lunette est portée par un bras qui tourne autour d'un axe situé sur la même ligne que le fil de suspension. La position de la lunette se lit au moyen du vernier sur le cercle d'azimut de l'instrument.

Cet arrangement est commode pour un petit magnétomètre portatif, où tout l'appareil repose sur un seul trépied, et où les oscillations dues aux perturbations étrangères s'éteignent rapidement.

Détermination de la direction de l'axe d'un aimant et de la direction du magnétisme terrestre.

452. Soit un système d'axes tracés dans un aimant, l'axe des z étant parallèle à la longueur, et les axes des x et des y étant perpendiculaires aux faces du barreau supposé de forme parallélépipédique.

Soient l, m, n et λ, μ, ν les angles que font avec les axes l'axe magnétique et la ligne de collimation.

Soient M le moment magnétique de l'aimant, H la composante horizontale du magnétisme terrestre, Z sa composante verticale et δ l'azimut dans lequel agit H, cet azimut étant compté du nord vers l'ouest.

Soit ζ l'azimut observé de la ligne de collimation; soient α l'azimut de l'étrier, β la lecture de l'index du cercle de torsion : $\alpha - \beta$ est l'azimut de l'extrémité inférieure du fil de suspension.

Soit γ la valeur de $\alpha - \beta$, lorsqu'il n'y a pas de torsion : le moment de la force de torsion qui tend à diminuer α est

$$\tau(\alpha - \beta - \gamma),$$

où τ est un coefficient de torsion dépendant de la nature du fil.

Pour déterminer λ, fixons l'étrier de manière que y soit vertical et dirigé vers le haut, que z soit dirigé vers le nord et x vers l'ouest, et observons l'azimut ζ de la ligne de collimation. Enlevons alors l'aimant, faisons-le tourner d'un angle π autour de l'axe des z, et replaçons-le dans cette nouvelle position, puis observons l'azimut ζ′ de la ligne de collimation, quand y est dirigé vers le bas et x vers l'est,

$$\zeta = \alpha + \frac{\pi}{2} - \lambda, \tag{1}$$

$$\zeta' = \alpha - \frac{\pi}{2} + \lambda; \tag{2}$$

d'où

$$\lambda = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta). \tag{3}$$

Accrochons maintenant l'étrier au fil de suspension et plaçons-y l'aimant, en prenant bien soin que y soit vertical et tourné vers le haut : le moment de la force qui tend à augmenter α est

$$\text{MH} \sin m \sin\left(\delta - \alpha - \frac{\pi}{2} + l\right) - \tau(\alpha - \beta - \gamma); \tag{4}$$

mais, si ζ est l'azimut observé de la ligne de collimation,

$$\zeta = \alpha + \frac{\pi}{2} - \lambda; \tag{5}$$

de sorte que la force peut s'écrire

$$\text{MH} \sin m \sin(\delta - \zeta - \lambda + l) - \tau\left(\zeta + \lambda - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right). \tag{6}$$

Quand l'appareil est en équilibre, cette quantité est nulle pour une certaine valeur de ζ.

Si l'appareil ne parvient jamais au repos et s'il faut l'observer pendant les oscillations, on peut calculer la valeur de ζ qui correspondrait à la position d'équilibre par une méthode qui sera décrite au § 735.

Si la force de torsion est petite relativement au moment de la force magnétique, on peut mettre $\delta - \zeta + l - \lambda$ à la place du sinus de cet angle.

En observant les valeurs ζ_1 et ζ_2 de ζ qui correspondent à deux lectures différentes β_1 et β_2 du cercle de torsion, on a

$$\text{MH} \sin m(\zeta_1 - \zeta_2) = \tau(\zeta_1 - \zeta_2 - \beta_1 + \beta_2) \tag{7}$$

ou, en posant

$$\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2 - \beta_1 + \beta_2} = \tau',$$

$$\tau = MH \sin m\tau', \tag{8}$$

et l'équation (6) devient, en divisant par MH sin m,

$$\delta - \zeta + l - \lambda - \tau'\left(\zeta + \lambda - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right) = 0. \tag{9}$$

L'aimant étant alors renversé et l'instrument réglé de façon que y soit tourné vers le bas et rigoureusement vertical, si ζ' est la nouvelle valeur de l'azimut et δ' celle de la déclinaison correspondante,

$$\delta' - \zeta' - l + \lambda - \tau'\left(\zeta' - \lambda + \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right) = 0; \tag{10}$$

d'où

$$\frac{\delta + \delta'}{2} = \tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta') + \tfrac{1}{2}\tau'[\zeta + \zeta' - 2(\beta + \gamma)]. \tag{11}$$

On règle alors la position du cercle de torsion, de façon que le coefficient de τ' soit aussi voisin que possible de zéro. Pour cela, il faut déterminer la valeur γ que prend $\alpha - \beta$ quand il n'y a pas de torsion. C'est ce que l'on peut faire en mettant dans l'étrier un barreau non magnétique de même poids que l'aimant, et déterminant $\alpha - \beta$ quand ce barreau est en équilibre. Comme τ' est petit, il n'y a pas besoin d'une grande exactitude. Une autre méthode consiste à employer un barreau de torsion, de même poids que l'aimant et contenant intérieurement un très petit aimant dont le moment magnétique est $\frac{1}{n}$ du moment de l'aimant principal. Puisque τ reste le même, τ' deviendra $n\tau'$, et, si ζ_1 et ζ'_1 sont les valeurs de ζ que l'on trouve avec le barreau de torsion

$$\delta = \tfrac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta'_1) + \tfrac{1}{2}n\tau'[\zeta_1 + \zeta'_1 - 2(\beta + \gamma)]. \tag{12}$$

Retranchant cette équation de (11), il vient

$$2(n-1)(\beta + \gamma) = \left(n + \frac{1}{\tau'}\right)(\zeta_1 + \zeta'_1) - \left(1 + \frac{1}{\tau'}\right)(\zeta + \zeta'). \tag{13}$$

Ayant ainsi trouvé la valeur de $\beta + \gamma$, on fait varier β, la lecture du cercle de torsion, jusqu'à ce que, dans la position ordinaire de l'appareil,

$$\zeta + \zeta' - 2(\beta + \gamma) \tag{14}$$

soit, autant qu'il est possible, égal à zéro.

Alors, puisque τ' est une quantité numérique très petite et que son coefficient est très petit, la valeur du second terme de l'expression de δ ne varie guère, pour de petites erreurs sur les valeurs de τ' et de γ qui sont les quantités les moins exactement connues.

De cette manière, la valeur de la déclinaison magnétique δ peut s'obtenir avec une assez grande précision, à la condition qu'elle soit restée constante pendant toute la durée de l'expérience et que, par suite, on puisse prendre $\delta' = \delta$.

Mais, si l'on veut atteindre une très grande précision, il est nécessaire de tenir compte de la variation de δ au cours de l'expérience. A cet effet, aux mêmes instants où l'on observe les différentes valeurs de ζ, on observe un autre aimant suspendu; et, si η et η' sont les azimuts observés du second aimant qui correspondent à ζ et à ζ', et si δ et δ' sont les valeurs correspondantes de δ, on a

$$\delta' - \delta = \eta_1' - \eta_1; \tag{15}$$

donc, pour trouver la valeur de δ, nous devons ajouter à (11) une correction

$$\tfrac{1}{2}(\eta_1 - \eta').$$

La déclinaison est donc, à l'instant de la première observation,

$$\delta = \tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta' + \eta_1 - \eta_1') + \tfrac{1}{2}\tau'(\zeta + \zeta' - 2\beta - 2\gamma). \tag{16}$$

Pour trouver la direction de l'axe magnétique à l'intérieur de l'aimant, on retranche (10) de (9) et l'on ajoute (15),

$$l = \lambda + \tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta') - \tfrac{1}{2}(\eta_1 - \eta') + \tfrac{1}{2}\tau'(\zeta - \zeta' + 2\lambda - \pi). \tag{17}$$

En répétant l'expérience avec le barreau sur ses deux autres faces, de manière que l'axe des x soit dirigé verticalement vers le haut et vers le bas, on peut trouver la valeur de m. Si l'axe de collimation est susceptible de réglage, on devra le faire coïncider, aussi exactement que possible, avec l'axe magnétique de l'aimant, de manière à réduire, autant que possible, l'erreur due à l'inexacte inversion de l'aimant (1).

Mesure des forces magnétiques.

453. Les plus importantes mesures de forces magnétiques sont la détermination du moment magnétique M d'un aimant, et celle de l'in-

(1) *Voir* un Mémoire de M. W. Swan, *Sur l'inversion imparfaite* (*Trans. R. S. Edinb.*, vol. XXI, p. 319; 1850).

tensité de la composante horizontale H du magnétisme terrestre. On les effectue généralement en combinant les résultats de deux expériences qui donnent, l'une le rapport et l'autre le produit de ces deux quantités.

L'intensité de la force magnétique due à un aimant infiniment petit de moment magnétique M, en un point situé à une distance r du centre de l'aimant, dans la direction positive de l'axe de l'aimant, est

$$R = 2\frac{M}{r^3}, \tag{1}$$

et elle est dirigée suivant r. Si l'aimant est de dimensions finies, mais de forme sphérique et aimanté uniformément dans la direction de son axe, la force est toujours représentée par la même formule. Si l'aimant est un barreau solénoïdal de longueur 2L,

$$R = 2\frac{M}{r^3}\left(1 + 2\frac{L^2}{r^2} + 3\frac{L^4}{r^4} + \dots\right). \tag{2}$$

Et pour un aimant quelconque, pourvu que toutes ses autres dimensions soient petites relativement à r,

$$R = 2\frac{M}{r^3}\left(1 + A_1\frac{1}{r} + A_2\frac{1}{r^2} + \dots\right), \tag{3}$$

où A_1, A_2, ... sont des coefficients qui dépendent de la distribution du magnétisme sur le barreau.

Soit H l'intensité de la composante horizontale du magnétisme terrestre en un endroit quelconque : H est dirigé vers le nord magnétique. Soit r mesuré vers l'ouest magnétique : les forces magnétiques qui agissent à l'extrémité de r sont H dirigé vers le nord et R vers l'ouest, et la force résultante fait avec le méridien magnétique un angle θ compté vers l'ouest et tel que

$$R = H \tan\theta. \tag{4}$$

Par suite, pour déterminer $\frac{H}{R}$, on opère de la manière suivante :

La direction du nord magnétique ayant été déterminée, un aimant dont les dimensions ne doivent pas être trop grandes est suspendu comme dans les expériences précédentes. L'aimant de déviation M est placé dans le même plan horizontal que l'aimant suspendu, dans la direction de l'est magnétique, de façon que son centre soit à une distance r de celui de l'aimant suspendu.

On règle avec soin l'axe de M, de façon qu'il soit horizontal et dans la direction de r.

L'aimant suspendu est observé avant que M ait été apporté dans le voisinage, et après qu'il a été mis en place. Si 0 est la déviation observée, on a, par la formule approchée (1),

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2}\tan 0 \tag{5}$$

ou, par la formule (3),

$$\frac{1}{2}\frac{H}{M} r^3 \tan 0 = 1 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \dots \tag{6}$$

Il faut nous rappeler ici que l'on peut mesurer avec une grande précision la déviation 0, mais que la distance r des centres des aimants est une quantité qui ne saurait être déterminée avec exactitude, à moins que les aimants ne soient fixes et que leurs centres ne soient définis par des marques.

Voici comment on surmonte cette difficulté :

L'aimant M étant placé sur une échelle divisée qui s'étend à l'est et à l'ouest, de part et d'autre de l'aimant suspendu, on prend pour son centre le point situé à égales distances de ses extrémités, on marque ce point sur l'aimant, et l'on observe sa position sur l'échelle; ou bien encore, on observe les positions des extrémités et l'on en prend la moyenne arithmétique. Appelons-la s_1, et soit s_0 le point où le prolongement du fil de suspension de l'aimant suspendu rencontrerait l'échelle. Alors $r_1 = s_1 - s_0$; l'on connaît exactement s_1 et à peu près s_0. Soit 0_1 la déviation observée pour cette position de M.

Renversons maintenant M, c'est-à-dire, plaçons-le sur l'échelle en échangeant les positions de ses extrémités; r_1 restera le même, mais M, A_1, A_3, ... changeront de signes, et, si 0_2 est la déviation,

$$-\frac{1}{2}\frac{H}{M} r_1^3 \tan 0_2 = 1 - \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_1^2} - \dots \tag{7}$$

Prenons la moyenne arithmétique de (6) et (7),

$$\frac{1}{4}\frac{H}{M} r_1^3 (\tan 0_1 - \tan 0_2) = 1 + A_2 \frac{1}{r_1^2} + A_4 \frac{1}{r_1^4} + \dots \tag{8}$$

Plaçons maintenant M à l'ouest de l'aimant suspendu, son centre étant au point marqué sur l'échelle $2s_0 - s_1$. Soient 0_3 et 0_4 les déviations quand l'axe est dans la première ou dans la seconde position; alors,

comme précédemment,

$$(9)\qquad \frac{1}{4}\frac{M}{H} r_1^3(\operatorname{tang}\theta_3 - \operatorname{tang}\theta_4) = 1 + A_2\frac{1}{r_1^2} + A_4\frac{1}{r_1^4} + \dots$$

Supposons que la position véritable du centre de l'aimant suspendu soit, non pas en s_0, mais en $s_0 + \sigma$; alors

$$(10)\qquad r_1 = r - \sigma, \qquad r_2 = r + \sigma,$$

et

$$(11)\qquad \tfrac{1}{2}(r_1^n + r_2^n) = r^n\left[1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\sigma^2}{r^2} + \dots\right],$$

et, puisque l'on peut négliger $\frac{\sigma^2}{r^2}$ quand les mesures sont faites avec soin, nous sommes sûrs que l'on peut prendre pour r^n la moyenne arithmétique de r_1^n et de r_2^n.

Prenant donc la moyenne arithmétique de (8) et (9),

$$(12)\quad \frac{1}{8}\frac{H}{M} r^3(\operatorname{tang}\theta_1 - \operatorname{tang}\theta_2 + \operatorname{tang}\theta_3 - \operatorname{tang}\theta_4) = 1 + A_2\frac{1}{r^2} + \dots$$

ou, posant

$$(13)\qquad \frac{1}{4}(\operatorname{tang}\theta_1 - \operatorname{tang}\theta_2 + \operatorname{tang}\theta_3 - \operatorname{tang}\theta_4) = D,$$

$$\frac{1}{8}\frac{H}{M} D r^3 = 1 + A_2\frac{1}{r^2} + \dots$$

454. Nous pouvons maintenant considérer D et r comme susceptibles d'une détermination exacte.

La quantité A_2 ne peut en aucun cas être supérieure à $2L^2$, L étant la demi-longueur de l'aimant; si donc r est grand relativement à L, on peut négliger le terme en A_2 et déterminer de suite le rapport de H à M. Toutefois nous ne pouvons pas admettre que A_2 est égal à $2L^2$; car il peut être plus petit : il peut même être négatif pour un aimant dont les plus grandes dimensions sont transversales à l'axe. Le terme en A_4 et ceux d'ordre plus élevé peuvent être négligés sans inconvénient.

Pour éliminer A_2, on répète l'expérience en employant les distances r_1, r_2, r_3, ...; soient D_1, D_2, D_3, ... les valeurs de D,

$$D_1 = 2\frac{M}{H}\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{A_2}{r_1^5}\right),$$

$$D_2 = 2\frac{M}{H}\left(\frac{1}{r_2^3} + \frac{A_2}{r_2^5}\right).$$

Supposons égales les erreurs probables de ces équations, ce qui a lieu si ces erreurs ne dépendent que de la détermination de D, sans qu'il y ait d'incertitude sur la valeur de r; conformément à la règle générale donnée dans la théorie de la combinaison des mesures approchées, quand on suppose l'erreur probable la même sur toutes les équations, nous multiplions chaque équation par r^{-3} et nous ajoutons les résultats, puis nous multiplions chaque équation par r^{-5} et nous ajoutons les résultats : nous obtenons ainsi deux nouvelles équations.

Posons

$$D_1 r_1^{-3} + D_2 r_2^{-3} + \ldots = \Sigma(D r^{-3}),$$

et employons des expressions analogues pour les sommes des autres groupes de symboles; les deux équations résultantes peuvent s'écrire

$$\Sigma(D r^{-3}) = \frac{2M}{H}[\Sigma(r^{-6}) + A_2 \Sigma(r^{-8})],$$

$$\Sigma(D r^{-5}) = \frac{2M}{H}[\Sigma(r^{-8}) + A_2 \Sigma(r^{-10})];$$

d'où

$$\frac{2M}{H}\{\Sigma(r^{-6})\Sigma(r^{-10}) - [\Sigma(r^{-8})]^2\} = \Sigma(D r^{-3})\Sigma(r^{-10}) - \Sigma(D r^{-5})\Sigma(r^{-8})$$

et

$$A_2[\Sigma(D r^{-3})\Sigma(r^{-10}) - \Sigma(D r^{-5})\Sigma(r^{-8})] = \Sigma(D r^{-5})\Sigma(r^{-6}) - \Sigma(D r^{-3})\Sigma(r^{-8}).$$

La valeur de A_2 tirée de ces équations doit être inférieure à la moitié du carré de la longueur de l'aimant M. S'il n'en est pas ainsi, nous pouvons soupçonner quelque erreur dans les mesures. Cette méthode d'observation et de réduction a été donnée par Gauss dans le *Premier Rapport de l'Association magnétique.*

Quand l'observateur ne peut faire que deux séries d'expériences, aux distances r_1 et r_2, les valeurs de $\frac{2M}{H}$ et de A_2, tirées de ces expériences, sont les suivantes :

$$Q = \frac{2M}{H} = \frac{D_1 r_1^5 - D_2 r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}, \quad A_2 = \frac{D_2 r_2^{-3} - D_1 r_1^{-3}}{r_1^3 - r_2^3} r_1^3 r_2^3.$$

Si δD_1 et δD_1 sont les erreurs qui affectent les déviations observées D_1, D_2, l'erreur du résultat calculé Q sera

$$\delta D = \frac{r_1^3 \delta D_1 - r_2^3 \delta D_2}{r_1^3 - r_2^3}.$$

Si nous supposons les erreurs δD_1 et δD_2 indépendantes et si nous admettons δD comme erreur probable sur chacune d'elles, la valeur probable δQ de l'erreur sur la valeur calculée de Q sera donnée par

$$(\delta Q)^2 = \frac{r_1^{10} + r_2^{10}}{(r_1^5 - r_2^5)^2} (\delta D)^2.$$

Si nous supposons donnée l'une de ces distances, la plus petite par exemple, on pourra déterminer la plus grande de façon que δQ soit minimum. Cette condition conduit à une équation du cinquième degré en r_1^2, qui n'a qu'une seule racine réelle plus grande que r_2^2 ; on trouve ainsi que la meilleure valeur de r_1 est $1,3189 r_2$ (1).

Si l'on ne prend qu'une seule observation, la distance qui convient le mieux est celle pour laquelle

$$\frac{\delta D}{D} = \sqrt{3}\,\frac{\delta r}{r},$$

où δD est l'erreur probable sur une mesure de déviation, et δr l'erreur probable sur une mesure de longueur.

Méthode des sinus.

455. La méthode que nous venons de décrire peut être appelée *méthode des tangentes,* puisque la force magnétique est mesurée par la tangente de la déviation.

Si, au lieu de compter la ligne r_1 vers l'est ou vers l'ouest, on règle sa direction jusqu'à ce qu'elle soit perpendiculaire à l'axe de l'aimant dévié, R est le même que précédemment; mais, pour que l'aimant suspendu puisse rester perpendiculaire à r, il faut que la composante de la force H dans la direction de r soit égale et opposée à R. Si donc θ est la déviation, $R = H \sin\theta$.

C'est ce qu'on appelle la *méthode des sinus;* on ne peut l'appliquer que quand R est plus petit que H.

C'est cette méthode que l'on emploie dans l'appareil portatif de Kew. L'aimant mobile est suspendu à une partie de l'appareil qui tourne avec la lunette et le bras qui porte l'aimant de déviation, et la rotation du tout se mesure sur le cercle d'azimut. On commence par régler l'appareil de façon que l'axe de la lunette coïncide avec la position moyenne de la ligne de collimation de l'aimant dans sa position de repos. Si l'aimant oscille, l'azimut vrai du nord magnétique s'ob-

(1) *Voir* Airy, *Magnétisme.*

tient en observant les extrémités des oscillations de l'échelle transparente, et en faisant la correction voulue sur la lecture du cercle d'azimut.

Puis l'aimant de déviation est placé sur une tige droite passant par l'axe de l'appareil mobile perpendiculairement à l'axe de la lunette, et réglé de façon que son axe soit sur une ligne passant par le centre de l'aimant suspendu.

On déplace alors l'ensemble de l'appareil mobile jusqu'à ce que la ligne de collimation de l'aimant suspendu coïncide de nouveau avec l'axe de la lunette, et, si cela est nécessaire, on corrige la nouvelle lecture d'azimut au moyen des lectures de l'échelle aux extrémités d'une oscillation.

La différence des azimuts corrigés donne la déviation ; après quoi l'on procède comme dans la méthode des tangentes, sauf que dans l'expression de D on met $\sin\theta$ au lieu de $\tan\theta$.

Dans cette méthode, il n'y a point de correction pour la torsion du fil de suspension, parce que les positions relatives du fil, de la lunette et de l'aimant sont les mêmes dans toutes les observations.

En outre, les axes des deux aimants restent toujours perpendiculaires l'un à l'autre, ce qui permet de faire plus exactement la correction de longueur.

436. Ayant ainsi mesuré le rapport du moment de l'aimant de déviation à la composante horizontale du magnétisme terrestre, nous avons maintenant à trouver le produit de ces quantités en déterminant le moment du couple par lequel le magnétisme terrestre tend à faire tourner le même aimant, quand son axe est dévié du méridien magnétique.

Il y a deux méthodes pour faire cette mesure : la méthode dynamique, où l'on observe la durée des oscillations de l'aimant soumis à l'action du magnétisme terrestre, et la méthode statique, où l'on maintient l'aimant en équilibre stable par l'action simultanée d'un couple mesurable et de la force magnétique.

La méthode dynamique demande des appareils plus simples et elle est plus exacte pour les mesures absolues; mais elle prend un temps considérable. La méthode statique permet une mesure presque instantanée, ce qui la rend commode pour suivre les changements d'intensité du magnétisme terrestre; mais elle demande des appareils plus délicats et n'est pas aussi exacte pour les mesures absolues.

Méthodes des oscillations.

L'aimant est suspendu de façon que son axe magnétique soit horizontal, et on lui imprime des oscillations de petite amplitude. On observe ces oscillations par l'une des méthodes déjà décrites.

On prend sur l'échelle le point correspondant au milieu de l'oscillation, et l'on observe l'instant du passage en ce point de l'échelle dans le sens positif. S'il se passe assez de temps jusqu'à ce que l'aimant repasse en ce point, on note aussi l'instant de son passage dans le sens négatif, et l'on continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait observé $n+1$ passages positifs et n passages négatifs. Si les oscillations sont trop rapides pour que l'on puisse observer tous les passages successifs, on observe les passages de trois en trois, ou de cinq en cinq, en ayant soin que les passages observés soient alternativement positifs et négatifs.

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_{2n+1}$ les instants observés des passages; si nous posons

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}T_1+T_3+T_5+\ldots+T_{2n-1}+\frac{1}{2}T_{2n+1}\right)=T_{n+1},$$

$$\frac{1}{n}(T_2+T_4+\ldots+T_{2n})=T'_{n+1};$$

T_{n+1} est l'époque moyenne des passages positifs et doit s'accorder avec T'_{n+1}, époque moyenne des passages négatifs, si le point a été bien choisi. C'est la moyenne de ces résultats que l'on prend comme époque moyenne du passage au point milieu.

Après qu'un plus grand nombre d'oscillations ont eu lieu, mais avant que les oscillations aient cessé d'être distinctes et régulières, l'observateur fait une nouvelle série d'observations, d'où il déduit l'époque moyenne du passage au point milieu dans cette seconde série.

En calculant la période d'oscillation au moyen de l'une ou l'autre série d'observations, on doit pouvoir être sûr du nombre d'oscillations complètes qui ont été effectuées dans l'intervalle de temps compris entre les passages moyens des deux séries; et, en divisant cet intervalle par le nombre des oscillations, on obtiendra la durée moyenne des oscillations.

La durée d'oscillation observée doit alors être réduite à la durée des oscillations infiniment petites par une formule du même genre que celle que l'on emploie dans les observations de pendule; si l'on trouve que l'amplitude des oscillations diminue rapidement, il y a

encore une autre correction à faire pour la résistance (*voir* § 740). D'ailleurs ces corrections sont très faibles quand l'aimant est suspendu par un fil de soie et quand les arcs d'oscillations ne sont que de quelques degrés.

L'équation du mouvement de l'aimant est

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} + MH\sin\theta + MH\tau'(\theta - \gamma) = 0,$$

où θ est l'angle compris entre l'axe magnétique et la direction de la force H; A le moment d'inertie de l'aimant et de l'appareil de suspension; M le moment magnétique de l'aimant; H l'intensité de la force magnétique horizontale, et $MH\tau'$ le coefficient de torsion; τ' est déterminé comme au § 452 : c'est une quantité très petite.

La valeur de θ correspondant à l'équilibre est

$$\theta_0 = \frac{\tau'\gamma}{1+\tau'},$$

angle très petit, et a solution de l'équation, pour de petites valeurs de l'amplitude, est

$$\theta = C\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \alpha\right) + \theta_0,$$

T étant la période, C l'amplitude, avec la relation

$$T^2 = \frac{4\pi^2 A}{MH(1+\tau')};$$

d'où nous tirons la valeur de MH

$$MH = \frac{4\pi^2 A}{T^2(1+\tau')}.$$

Ici T est la durée d'une oscillation complète, déterminée par l'expérience. Le moment d'inertie A de l'aimant s'obtient, une fois pour toutes, en pesant et en mesurant l'aimant s'il est de forme régulière, ou en le comparant par une méthode dynamique avec un corps dont le moment d'inertie est connu.

Combinant cette valeur de MH avec celle de $\frac{M}{H}$ obtenue précédemment, nous obtenons

$$M^2 = (MH)\left(\frac{M}{H}\right) = \frac{2\pi^2 A}{T^2(1+\tau')}D^3,$$

$$H^2 = (MH)\left(\frac{H}{M}\right) = \frac{8\pi^2 A}{T^2(1+\tau')D^3}.$$

437. Nous avons supposé que M et H restent constants pendant les deux séries d'expériences. Les variations de H peuvent être déterminées par l'observation simultanée du magnétomètre bifilaire que l'on va décrire; et, si l'aimant est en service depuis quelque temps et s'il n'est soumis pendant l'expérience ni à des changements de température ni à des chocs, on peut admettre que la partie de M qui dépend du magnétisme permanent reste constante. Mais tous les aimants d'acier sont susceptibles de prendre par induction un magnétisme qui dépend de l'action de la force magnétique extérieure.

Or, quand on emploie l'aimant dans les expériences de déviation, son axe est placé de l'est à l'ouest, et l'action du magnétisme terrestre, étant transversale à l'aimant, ne tend pas à augmenter ou à diminuer M. Au contraire, quand on fait osciller l'aimant, son axe est dirigé du nord au sud, et l'action du magnétisme terrestre tend à l'aimanter dans la direction de l'axe et, par suite, à augmenter son moment magnétique d'une quantité kH, où k est un coefficient qui doit être déterminé par des expériences sur l'aimant lui-même.

Il y a deux manières d'éviter cette cause d'erreurs sans calculer k, et cela en disposant l'expérience de façon que l'aimant soit dans la même situation quand il sert à dévier un autre aimant ou quand il oscille lui-même.

On peut placer l'aimant de déviation, l'axe dirigé vers le nord, à une distance r du centre de l'aimant suspendu, la ligne r faisant avec le méridien magnétique un angle dont le cosinus est $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Alors l'action de l'aimant de déviation est perpendiculaire à sa propre direction et est égale à

$$R = \sqrt{2}\,\frac{M}{r^3}.$$

Ici M est le moment magnétique, l'axe étant dirigé vers le nord comme dans les expériences d'oscillations; il n'y a donc plus lieu de faire une correction d'induction.

Mais cette méthode est très peu commode : de grandes erreurs s'introduiraient pour un faible déplacement de l'aimant de déviation; et, comme on ne peut appliquer la correction consistant à renverser cet aimant, cette méthode ne doit être employée que quand on a en vue de déterminer le coefficient d'induction.

On doit au Dr J.-P. Joule (1) la méthode suivante, dans laquelle

(1) *Proc. Phil. Soc. Manchester*, 19 mars 1867.

on soustrait l'aimant, pendant qu'il oscille, à l'action inductrice du magnétisme terrestre.

On prépare deux aimants dont les moments magnétiques sont aussi exactement égaux que possible, et, dans les expériences de déviation, on les emploie séparément ou on les place à la fois de part et d'autre de l'aimant suspendu, de manière à augmenter la déviation : dans ces expériences, la force inductive du magnétisme terrestre est transversale à l'axe.

On suspend l'un de ces aimants, et l'on place l'autre parallèlement, son centre exactement au-dessous de celui de l'aimant suspendu et son axe dans la même direction. L'action que l'aimant fixe exerce sur l'aimant suspendu est en sens inverse de celle du magnétisme terrestre. Si l'on rapproche graduellement l'aimant fixe de l'aimant mobile, la durée des oscillations croît jusqu'à ce que pour une certaine position l'équilibre cesse d'être stable; si l'on dépasse cette position, l'aimant mobile exécute ses oscillations en sens inverse. En tâtonnant ainsi, on trouve une position de l'aimant fixe, pour laquelle il neutralise exactement l'effet du magnétisme terrestre sur l'aimant suspendu. On fixe alors les aimants l'un à l'autre, de façon qu'ils soient parallèles et que leurs axes soient tournés dans le même sens, à la distance que l'on vient de trouver par expérience; on les suspend à la manière ordinaire, et on leur fait exécuter des oscillations de faible amplitude.

L'aimant inférieur neutralise exactement l'effet du magnétisme terrestre sur l'aimant supérieur; et, puisque les aimants ont des moments égaux, celui du haut neutralise l'action inductive de la Terre sur celui du bas.

La valeur de M est donc la même dans l'expérience d'oscillation et dans celle de déviation, et l'on n'a pas à faire de correction d'induction.

458. La méthode la plus exacte pour déterminer l'intensité de la force magnétique horizontale est celle que nous venons de décrire. Mais il ne faut guère moins d'une heure pour effectuer, avec une exactitude suffisante, toute la série de ces expériences; et, par suite, les changements d'intensité, dont la période est de quelques minutes seulement, échapperaient à l'observation. Il faut donc une autre méthode pour observer à chaque instant l'intensité de la force magnétique.

La méthode statique consiste à dévier l'aimant au moyen d'un couple agissant dans un plan horizontal. Si L est le moment de ce

couple, M le moment magnétique de l'aimant, K la composante horizontale du magnétisme terrestre, 0 la déviation,

$$L = MH \sin 0;$$

donc, si l'on connaît L en fonction de 0, on peut trouver MH.

Le couple L peut être produit de deux manières : au moyen de l'élasticité de torsion d'un fil, comme dans la balance de torsion ordinaire, ou par le poids de l'appareil suspendu, comme dans la suspension bifilaire.

Dans la balance de torsion, l'aimant est fixé au bout d'un fil vertical, dont on peut faire tourner l'extrémité supérieure et dont on mesure la rotation sur un cercle de torsion.

On a alors

$$L = \tau(\alpha - \alpha_0 - 0) = MH \sin 0,$$

où α_0 est la lecture du cercle de torsion quand l'aimant est dans le méridien magnétique, et α est la lecture actuelle. Si l'on fait tourner le cercle de torsion de manière à amener l'aimant à peu près à angle droit sur le méridien magnétique, en sorte que

$$0 = \frac{\pi}{2} - 0',$$

on a

$$\tau\left(\alpha - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} + 0'\right) = MH\left(1 - \tfrac{1}{2}0'^2\right)$$

ou

$$MH = \tau\left(1 + \tfrac{1}{2}0'^2\right)\left(\alpha - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} + 0'\right).$$

En observant la déviation 0' de l'aimant arrivé à l'équilibre, on peut calculer MH, connaissant τ.

Si l'on veut seulement connaître les valeurs relatives de H aux différentes époques, il n'est pas nécessaire de connaître ni M ni τ.

Il est aisé de déterminer τ en mesure absolue : on suspend au même fil un corps non magnétique, et l'on observe sa durée d'oscillation ; si A est le moment d'inertie de ce corps et T la durée d'une oscillation complète,

$$\tau = \frac{4\pi^2 A}{T^2}.$$

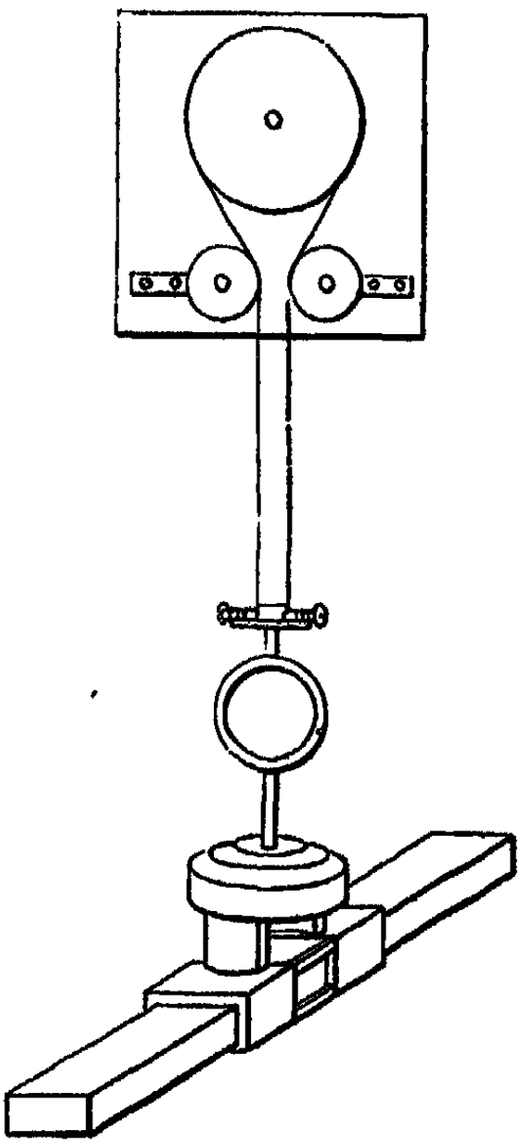
La principale critique que l'on puisse opposer à l'emploi de la balance de torsion est que le zéro de la graduation est sujet à changer. Sous l'influence de la force de torsion permanente, due à la tendance

de l'aimant à se tourner vers le nord, le fil prend peu à peu une torsion permanente, de sorte qu'à de courts intervalles il devient nécessaire de déterminer à nouveau le zéro du cercle de torsion.

Suspension bifilaire.

480. L'emploi de deux fils de soie ou de métal pour suspendre l'aimant a été indiqué par Gauss et Weber. Comme la suspension bifilaire est employée dans un grand nombre d'instruments électriques, nous allons l'étudier plus en détail. La *fig.* 16 en montre

Fig. 16.



l'aspect général; la *fig.* 17 représente la projection des fils sur un plan horizontal.

AB et A'B' sont les projections des deux fils;

AA′ et BB′ sont les lignes qui joignent les extrémités supérieures et inférieures des fils;

a et b sont les longueurs des lignes AA′ et BB′;

α et β leurs azimuts;

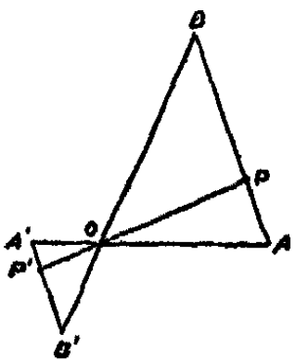
W et W′ les composantes verticales de la tension des fils;

Q et Q′ les composantes horizontales;

h la distance verticale entre AA′ et BB′.

Les forces qui agissent sur l'aimant sont : son poids; le couple dû au magnétisme terrestre; la tension des fils et, le cas échéant, leur torsion. De ces forces, celles qui sont dues au magnétisme et à la torsion sont de la nature des couples. Donc la résultante des tensions doit se composer d'une force verticale égale au poids de l'aimant et d'un couple.

Fig. 17.



La résultante des composantes verticales des tensions est donc dirigée suivant la ligne qui se projette en O, intersection de AA′ et de BB′, et chacune de ces lignes est divisée par O dans le rapport de W′ à W.

Les composantes horizontales des tensions forment un couple et, par suite, sont égales en grandeur et parallèles en direction. Appelant Q l'une d'elles, le moment du couple qu'elles forment est

$$L = Q.PP', \tag{1}$$

PP′ étant la distance des lignes parallèles AB et A′B′.

Pour trouver la valeur de L, nous avons les équations de moments

$$Qh = W.AB = W'.A'B', \tag{2}$$

et l'équation géométrique

$$(AB + A'B')\,PP' = ab\sin(\alpha - \beta); \tag{3}$$

d'où nous tirons

$$(4) \qquad L = Q.PP' = \frac{ab}{h}\frac{WW'}{W+W'}\sin(\alpha-\beta).$$

Si m est la masse de l'appareil suspendu et q l'intensité de la pesanteur,

$$(5) \qquad W+W' = mg.$$

Si nous posons aussi

$$(6) \qquad W-W' = nmg,$$

nous trouvons

$$(7) \qquad L = \tfrac{1}{4}(1-n^2)mg\frac{ab}{h}\sin(\alpha-\beta).$$

La valeur de L est donc maximum par rapport à n, quand n est nul, c'est-à-dire quand le poids de la masse suspendue est également supporté par les deux fils.

On peut régler à l'égalité la tension des fils, en observant la durée des oscillations et la rendant minimum; ou bien encore, on peut obtenir un réglage automatique en attachant les bouts des fils à une poulie (voir *fig.* 16) qui tourne sur son axe jusqu'à ce que les tensions soient égales.

On règle, au moyen de deux autres poulies, la distance des extrémités supérieures des fils de suspension; on peut aussi régler la distance des extrémités inférieures des fils.

La tension étant ainsi réglée, le couple dû à la tension des fils devient

$$L = \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin(\alpha-\beta).$$

Le moment du couple dû à la torsion des fils est de la forme

$$\tau(\gamma-\beta),$$

où τ est la somme des coefficients de torsion des fils.

Ceux-ci devant être sans torsion quand $\alpha=\beta$, nous pouvons faire aussi

$$\gamma = \alpha.$$

Le moment du couple dû à la force magnétique horizontale est de la forme

$$MH\sin(\delta-\theta),$$

où δ est la déclinaison magnétique et θ l'azimut de l'axe de l'aimant.

Nous éviterons d'introduire des symboles inutiles, sans diminuer en rien la généralité de l'exposition, en supposant que l'axe de l'aimant est parallèle à BB′ ou que $\beta = 0$.

L'équation du mouvement devient donc

$$(8) \qquad A\frac{d^2\theta}{dt^2} = MH\sin(\delta - \theta) + \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin(\alpha - \theta) + \tau(\alpha - \theta).$$

Il y a trois positions principales de l'appareil :

1° α est presque égal à δ. Si T_1 est la durée d'une oscillation complète dans cette position,

$$(9) \qquad \frac{4\pi^2 A}{T_1^2} = \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg + \tau + MH.$$

2° α est à peu près égal à $\delta + \pi$. Si T_2 est la durée d'une oscillation complète dans cette position, l'extrémité nord de l'aimant étant alors tournée vers le sud,

$$(10) \qquad \frac{4\pi^2 A}{T_2^2} = \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg + \tau - MH.$$

On peut rendre le second membre aussi petit que l'on veut en diminuant a ou b; mais on ne doit pas le rendre négatif, sans quoi l'équilibre de l'aimant deviendrait instable. Dans cette position, l'aimant constitue un instrument qui peut rendre sensibles de petites variations dans la *direction* de la force magnétique.

En effet, quand $\delta - \theta$ est presque égal à π, $\sin(\delta - \theta)$ est presque égal à $(\theta - \delta)$, et l'on trouve

$$(11) \qquad \theta = \alpha - \frac{MH}{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg + \tau - MH}(\delta - \alpha).$$

En réduisant le dénominateur de la fonction dans le second membre, on peut rendre la variation de θ très grande, relativement à celle de δ. Nous remarquerons que, dans cette expression, le coefficient de δ est négatif, c'est-à-dire que, quand la direction de la force magnétique change dans un certain sens, l'aimant tourne en sens opposé.

3° Dans la troisième position, on a fait tourner la partie supérieure de la suspension jusqu'à ce que l'axe de l'aimant soit à peu près perpendiculaire au méridien magnétique.

Si l'on pose

$$(12) \qquad \theta - \delta = \frac{\pi}{2} + \theta' \qquad \text{et} \qquad \alpha - \theta = \beta - \theta',$$

l'équation du mouvement peut s'écrire

$$(13) \qquad A\frac{d^2\theta}{dt^2} = MH\cos\theta' + \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin(\beta-\theta') + \tau(\beta-\theta').$$

S'il y a équilibre pour $H = H_0$ et $\theta' = 0$,

$$(14) \qquad 0 = MH_0 + \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin\beta + \beta\tau,$$

et si H est la valeur de la force horizontale correspondant à un petit angle θ',

$$(15) \qquad H = H_0\left(1 - \frac{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\cos\beta + \tau}{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin\beta + \tau\beta}\theta'\right).$$

Pour que l'aimant soit en équilibre stable, il faut que le numérateur de la fraction du second membre soit positif; mais plus il sera voisin de zéro, plus l'instrument sera sensible pour accuser des changements de valeur dans l'intensité de la composante horizontale du magnétisme terrestre.

La méthode statique d'évaluation de l'intensité de la force dépend du fonctionnement d'un instrument qui prend de lui-même différentes positions d'équilibre pour différentes valeurs de la force. Donc, en fixant à l'aimant un miroir qui renvoie une tache lumineuse sur une surface photographique mue par un rouage d'horlogerie, on pourra obtenir une courbe qui permettra de déterminer à chaque instant l'intensité de la force en fonction d'une échelle que nous pouvons considérer, pour l'instant, comme arbitraire.

460. Dans un observatoire où la déclinaison et l'intensité font l'objet d'un système d'enregistrement continu, soit par l'observation directe, soit par la méthode automatique de photographie, on peut déterminer avec plus d'exactitude les valeurs de la déclinaison et de l'intensité, ainsi que la position et le moment de l'axe magnétique d'un aimant.

En effet, à chaque instant, le déclinomètre donne la déclinaison affectée d'une erreur constante, et le magnétomètre bifilaire, l'intensité multipliée par un coefficient constant. Dans les expériences, à δ on substitue $\delta' + \delta_0$, où δ' est la lecture du déclinomètre à un instant donné et δ_0 est l'erreur inconnue, mais constante; en sorte que $\delta' + \delta_0$ est la déclinaison vraie.

De même, on remplace H par CH', où H' est la lecture du magnétomètre à son échelle arbitraire, et où C est le facteur inconnu, mais constant, qui convertit ces lectures en mesures absolues, de sorte que CH' est la force horizontale à un instant donné.

Les expériences destinées à déterminer la valeur absolue des quantités doivent être faites assez loin du déclinomètre et du magnétomètre pour que les différents aimants ne puissent pas être l'un pour l'autre une cause de perturbations appréciables. On note l'époque de chaque observation et l'on y introduit les valeurs correspondantes de δ' et de H'; puis on traite les équations de manière à tirer l'erreur constante δ_0 du déclinomètre, et le coefficient C par lequel on doit multiplier les lectures du magnétomètre. Ces deux valeurs une fois trouvées, on peut exprimer en mesure absolue les lectures des deux instruments. Mais ces mesures absolues doivent être répétées fréquemment pour tenir compte des changements qui peuvent se produire dans l'axe magnétique et dans le moment magnétique des aimants.

461. Les méthodes destinées à déterminer la composante verticale du magnétisme terrestre n'ont point été portées au même degré de perfection. La force verticale doit agir sur un aimant qui tourne autour d'un axe horizontal. Or on ne peut rendre un corps tournant autour d'un axe horizontal aussi sensible à l'action des petites forces qu'un corps suspendu à un fil et mobile autour d'un axe vertical. En outre, le poids de l'aimant est si grand relativement à la force magnétique qui agit sur lui, qu'un faible déplacement du centre d'inertie (dû à une dilatation inégale, etc.) produit sur la position de l'aimant un plus grand effet qu'un changement considérable de la force magnétique.

Par suite, la mesure de la force verticale, ou la comparaison de la force verticale et de la force horizontale, est la partie la moins parfaite du système des mesures magnétiques.

D'habitude, la composante verticale de la force magnétique totale se déduit de la composante horizontale, en déterminant la direction de la force totale.

Appelant i l'angle de la force totale et de sa composante horizontale, i est appelé l'*inclinaison magnétique*, et H la composante horizontale déjà obtenue ; la composante verticale est $H \tan g i$, et la force totale $H \sin i$.

L'inclinaison magnétique s'obtient au moyen de l'aiguille d'inclinaison.

Théoriquement, l'aiguille d'inclinaison est un aimant monté sur un

axe passant par son centre d'inertie et perpendiculaire à l'axe magnétique de l'aiguille. Les bouts de cet axe sont travaillés en forme de cylindre de petit rayon, dont les axes coïncident avec la ligne passant par le centre d'inertie. Ces deux bouts cylindriques reposent sur des plans horizontaux sur lesquels ils peuvent rouler librement.

Quand l'axe est placé dans le sens de l'est à l'ouest magnétique, l'aiguille peut se mouvoir librement dans le plan du méridien magnétique; et, si l'instrument est parfaitement réglé, l'axe magnétique se place dans la direction de la force magnétique totale.

Mais pratiquement il est impossible de régler une aiguille d'inclinaison de façon que son poids n'ait point d'influence sur sa position d'équilibre; car, lors même que le centre d'inertie serait primitivement sur la ligne des axes des cylindres sur lesquels s'effectue le roulement, il cesse de s'y trouver dès que l'aiguille subit une flexion imperceptible ou une dilatation inégale. En outre, la détermination du véritable centre de gravité d'un aimant n'est pas chose facile, parce que les effets de la force magnétique viennent se mêler à ceux de la gravité.

Supposons des marques faites sur un des bouts de l'aiguille et sur un des bouts de son axe, et traçons dans l'aiguille une ligne réelle ou imaginaire que nous appellerons *ligne de collimation,* dont la position se lit sur un cercle vertical. Soit θ l'angle que fait cette ligne avec le rayon passant par le zéro, que nous supposerons être horizontal; soit λ l'angle que fait l'axe magnétique avec la ligne de collimation, de sorte que, l'aiguille étant dans cette position, la ligne de collimation est inclinée de $\theta + \lambda$ sur l'horizontale.

Soit p la perpendiculaire abaissée du centre d'inertie sur le plan de roulement des axes : quelle que soit la forme des surfaces roulantes, p est une fonction de θ. Si les deux sections sur lesquelles s'effectue le roulement aux bouts de l'axe sont des cercles,

$$p = c - a \sin(\theta + \alpha), \tag{1}$$

où a est la distance du centre d'inertie à la ligne des centres des sections de roulement, et où α est l'angle que cette ligne fait avec la ligne de collimation.

Soient

M le moment magnétique;
m la masse de l'aimant;
g la force de gravité;
I la force magnétique totale;
i l'inclinaison.

D'après le principe de conservation de l'énergie, quand l'équilibre est stable,

$$(2) \qquad MI\cos(\theta + \lambda - i) - mgp$$

doit être un maximum par rapport à θ; d'où

$$(3) \qquad \begin{cases} MI\sin(\theta + \lambda - i) = -mg\dfrac{dp}{d\theta} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = mga\cos(\theta + \alpha), \end{cases}$$

si les extrémités de l'axe sont cylindriques.

Si donc T est la durée d'une oscillation autour de la position d'équilibre,

$$(4) \qquad MI + mga\sin(\theta + \alpha) = \frac{4\pi^2 A}{T^2},$$

où A est le moment d'inertie de l'aiguille autour de son axe de rotation, et où θ est déterminé par (3).

Quand on détermine l'inclinaison, on prend une lecture pendant que le cercle est dans le plan du méridien magnétique, la graduation tournée du côté de l'ouest.

Soit θ_1 cette lecture; nous avons alors

$$(5) \qquad MI\sin(\theta_1 + \lambda - i) = mga\cos(\theta_1 + \alpha).$$

Puis on fait tourner l'instrument de 180° autour d'un axe vertical, de façon que la graduation soit à l'est; si θ_2 est la nouvelle lecture,

$$(6) \qquad MI\sin(\theta_2 + \lambda - i) = mga\cos(\theta_2 + \alpha).$$

Retranchant (6) de (5), et nous rappelant que θ_1 est à peu près égal à i et θ_2 à peu près égal à $\pi - i$, et que λ est un petit angle, de sorte que l'on peut négliger $mga\lambda$ devant MI,

$$(7) \qquad MI(\theta_1 - \theta_2 + \pi - 2i) = 2mga\cos i\cos\alpha.$$

Enlevant alors l'aimant de dessus ses supports et le plaçant dans l'appareil à déviation du § 453, de façon qu'il indique son propre moment magnétique par la déviation de l'aimant suspendu, on a

$$(8) \qquad M = \tfrac{1}{2} r^3 HD,$$

où D est la tangente de la déviation.

Renversons l'aimantation de l'aiguille, et déterminons son nouveau moment magnétique M′ en observant une nouvelle déviation dont la tangente est D′,

$$(9) \qquad M' = \tfrac{1}{2} r^3 HD',$$

d'où

$$MD' = M'D. \tag{10}$$

Replaçons l'aimant sur ses supports, et prenons deux nouvelles lectures θ_3 et θ_4, dont l'une est à peu près $\pi + i$ et l'autre à peu près $-i$,

$$M'I\sin(\theta_3 + \lambda' - \pi - i) = mga\cos(\theta_3 + \alpha), \tag{11}$$

$$M'I\sin(\theta_4 + \lambda' + i) = mga\cos(\theta_4 + \alpha); \tag{12}$$

d'où l'on tire, comme précédemment,

$$M'I(\theta_3 - \theta_4 - \pi - 2i) = 2mga\cos i\cos\alpha, \tag{13}$$

et, en ajoutant (7),

$$MI(\theta_1 - \theta_2 + \pi - 2i) + M'I(\theta_3 - \theta_4 - \pi - 2i) = 0 \tag{14}$$

ou

$$D(\theta_1 - \theta_2 + \pi - 2i) + D'(\theta_3 - \theta_4 - \pi - 2i) = 0; \tag{15}$$

d'où l'on tire l'inclinaison

$$i = \frac{D(\theta_1 - \theta_2 + \pi) + D'(\theta_3 - \theta_4 - \pi)}{2D + 2D'}, \tag{16}$$

où D et D' sont les tangentes des déviations produites par l'aiguille avec sa première et avec sa seconde aimantation.

Quand on fait des observations au cercle d'inclinaison, on en règle soigneusement l'axe vertical, de façon que les portées planes sur lesquelles repose l'axe de l'aimant soient horizontales dans tous les azimuts. L'aimantation de l'aimant étant de sens tel que l'extrémité A soit dirigée vers le bas, on place l'axe sur ses portées et l'on prend des lectures, le plan du cercle étant dans le méridien magnétique et la graduation face à l'est. Chaque extrémité de l'aimant est observée au moyen d'un microscope porté sur une tige qui se meut concentriquement au cercle d'inclinaison. On amène en coïncidence le réticule du microscope et l'image d'une marque faite sur l'aimant, et on lit au moyen d'un vernier la position de l'alidade sur le cercle.

On obtient ainsi, pendant que la graduation fait face à l'est, une lecture pour le bout A et une autre pour le bout B. Il est nécessaire d'observer les deux bouts pour éliminer les erreurs qui pourraient survenir si l'axe de l'aimant et le cercle d'inclinaison n'étaient pas concentriques.

On tourne alors la graduation face à l'ouest, et l'on prend deux autres lectures.

On fait alors tourner l'aimant sur lui-même, de façon que les extrémités de l'axe soient échangées par rapport à l'instrument, et l'on prend quatre nouvelles lectures sur la seconde face de l'aimant.

L'aimantation est alors renversée, de façon que l'extrémité B se dirige vers le bas; on détermine le nouveau moment magnétique, et l'on prend dans ce nouvel état huit lectures : ce sont ces seize observations combinées qui déterminent l'inclinaison vraie.

462. On constate que, malgré les soins les plus minutieux, la valeur ainsi déduite d'observations faites sur un cercle d'inclinaison diffère sensiblement de celle que l'on obtiendrait en observant au même lieu sur un autre cercle d'inclinaison. M. Broun a signalé l'effet dû à l'ellipticité des tourillons de l'axe, et a montré comment on peut le corriger en faisant des observations sur un aimant aimanté à différentes intensités.

Le principe de cette méthode peut s'énoncer comme il suit : Supposons que l'erreur sur une observation quelconque soit une petite quantité n'excédant pas un degré; supposons aussi qu'une force inconnue, mais régulière, agisse sur l'aimant et l'écarte de la position vraie.

Si L est le moment de cette force, θ_0 l'inclinaison vraie et θ l'inclinaison observée,

$$L = MI \sin(\theta - \theta_0) \tag{17}$$

$$= MI(\theta - \theta_0). \tag{18}$$

puisque $\theta - \theta_0$ est petit.

Il est clair que, plus M devient grand, et plus l'aiguille s'approche de sa position vraie. Répétons deux fois les opérations nécessaires pour obtenir l'inclinaison : la première fois avec une aimantation M_1, la plus forte que puisse prendre l'aiguille, la seconde fois avec une aimantation M_2 beaucoup plus faible, quoique suffisante encore pour que les lectures soient nettes et que l'erreur ne soit pas trop considérable. Soient θ_1 et θ_2 les valeurs de l'inclinaison déduites de ces deux séries d'observations, et soit L la valeur moyenne de la force perturbatrice inconnue pour les huit positions de chaque détermination : nous supposerons que cette valeur soit la même pour les deux déterminations. Alors

$$L = M_1 I(\theta_1 - \theta_0) = M_2 I(\theta_2 - \theta_0); \tag{19}$$

d'où

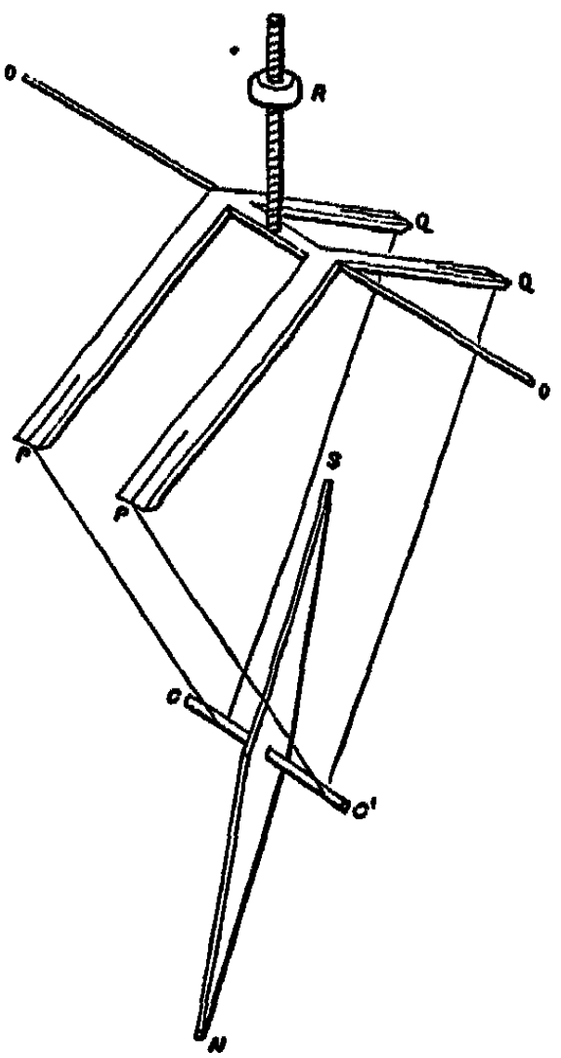
$$\theta_0 = \frac{M_1\theta_1 - M_2\theta_2}{M_1 - M_2}, \quad L = M_1 M_2 I \frac{\theta_1 - \theta_2}{M_2 - M_1}. \tag{20}$$

Si nous trouvons que plusieurs expériences donnent à peu près la même valeur de L, nous pouvons considérer θ_0 comme étant, à très peu près, la vraie valeur de l'inclinaison.

403. Le Dr Joule a construit récemment un nouveau cercle d'inclinaison, où l'axe de l'aiguille, au lieu de rouler sur des plans d'agate horizontaux, est suspendu sur deux fibres de soie ou deux fils d'araignée dont les extrémités sont attachées elles-mêmes aux bras d'une balance sensible. L'axe de l'aimant roule ainsi sur deux doubles de fil de soie, et le Dr Joule trouve que ses mouvements sont bien plus libres de cette manière que quand il roule sur des plans d'agate.

Sur la *fig.* 18, NS est l'aiguille, CC′ son axe formé d'un fil de métal

Fig. 18.



cylindrique et droit, PCQ et P′C′Q′ sont les fils sur lesquels l'axe roule, POQ est la balance formée d'un double levier coudé que sup-

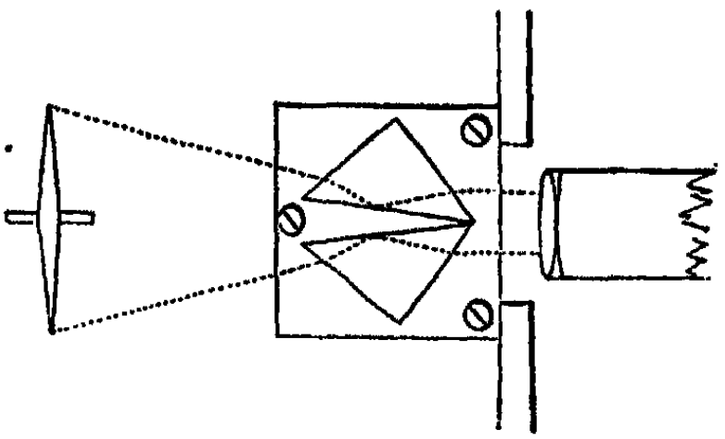
porte un fil OO tendu horizontalement entre les branches d'une fourchette; un contrepoids OO, que l'on peut élever ou abaisser le long d'une vis, permet de maintenir la balance en équilibre indifférent autour de OO. Pour que l'aiguille reste en équilibre indifférent quand elle roule sur les deux fils, il faut que son centre de gravité ne s'élève ni ne s'abaisse; il faut donc que la distance OC reste constante quand l'aiguille roule : cette condition sera remplie si les bras OP et OQ sont égaux et si les fils leur sont perpendiculaires.

Le Dr Joule trouve que l'aiguille ne doit pas avoir plus de cinq inches de long (12cm,70); avec une longueur de huit inches, la flexion de l'aiguille tend à diminuer l'inclinaison observée d'une fraction de minute. Primitivement, l'axe de l'aiguille était un fil d'acier que l'on redressait en le portant au rouge pendant qu'il était tendu par un poids; mais le Dr Joule a reconnu qu'avec la nouvelle suspension il n'est pas nécessaire d'employer l'acier, et que le platine et même l'or fin sont suffisamment durs.

La balance est attachée à un fil OO, d'environ un pied de long, tendu horizontalement entre les branches d'une fourchette que l'on peut faire tourner en azimut au moyen d'un cercle placé au sommet du trépied qui porte tout l'instrument. On peut faire en une heure six observations complètes d'inclinaison, et l'erreur moyenne sur chaque observation est une fraction de minute d'arc.

Au laboratoire de Physique de Cambridge, on se propose d'observer l'aiguille d'inclinaison au moyen d'un appareil à double image, consistant en deux prismes à réflexion totale placés comme sur la *fig.* 19.

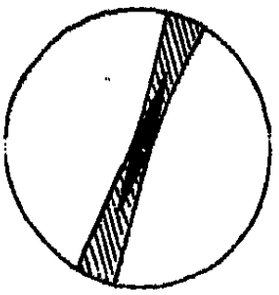
Fig. 19.



Ces prismes sont montés sur un cercle gradué vertical, de façon que l'on puisse faire tourner le plan de réflexion autour d'un axe coïncidant à peu près avec le prolongement de l'axe de l'aiguille suspendue.

L'aiguille est observée au moyen d'une lunette placée derrière les prismes, et l'on en voit les deux extrémités à la fois, comme dans la *fig.* 20. En faisant tourner les prismes autour de l'axe du cercle ver-

Fig. 20.



tical, on peut amener en coïncidence les images de deux lignes tracées sur l'aiguille. L'inclinaison de l'aiguille est ainsi déterminée par la lecture du cercle vertical.

L'intensité totale I de la force magnétique suivant la ligne d'inclinaison peut se déduire des durées d'oscillations T_1, T_2, T_3 et T_4 dans les quatre positions spécifiées plus haut par la formule

$$I = \frac{4\pi^2 A}{2M + 2M'}\left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} + \frac{1}{T_3^2} + \frac{1}{T_4^2}\right).$$

Les valeurs de M et M′ doivent être trouvées par la méthode de déviation et d'oscillation décrite précédemment; A est le moment d'inertie de l'aimant autour de son axe.

Mais les observations faites sur un aimant suspendu par une soie sont tellement plus exactes, que d'ordinaire on déduit la force totale de sa composante horizontale par la formule

$$I = H \sec \theta,$$

où I est la force totale, H la composante horizontale et θ l'inclinaison.

464. Les opérations par lesquelles on détermine l'inclinaison, étant des plus fastidieuses, ne sauraient convenir pour déterminer les variations continues de la force magnétique. L'instrument qui convient le mieux pour les observations continues est le magnétomètre de force verticale, qui consiste simplement en un aimant mis en équilibre sur un couteau de balance, de façon à être en équilibre stable quand son axe est à peu près horizontal.

Si Z est la composante verticale de la force magnétique, M le moment magnétique et θ le petit angle que l'axe magnétique fait avec

l'horizon,

$$MZ = mga\cos(\alpha - \theta),$$

en appelant m la masse de l'aimant; g, la force de gravité; a, la distance du centre de gravité à l'axe de suspension, et α l'angle que fait avec l'axe magnétique le plan passant par l'axe de suspension et le centre de gravité.

Pour une petite variation δZ de la force verticale, il y a une variation $\delta\theta$ de la position angulaire de l'aimant, telle que

$$M\,\delta Z = mga\sin(\alpha - \theta)\,\delta\theta.$$

Dans la pratique, cet instrument ne sert pas à déterminer la valeur absolue de la force magnétique, mais seulement à enregistrer ses petites variations. Pour cela, il suffit de connaître la valeur absolue de Z pour $\theta = 0$, et celle de $\frac{dZ}{d\theta}$.

Quand on connaît la force horizontale et l'inclinaison, la valeur de Z s'obtient par l'équation

$$Z = H\tan\theta_0,$$

où θ_0 est l'inclinaison et H la force horizontale.

Pour trouver la déviation due à une variation donnée de Z, prenons un aimant et, dirigeant son axe de l'est à l'ouest, plaçons-en le centre à une distance r_1, à l'est ou à l'ouest du déclinomètre, comme dans les expériences de déviation, et soit D_1 la tangente de la déviation.

Plaçons-le ensuite l'axe vertical et le centre à une distance r_2 au-dessus ou au-dessous du centre du magnétomètre de force verticale, et soit D_2 la tangente de la déviation produite dans ce magnétomètre. Si M est le moment de l'aimant de déviation,

$$2M = H r_1^3 D_1 = \frac{dZ}{d\theta} r_2^3 D_2;$$

d'où

$$\frac{dZ}{d\theta} = H\frac{r_1^3}{r_2^3}\frac{D_1}{D_2}.$$

Donc la valeur de la force verticale est à chaque instant

$$Z = Z_0 + \theta\frac{dZ}{d\theta},$$

Z_0 étant la valeur de Z pour $\theta = 0$.

Les instruments les plus convenables pour observer d'une manière continue, dans un observatoire permanent, les variations de la force magnétique, sont : le déclinomètre unifilaire, le magnétomètre bifi-

laire pour la force horizontale, et le magnétomètre-balance pour la force verticale.

Dans plusieurs observatoires, on obtient maintenant des tracés photographiques sur du papier préparé mû par un mouvement d'horlogerie : on obtient ainsi un enregistrement continu des indications des trois instruments à chaque instant. Ces tracés indiquent les variations des trois composantes rectangulaires de la force, de part et d'autre de valeurs prises pour termes de comparaison. Le déclinomètre donne la force dirigée vers l'ouest magnétique moyen, le magnétomètre bifilaire donne la variation de la force dirigée vers le nord magnétique, et le magnétomètre-balance donne la variation de la force verticale. Les valeurs de comparaison de ces forces, c'est-à-dire les valeurs qui correspondent aux zéros respectifs de ces divers instruments, s'obtiennent par des mesures fréquentes de la déclinaison, de la force horizontale et de l'inclinaison en valeurs absolues.

CHAPITRE VIII.

DU MAGNÉTISME TERRESTRE.

405. Ce que nous savons sur le magnétisme terrestre a été obtenu en étudiant la distribution de la force magnétique à la surface de la Terre à une certaine époque donnée, et les variations de cette distribution aux différentes époques.

On connaît la force magnétique en un lieu et à une époque quand on connaît ses trois coordonnées. Ces trois coordonnées peuvent être données sous la forme de la déclinaison ou azimut de la force, de l'inclinaison ou angle de la force sur l'horizon et de l'intensité totale.

Mais la manière la plus commode d'étudier la distribution de la force magnétique à la surface de la Terre consiste à considérer les grandeurs des trois composantes de la force

$$(1)\qquad \begin{cases} X = H\cos\delta, \text{ dirigée vers le nord,} \\ Y = H\sin\delta, \text{ vers l'ouest,} \\ Z = H\tang\theta, \text{ vers le zénith,} \end{cases}$$

où H est la force horizontale, δ la déclinaison et θ l'inclinaison.

Alors, si V est le potentiel magnétique à la surface de la Terre, et si nous considérons la Terre comme une sphère de rayon a,

$$(2)\qquad X = -\frac{1}{a}\frac{dV}{dl}, \qquad Y = -\frac{1}{a\cos l}\frac{dV}{d\lambda}, \qquad Z = -\frac{dV}{dr},$$

l étant la latitude, λ la longitude et r la distance au centre de la Terre.

On peut connaître V sur la surface de la Terre au moyen d'observations de force horizontale seulement, de la manière suivante :

Soit V_0 la valeur de V au pôle nord vrai; prenant l'intégrale le long d'un méridien quelconque, nous trouvons pour valeur du potentiel sur ce méridien à la latitude l

$$(3)\qquad V = -a\int_{\frac{\pi}{2}}^{l} X\,dl + V_0.$$

Ainsi, l'on peut connaître le potentiel en un point quelconque de la surface de la Terre, pourvu que l'on connaisse en chaque point la composante dirigée vers le nord, ainsi que la valeur V_0 du potentiel V au pôle.

Puisque les forces ne dépendent pas de la valeur absolue de V, mais seulement de ses dérivées, il n'est pas nécessaire d'assigner une valeur particulière à V_0.

La valeur de V en un point donné peut encore être déterminée si nous connaissons la valeur de X le long d'un méridien donné et celle de Y sur la surface entière.

Soit

$$(4) \qquad V_l = -a\int_{\frac{\pi}{2}}^{l} X\,dl + V_0,$$

l'intégration étant effectuée sur le méridien du pôle au parallèle l; on a

$$(5) \qquad V = V_l - a\int_{\lambda_0}^{\lambda} Y\cos l\,d\lambda,$$

l'intégration étant effectuée le long du parallèle depuis le méridien donné jusqu'au point où l'on veut avoir le potentiel.

Ces deux méthodes supposent que l'on ait fait un levé magnétique complet de la surface de la Terre, en sorte que l'on ait, en chaque point et pour une époque donnée, la valeur de X ou de Y, ou des deux. Nous ne possédons maintenant ces éléments magnétiques que pour un certain nombre de stations. Ces stations sont relativement nombreuses dans les parties civilisées de la Terre; mais, dans les autres régions, il y a de vastes étendues sur lesquelles nous n'avons point de données.

Cartes magnétiques.

466. Supposons que dans un pays d'étendue limitée, dont la plus grande longueur ne dépasse pas quelques centaines de milles, on ait fait des observations de déclinaison et de force horizontale en un nombre considérable de stations à peu près également réparties sur toute la contrée.

A l'intérieur de ce pays, on peut admettre que V est représenté, avec une exactitude suffisante, par la formule

$$(6) \qquad V = \text{const.} - a(A_1 l + A_2\lambda + \tfrac{1}{2}B_1 l^2 + B_2\lambda l + \tfrac{1}{2}B_3\lambda^2 + \dots);$$

d'où

$$X = A_1 + B_1 l + B_2 \lambda, \tag{7}$$

$$Y\cos\lambda = A_2 + B_2 l + B_3 \lambda. \tag{8}$$

Soient n stations dont les latitudes sont l_1, l_2, ... et les longitudes λ_1, λ_2, ..., et supposons que l'on connaisse X et Y en chaque station.

Soient

$$l_0 = \frac{1}{n}\Sigma(l) \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \frac{1}{n}\Sigma(\lambda); \tag{9}$$

l_0 et λ_0 peuvent être appelés la *latitude* et la *longitude de la station centrale.*

Soient

$$X_0 = \frac{1}{n}\Sigma(X) \quad \text{et} \quad Y_0\cos l_0 = \frac{1}{n}\Sigma(Y\cos l); \tag{10}$$

X_0 et Y_0 sont les valeurs de X et Y à la station centrale fictive; on a

$$X = X_0 + B_1(l - l_0) + B_2(\lambda - \lambda_0), \tag{11}$$

$$Y\cos l = Y_0\cos l_0 + B_2(l - l_0) + B_3(\lambda - \lambda_0). \tag{12}$$

Nous avons n équations de la forme (11) et n de la forme (12). Si nous désignons par ξ l'erreur probable sur la détermination de X, et par η l'erreur probable sur la détermination de $Y\cos l$, nous pouvons calculer ξ et η, en supposant que ces erreurs soient dues aux erreurs d'observation sur H et δ.

Soient h l'erreur probable de H et α celle de δ. Alors, puisque

$$dX = \cos\delta\, dH - H\sin\delta\, d\delta,$$

$$\xi^2 = h^2\cos^2\delta + d^2H^2\sin^2\delta.$$

De même

$$\eta^2 = h^2\sin^2\delta + d^2H^2\cos^2\delta.$$

Si les écarts de X et Y sur leurs valeurs données par des équations de la forme (11) et (12) dépassent considérablement les erreurs probables d'observation, nous pouvons conclure que ces écarts sont dus à des attractions locales, et nous n'avons aucune raison de donner au rapport de ξ à η d'autre valeur que l'unité.

Appliquant la méthode des moindres carrés, nous multiplions les équations de la forme (11) par η et celles de la forme (12) par ξ pour rendre leurs erreurs probables les mêmes. Puis nous multiplions chaque équation par le coefficient de l'une des quantités inconnues B_1, B_2, B_3, et nous ajoutons les résultats : on obtient ainsi trois équa-

tions, d'où l'on tire B_1, B_2, B_3,

$$P_1 = B_1 b_1 + B_2 b_{21},$$
$$(\eta^2 P_2 + \xi^2 Q_1) = B_1 \eta^2 b_2 + B_2 (\xi^2 b_1 + \eta^2 b_3) + B_3 \xi^2 b_2,$$
$$Q_2 = B_2 b_2 + B_3 b_3,$$

où nous avons écrit, pour abréger,

$$b_1 = \Sigma(l^2) - n l_0^2, \qquad b_2 = \Sigma(l\lambda) - n l_0 \lambda_0, \quad b_3 = \Sigma(\lambda^2) - n \lambda_0^2,$$
$$P_1 = \Sigma(lX) - n l_0 X_0, \qquad Q_1 = \Sigma(lY \cos l) - n l_0 Y_0 \cos l_0,$$
$$P_2 = \Sigma(\lambda X) - n \lambda_0 X_0, \qquad Q_2 = \Sigma(\lambda Y \cos l) - n \lambda_0 Y_0 \cos l_0.$$

En calculant B_1, B_2 et B_3 et en substituant dans les équations (11) et (12), nous pouvons obtenir les valeurs de X et Y en un point quelconque compris dans les limites du levé, débarrassées des perturbations locales qui se font sentir quand les roches voisines de la station sont magnétiques, ce qui est le cas pour la plupart des roches ignées.

Des levés de ce genre ne peuvent être faits que dans les pays où l'on peut transporter avec soi des instruments magnétiques et les installer dans un grand nombre de stations. Pour les autres parties du monde, nous devons nous contenter de trouver la distribution des éléments magnétiques par interpolation entre les valeurs de ces éléments relevées en un petit nombre de stations très éloignées les unes des autres.

467. Supposons maintenant que, par des procédés de ce genre ou par la méthode graphique équivalente, qui consiste à construire les cartes des lignes d'égale valeur des éléments magnétiques, on soit arrivé à connaître les valeurs de X, de Y et, par suite, de V en tous les points du globe. Il s'agit ensuite de développer V en série d'harmoniques sphériques de surface.

Si la Terre était aimantée uniformément et dans la même direction dans toute sa masse, V serait un harmonique de premier degré; les méridiens magnétiques seraient des grands cercles passant par deux pôles magnétiques diamétralement opposés; l'équateur magnétique serait un grand cercle, en tous les points duquel la force horizontale aurait la même valeur; et, si H_0 était cette valeur constante, la valeur en un autre point serait $H = H_0 \cos l'$, l' étant la latitude magnétique. La force verticale en un point quelconque serait $Z = 2 H_0 \sin l'$, et, θ étant l'inclinaison, on aurait

$$\operatorname{tang} \theta = 2 \operatorname{tang} l'.$$

Dans le cas de la Terre, l'équateur est défini la ligne d'inclinaison nulle : or ce n'est pas un grand cercle de la sphère.

Les pôles magnétiques sont définis les points où il n'y a pas de force horizontale, ou bien les points où l'inclinaison est de 90°. Il y a deux pareils points, l'un dans les régions septentrionales, l'autre dans les régions méridionales; mais ils ne sont pas diamétralement opposés, et la ligne qui les joint n'est pas parallèle à l'axe magnétique de la Terre.

468. Les pôles magnétiques sont les points où la valeur de V pour la surface de la Terre est maximum ou minimum ou stationnaire.

En un point où le potentiel est minimum, l'extrémité nord d'une aiguille d'inclinaison se dirige verticalement vers le bas; et une aiguille de boussole, placée en n'importe quel point voisin de ce pôle, tourne vers lui son extrémité nord.

En un point où le potentiel est maximum, l'extrémité sud de l'aiguille d'inclinaison se dirige vers le bas, et l'extrémité sud d'une aiguille de boussole se dirige vers ce point.

S'il y a sur la surface de la Terre p minima de V, il doit exister $p-1$ autres points où l'extrémité nord d'une aiguille d'inclinaison se dirige vers le bas, mais où une aiguille de boussole promenée tout autour du point ne tourne pas sur elle-même, de manière à diriger toujours son extrémité nord vers le point, mais tourne en sens inverse et présente tantôt son extrémité nord et tantôt son extrémité sud vers le point.

Si nous appelons les points où le potentiel est minimum *pôles nord vrais*, ces autres points pourront être appelés *pôles nord faux*, puisque l'aiguille de la boussole ne reste pas pointée sur eux. S'il y a p pôles nord vrais, il doit y avoir $p-1$ pôles nord faux; et, de même, s'il y a q pôles sud vrais, il doit exister $q-1$ pôles sud faux. Le nombre des pôles de même nom doit être impair, de sorte que l'opinion en cours à une certaine époque, qu'il y a deux pôles nord et deux pôles sud, est erronée. D'après Gauss, il n'y a réellement sur la Terre qu'un seul pôle nord vrai et un seul pôle sud vrai : il n'y a donc pas de pôles faux. La ligne qui joint ces pôles n'est pas un diamètre et n'est pas parallèle à l'axe magnétique de la Terre.

469. La plupart de ceux qui ont étudié autrefois le magnétisme terrestre ont essayé de figurer ses effets par ceux d'un ou plusieurs barreaux aimantés, dont la position des pôles devait être déterminée. Gauss a été le premier à exprimer la distribution du magnétisme terrestre d'une manière parfaitement générale, en développant le poten-

tiel en une série d'harmoniques solides, dont il a déterminé les coefficients pour les quatre premiers degrés. Ces coefficients sont au nombre de 24 : 3 pour le premier degré, 5 pour le deuxième, 7 pour le troisième et 9 pour le quatrième. On trouve que tous ces termes sont nécessaires pour donner une représentation suffisamment exacte de l'état actuel du magnétisme terrestre.

Trouver la partie de la force magnétique observée qui est due aux causes extérieures et celle qui est due aux causes intérieures.

470. Supposons que nous ayons obtenu un développement du potentiel magnétique de la Terre en harmoniques sphériques, qui, en chaque point de la surface de la Terre, soit en harmonie avec la grandeur et la direction effectives; Gauss a montré comment l'observation de la force verticale permet de déterminer si les forces magnétiques sont dues à des causes ayant leur siège à l'intérieur de la surface de la Terre, telles qu'une aimantation, ou à des courants électriques, ou si une partie de ces forces est due directement à des causes extérieures à la surface de la Terre.

Soit V le potentiel effectif, développé en une double série de sphériques harmoniques,

$$V = A_1 \frac{r}{a} + \cdots + A_i \left(\frac{r}{a}\right)^i + B_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} + \cdots + B_i \left(\frac{r}{a}\right)^{-(i+1)}.$$

La première série représente le potentiel dû aux causes extérieures, la seconde le potentiel dû aux causes intérieures à la surface de la Terre.

Les observations de force horizontale nous donnent la somme de ces deux séries pour $r = a$, le rayon de la Terre. Le terme d'ordre i est

$$V_i = A_i + B_i.$$

L'observation de la force verticale nous donne

$$Z = \frac{dV}{dr},$$

et le terme d'ordre i dans aZ est

$$aZ_i = iA_i - (i+1)B_i.$$

Donc la partie due aux causes extérieures est

$$A_i = \frac{(i+1)V_i + aZ_i}{2i+1},$$

et la partie due aux causes intérieures est

$$B_i = \frac{iV_i - aZ_i}{2i+1}.$$

Jusqu'ici, on n'a calculé le développement de V que pour la valeur moyenne de V à certaines époques ou dans leur voisinage. Il ne semble pas qu'aucune partie de cette valeur moyenne soit due à des causes extérieures à la Terre.

471. Nous ne connaissons pas encore assez la forme du développement des parties des variations de V qui dépendent du Soleil et de la Lune, pour pouvoir déterminer *par cette méthode* si une partie quelconque de ces variations est due à une force magnétique agissant du dehors. Toutefois, il est certain, ainsi que l'ont fait voir les calculs de MM. Stoney et Chambers, que la principale partie de ces variations ne peut être due à une action magnétique directe du Soleil ou de la Lune, à supposer que ces corps soient magnétiques (1).

472. Les principales variations de la force magnétique sur lesquelles ait été appelée l'attention sont les suivantes :

I. — *Les variations régulières.*

1° Les variations solaires, dépendant de l'heure du jour et de l'époque de l'année;

2° Les variations lunaires, dépendant de l'angle horaire et des autres éléments de position de la Lune;

3° Ces variations ne se répètent pas tous les ans, mais semblent soumises à une variation de plus longue période, d'environ onze ans.

4° En outre, il y a dans l'état du magnétisme terrestre un changement séculaire qui se continue depuis que l'on fait des observations magnétiques, et qui produit dans les éléments magnétiques des variations de bien plus grande amplitude qu'aucune de celles dont la période est plus courte.

---

(1) Le professeur Hornstein, de Prague, a découvert dans les éléments magnétiques un changement périodique dont la période de 27, 33 jours est presque exactement égale à celle de la révolution synodique du Soleil, telle qu'on a pu la déduire de l'observation des taches du Soleil au voisinage de son équateur. C'est par cette méthode, permettant de découvrir la durée de la rotation de la masse solide invisible du Soleil au moyen de ses effets sur l'aiguille aimantée, que le magnétisme a commencé, pour la première fois, à payer sa dette à l'Astronomie. (*Acad. de Vienne*, 15 juin 1871; *Proc. R. S.*, 16 nov. 1871.)

II. — *Les perturbations.*

473. A côté de ces variations régulières, les éléments magnétiques sont soumis à des perturbations soudaines, d'importance plus ou moins grande. On a remarqué que ces perturbations sont plus fréquentes à certaines époques qu'à d'autres, et qu'aux époques de grandes perturbations, les lois des variations régulières, bien distinctes aux époques de faibles perturbations, se trouvent masquées. Aussi a-t-on donné beaucoup d'attention à ces perturbations, et l'on a remarqué que les perturbations d'une certaine espèce se produisent plus fréquemment à certaines heures du jour, à certaines saisons, à certains intervalles de temps, quoique chaque perturbation prise à part semble tout à fait irrégulière. En outre de ces perturbations plus habituelles, il y a parfois des époques de perturbations excessives où le magnétisme est troublé pendant un jour ou deux : c'est ce qu'on appelle des *orages magnétiques*. Quelquefois on a observé au même instant des perturbations isolées dans des stations très éloignées.

M. Airy a trouvé que la plupart des perturbations observées à Greenwich correspondent à des courants électriques recueillis par des électrodes placées en terre dans le voisinage, et qu'elles sont telles que les causerait l'action directe sur l'aimant du courant de terre conservant sa direction actuelle et circulant dans un fil placé *au-dessous* de l'aimant.

On a reconnu qu'il y a tous les onze ans une époque de perturbation maximum qui paraît coïncider avec l'époque où les taches du Soleil sont le plus fréquentes.

474. Le champ de recherches où nous sommes amenés par l'étude du magnétisme terrestre est aussi profond qu'étendu.

Nous avons vu que le Soleil et la Lune agissent sur le magnétisme terrestre, et il a été prouvé que cette action ne peut s'expliquer en supposant que ces corps soient des aimants. Cette action est donc indirecte. Dans le cas du Soleil, une partie de cette action pourrait être thermique; mais, dans le cas de la Lune, nous ne saurions faire intervenir cette cause. Peut-être est-il possible que l'attraction de ces corps, en déterminant des tensions dans l'intérieur de la Terre, produise (§ **447**) des changements dans l'aimantation existante et cause, par une sorte de phénomène de marées, les variations semi-diurnes.

Mais toutes ces variations sont très petites relativement aux grands changements séculaires du magnétisme terrestre.

Quelle cause, extérieure à la Terre ou dans ses profondeurs les plus cachées, produit ces énormes changements du magnétisme terrestre qui déplacent lentement le pôle magnétique d'une partie à l'autre du globe? Quand nous considérons que l'intensité d'aimantation de ce globe immense, la Terre, est tout à fait comparable à ce que nous produisons à grand'peine dans nos aimants d'acier, ces énormes changements dans un corps si étendu nous obligent à conclure que nous ignorons encore un des plus puissants agents de la nature, dont l'activité a pour théâtre ces profondeurs de la Terre dont la connaissance nous est accessible par si peu de moyens.

QUATRIÈME PARTIE.

ÉLECTROMAGNÉTISME.

CHAPITRE I.

FORCE ÉLECTROMAGNÉTIQUE (1).

475. Plusieurs observateurs avaient remarqué que, dans certains cas, le magnétisme est développé ou détruit dans des aiguilles par des décharges électriques traversant ces aiguilles ou passant à côté d'elles,

(1) Ce Chapitre, l'un des plus intéressants de tout l'Ouvrage pour les lecteurs au courant des principales théories de physique mathématique et d'électricité, offrira certainement plus d'une difficulté à un lecteur débutant dans ces études. L'enchaînement des propositions y est très difficile à suivre; aussi paraît-il utile d'en signaler la cause.

Les difficultés proviennent de ce que l'auteur ne suit pas l'ordre des découvertes et n'accorde pas à la loi de Laplace l'importance fondamentale qu'elle mérite, non seulement dans l'ordre historique, mais au point de vue de l'enchaînement des faits. Cette loi est, en effet, la base de l'électromagnétisme : on pourrait même dire qu'elle constitue, à elle seule, tout l'électromagnétisme, car c'est elle qui constitue le lien élémentaire entre les courants et les aimants. Dans l'ordre historique, elle a fourni d'abord la définition de l'*intensité* d'un courant, et elle a permis ensuite de réduire à une question de pur calcul l'identité des champs magnétiques produits par les courants avec ceux produits par les aimants, base des idées de Faraday en électromagnétisme et en induction.

L'ordre suivi par Maxwell dans le présent Chapitre est tout autre; mais il était imposé par le plan même de l'Ouvrage. L'auteur, désireux, comme Faraday, d'écarter la considération des actions à distance, suit une marche inverse et prend, en quelque sorte, comme point de départ l'identité du champ magnétique des courants et des aimants (§ 476) et en déduit la loi élémentaire de l'électromagnétisme ou loi de Laplace. L'inversion de l'ordre historique n'offre assurément aucun inconvénient dans l'exposition rationnelle d'une théorie lorsque le postulatum emprunté à l'observation est simple et facile à vérifier. Malheureusement l'axiome expérimental auquel l'auteur est conduit (§ 482), à savoir l'équivalence d'un courant plan infiniment petit et d'un aimant de même puissance, ne

et l'on avait émis des hypothèses diverses sur la relation qui existe entre le magnétisme et l'électricité; mais les lois de ces phénomènes et la forme de cette relation étaient restées entièrement inconnues jusqu'au jour où Hans-Christian Œrsted (1), faisant à Copenhague une leçon particulière pour quelques élèves plus avancés, observa que le fil reliant les extrémités d'une pile voltaïque agissait sur un aimant placé dans le voisinage. Il publia cette découverte dans un Mémoire intitulé : *Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam,* en date du 21 juillet 1820.

On avait essayé sans succès des expériences sur les relations de l'aimant et des corps chargés d'électricité : c'est alors qu'Œrsted entreprit de déterminer l'effet d'un fil *échauffé* par un courant électrique. Mais il découvrit que le courant lui-même, et non la chaleur du fil, était la cause de l'action, et que « le courant électrique agit de manière à faire tourner », c'est-à-dire qu'un aimant placé dans le voisinage d'un fil traversé par un courant, tend à se placer perpendiculairement au fil, et, si l'on déplace l'aimant autour du fil, c'est la même extrémité qui reste tournée en avant.

---

remplit à aucun degré les conditions qu'on aime à trouver dans le point de départ d'une théorie physico-mathématique.

D'abord, c'est une loi *infinitésimale,* ce qui n'est déjà pas dans l'esprit des idées synthétiques de Faraday; ensuite, cette loi est complexe par le nombre des éléments géométriques qui y figurent; de plus, elle contient un élément arbitraire, à savoir la forme indéterminée du circuit infiniment petit, ce qui est contraire à la nature concrète des notions fondamentales empruntées d'ordinaire à l'expérience.

Mais ce qu'il y a de plus grave, c'est que ce postulatum paraît admettre précisément ce qu'il s'agit de démontrer, à savoir l'identité des champs magnétiques des courants et des aimants. Or c'est là justement la grande découverte d'Ampère, et c'est seulement en suivant l'ordre historique indiqué ci-dessus qu'on arrive à une véritable démonstration de cette identité. Il est singulier que ce point de vue ait échappé à l'auteur, et qu'il n'ait pas, en dehors du plan qu'il s'était imposé, indiqué cette autre marche si claire et si utile pour faire comprendre un si grand résultat. En effet, en suivant l'ordre historique, on n'emprunte à l'expérience que la loi de Laplace, c'est-à-dire l'action d'un élément de courant sur un élément de masse magnétique, loi presque aussi simple que la loi de Newton, et tout l'électromagnétisme s'en déduit par un simple calcul. N'est-ce pas là le caractère d'une conquête véritable dans le domaine de la Philosophie naturelle?

Malgré ces critiques, qui ne touchent, d'ailleurs, que le côté didactique de la question, on n'en doit pas moins savoir gré à Maxwell des efforts qu'il a faits dans ce Chapitre pour faire rentrer l'exposition de l'électromagnétisme dans les vues synthétiques de Faraday : quelques Notes additionnelles suffiront d'ailleurs pour compléter les deux modes de démonstration. [C.]

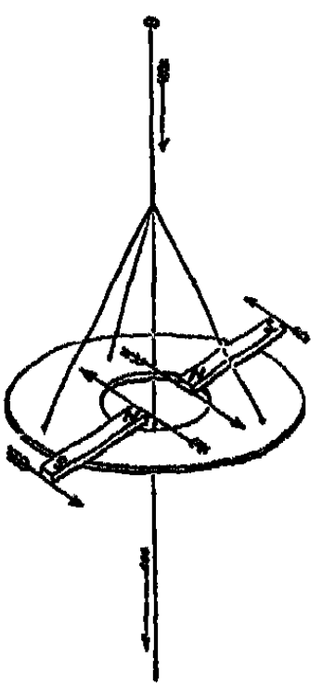
(1) *Voir* un autre récit de la découverte d'Œrsted dans une lettre du professeur Hansteen, *Vie de Faraday,* par le Dr Bence Jones, t. II, p. 395.

470. On voit donc que, dans l'espace qui environne un fil traversé par un courant électrique, un aimant est soumis à des forces qui dépendent de la position du fil et de l'intensité du courant. L'espace dans lequel ces forces agissent peut donc être considéré comme un champ magnétique, et nous pouvons l'étudier de la même manière que nous avons déjà étudié le champ dans le voisinage des aimants ordinaires, en examinant la forme des lignes de forces magnétiques et en mesurant l'intensité de la force en chaque point.

477. Commençons par le cas d'un fil rectiligne de longueur infinie traversé par un courant. Si l'on imagine un homme placé le long du fil de façon que le courant circule de sa tête vers ses pieds, un aimant librement suspendu devant cet homme se place de telle sorte que l'extrémité ordinairement dirigée vers le nord est tournée vers sa droite.

Les lignes de force magnétique sont en tous leurs points perpendiculaires aux plans menés par le fil (*fig.* 21) : ce sont donc des cercles tracés

Fig. 21.



dans des plans perpendiculaires au fil qui passe par leur centre. Si on déplaçait le long d'un de ces cercles de la gauche vers la droite un pôle d'aimant qui se dirige vers le nord, ce pôle serait soumis à une force agissant toujours dans le sens du mouvement. L'autre pôle du même aimant serait soumis à une force de sens contraire.

478. Pour comparer ces forces, supposons le fil vertical et le courant descendant; plaçons l'aimant sur un support capable de tourner librement autour d'un axe vertical coïncidant avec le fil. On trouve que, dans ces conditions, le courant est sans action pour imprimer à l'ensemble de l'appareil un mouvement de rotation autour de l'axe; donc l'action du courant vertical sur les deux pôles de l'aimant est telle, que les moments des deux forces par rapport au courant pris comme axe sont égaux et contraires.

Soient

m_1 et m_2 les puissances des deux pôles;
r_1 et r_2 leurs distances à l'axe du fil;
T_1 et T_2 les intensités aux deux pôles de la force magnétique due au courant.

La force qui agit sur m_1 est $m_1 T_1$, et, puisqu'elle est à angle droit sur l'axe, son moment est $m_1 T_1 r_1$. De même, celui de la force qui agit sur l'autre pôle est $m_2 T_2 r_2$; et, puisqu'on n'observe pas de mouvement,

$$m_1 T_1 r_1 + m_2 T_2 r_2 = 0.$$

Mais nous savons que dans tous les aimants

$$m_1 + m_2 = 0;$$

d'où

$$T_1 r_1 = T_2 r_2,$$

c'est-à-dire que la force électromagnétique, due à un courant rectiligne de longueur infinie, est perpendiculaire au courant et varie en raison inverse de sa distance à ce courant.

479. Puisque le produit Tr dépend de la force du courant, il peut servir de mesure de ce courant. Cette méthode de mesure diffère de celle qui est fondée sur les phénomènes électrostatiques, et comme elle dépend des phénomènes magnétiques produits par les courants électriques, elle est appelée *système électromagnétique de mesure*. Dans le système électromagnétique, si i est l'intensité,

$$2i = Tr \quad (1).$$

480. Si l'on prend le fil pour axe des z, les composantes rectangu-

(1) [*Voir* plus loin l'origine du coefficient 2 introduit ici dans la définition numérique de l'intensité. (P.)]

laires de T sont

$$X = -2i\frac{y}{r^2}, \qquad Y = 2i\frac{x}{r^2}, \qquad Z = 0.$$

Ici $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte, celle de

$$2i \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + C;$$

donc, comme dans plusieurs cas précédents, la force magnétique du champ peut se déduire d'une fonction potentielle; mais, ici, le potentiel est une fonction ayant une infinité de valeurs différant les unes des autres de $4\pi i$. Les dérivées du potentiel par rapport aux coordonnées ont en chaque point une valeur déterminée et unique.

L'existence d'une fonction potentielle pour le champ qui environne un courant électrique n'est pas un résultat évident du principe de la conservation de l'énergie; car, dans tout courant effectivement existant, il y a constamment dépense de l'énergie électrique de la pile pour vaincre la résistance du fil; donc, à moins que l'on ne connaisse très exactement le montant de cette dépense, on peut supposer qu'une partie de l'énergie de la pile peut être employée à produire du travail lorsqu'on déplace un aimant suivant une courbe fermée. En fait, si l'on déplace un pôle magnétique m suivant une courbe fermée embrassant le fil, la quantité $4\pi mi$ de travail est réellement effectuée. C'est seulement pour les circuits fermés qui ne comprennent pas le fil, que l'intégrale de la force le long de la courbe devient nulle. Nous devons donc, pour l'instant, considérer que la loi de la force et l'existence du potentiel trouvent leur démonstration dans l'expérience que l'on vient de décrire.

481. Si nous considérons l'espace qui entoure un conducteur rectiligne indéfini, nous voyons que c'est un espace cyclique, puisqu'il se referme sur lui-même. Si nous concevons un plan ou une autre surface, commençant à la ligne droite et s'étendant d'un seul côté jusqu'à l'infini, cette surface pourra être regardée comme un diaphragme ramenant l'espace cyclique à être acyclique. Si d'un point à un autre on mène des lignes ne coupant point le diaphragme et qu'on définisse le potentiel comme l'intégrale de la force le long d'une quelconque de ces lignes, le potentiel en un point quelconque aura une valeur définie et unique (¹).

(¹) [Il n'y a aucun travail produit quand on déplace un aimant réel suivant une

Le champ magnétique est alors identique à tous égards à celui qui serait dû à un feuillet magnétique de puissance i coïncidant avec cette surface. Ce feuillet est limité sur un bord par la droite infinie, et les autres parties de son contour sont à une distance infinie de la partie du champ que l'on considère (1).

482. Dans toutes les expériences que l'on peut réaliser, le courant forme un circuit fermé de dimensions finies; nous comparerons donc l'action d'un circuit fermé à celle d'un feuillet magnétique limitée par le circuit.

De nombreuses expériences, dont les plus anciennes sont celles d'Ampère, et les plus exactes celles de Weber, ont établi qu'à une distance qui est grande relativement aux dimensions du circuit, l'action magnétique d'un petit circuit plan est la même que celle d'un aimant dont l'axe est normal au plan du circuit, et dont le moment magnétique est égal à l'aire du circuit multipliée par l'intensité du courant (2).

Si l'on suppose que l'espace compris par le circuit soit fermé par

---

courbe fermée dans le voisinage d'un conducteur de forme invariable. La valeur de ce travail est $4\pi i \times \Sigma m$, si Σm est la somme algébrique des masses magnétiques de l'aimant : or cette somme est nulle. (*Voir* plus loin, § 486.) (P.)]

(1) [Si l'on suppose ce feuillet plan, l'angle solide sous lequel il est vu d'un pôle m est mesuré par la surface d'un fuseau de la sphère du rayon 1, compris entre : 1° le grand cercle intersection de la sphère et du plan passant par m et par le circuit rectiligne, et 2° le grand cercle intersection de cette sphère et du plan parallèle à celui du circuit. Ce fuseau a pour surface deux fois la valeur de l'angle plan de son dièdre, soit $2 \operatorname{arc\,tang} \frac{y'}{x}$, si l'on prend le plan du feuillet comme plan des xy. D'après le § 409, le potentiel du feuillet est donc $2\Phi \operatorname{arc\,tang} \frac{y'}{x}$. Le facteur 2 de la définition de i donnée § 479 a donc été introduit, afin que la valeur numérique de l'intensité d'un courant soit la puissance du feuillet magnétique équivalent.

Il est aisé de voir que, si l'on supposait le feuillet de forme quelconque, et non plan, cela reviendrait à ajouter une constante à la valeur du potentiel donnée plus haut. (P.)]

(2) [Il est fâcheux que l'auteur n'ait pas donné plus de détails sur des expériences d'une importance considérable dans l'histoire de l'électromagnétisme : le lecteur les trouvera dans le Mémoire d'Ampère (*Théorie des phénomènes électrodynamiques*, 1826), et dans les Mémoires de W. Weber, *Electrodynamische Maassbestimmungen* (*Abhandlungen der Königlich. Sächs. Gesellschaft zu Leipzig*, 1850-1860).

Pour la démonstration élémentaire de l'équivalence indiquée dans le texte, *voir* la Note I à la fin du Chapitre. (C.)]

une surface ayant le circuit pour limite et formant ainsi diaphragme, et qu'on substitue au courant électrique un feuillet magnétique de puissance i coïncidant avec la surface, l'action sur tous les points éloignés est identique à celle du courant.

483. Jusqu'ici nous avons supposé les dimensions du circuit petites relativement à la distance d'une quelconque de ses parties au point du champ examiné. Nous allons maintenant admettre pour le circuit une forme et une grandeur quelconques, et nous allons considérer son action en un point non situé sur le fil conducteur. La méthode suivante, qui a d'importantes applications géométriques, a été introduite dans ce but par Ampère.

Considérons une surface S limitée par le circuit et ne passant pas par le point P; sur cette surface, traçons deux séries de lignes se coupant les unes les autres, de façon à la diviser en parties élémentaires, dont les dimensions soient petites relativement à leur distance à P et aux rayons de courbure de la surface.

Supposons qu'autour de chacun de ces éléments circule un courant d'intensité i, le sens du courant dans tous ces éléments étant le même *que dans le circuit primitif.*

Sur chacune des lignes qui forment la séparation de deux éléments contigus passent deux courants égaux, d'intensité i et de sens opposés.

L'effet de deux courants égaux et contraires placés au même endroit est rigoureusement nul, sous quelque aspect que l'on envisage les courants. Par suite, leur effet magnétique est nul. Les seules portions des circuits élémentaires qui ne soient pas neutralisées de cette manière sont celles qui coïncident avec le circuit primitif. L'effet total des circuits élémentaires est donc équivalent à celui du circuit primitif.

484. Or, tout circuit élémentaire peut être considéré comme un petit circuit plan dont la distance à P est grande en comparaison de ses dimensions; on peut donc lui substituer un feuillet magnétique de puissance i, dont le contour coïncide avec le circuit élémentaire. L'effet magnétique de cet élément de feuillet sur P est équivalent à l'effet du courant primitif. L'ensemble des éléments de feuillet constitue un feuillet magnétique de puissance i, coïncidant avec la surface S et limité par le circuit primitif, et l'action magnétique du feuillet entier sur le point P est équivalente à celle du circuit.

Il est clair que l'action du circuit est indépendante de la forme de

la surface S_1 que l'on a tracée d'une manière absolument arbitraire pour remplir l'aire comprise dans le circuit. Nous voyons par là que l'action d'un feuillet magnétique ne dépend que de la forme de la courbe limite et non de la forme du feuillet lui-même. C'est le résultat que nous avions déjà obtenu au § 410; mais il est intéressant de voir comment on peut le déduire de considérations électromagnétiques.

Donc, en un point quelconque, la force magnétique due au circuit est identique en grandeur et en direction à celle qui est due à un feuillet magnétique limité par le circuit et ne passant pas par le point, la puissance du feuillet étant numériquement égale à l'intensité du courant. La direction du courant dans le circuit et celle de l'aimantation dans le feuillet sont liées par la relation suivante : Un homme placé debout, les pieds sur la face du feuillet, que nous appelons *positive*, et qui tend à se tourner vers le nord, verrait le courant circuler devant lui de droite à gauche.

485. Mais le potentiel magnétique du circuit diffère de celui du feuillet pour les points qui font partie du feuillet.

Soit ω l'angle solide sous-tendu au point P par le feuillet, compté positivement si c'est le côté positif ou austral qui est voisin de P : le potentiel magnétique en un point non situé sur le feuillet même est $\omega\varphi$, φ étant la puissance du feuillet. Pour un point situé sur le feuillet, nous pouvons supposer celui-ci divisé en deux parties de puissance φ_1 et φ_2, où $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$, et telles que le point soit sur la face positive de φ_1 et sur la face négative de φ_2. Le potentiel en ce point est

$$\omega(\varphi_1 + \varphi_2) - 4\pi\varphi_2.$$

Du côté négatif du feuillet, le potentiel devient $\varphi(\omega - 4\pi)$. Donc, dans ce cas, le potentiel est continu et a une valeur unique et déterminée. D'autre part, dans le cas d'un courant électrique, le potentiel en un point non situé sur le fil conducteur lui-même est $i\omega$, i étant l'intensité du courant et ω l'angle solide sous-tendu par le circuit au point considéré, lequel se compte positivement si le courant, vu du point P, marche en sens inverse des aiguilles d'une montre.

La quantité $i\omega$ est une fonction ayant une infinité de valeurs, dont la différence commune est $4\pi i$; mais les dérivées de $i\omega$, par rapport aux coordonnées, ont, en chaque point de l'espace, une valeur unique et déterminée.

486. Si l'on place dans le voisinage d'un circuit électrique un aimant solénoïdal long, mince et flexible, les extrémités nord et sud de l'ai-

mant tendent à se mouvoir en sens inverse autour du fil, et, si elles étaient libres d'obéir à la force magnétique, l'aimant finirait par s'enrouler autour du fil, de manière à former une bobine serrée. S'il était possible d'obtenir un aimant n'ayant qu'un seul pôle ou des pôles de forces inégales, cet aimant prendrait autour d'un courant un mouvement de rotation continu, toujours dans la même direction; mais, comme les pôles d'un aimant sont toujours égaux et contraires, ce cas ne peut jamais se présenter. Cependant Faraday a montré comment on peut produire la rotation continue d'un pôle d'aimant autour d'un courant, en permettant à l'un des pôles de tourner autour du courant, tandis que l'autre ne le peut pas. Pour que cette opération puisse se répéter indéfiniment, il faut qu'une fois à chaque révolution le corps de l'aimant passe d'un côté à l'autre du courant; et pour réaliser cette condition sans interrompre le flux d'électricité, on partage le courant entre deux branches, en sorte que, l'une des branches étant coupée pour laisser passage à l'aimant, le courant continue de passer par l'autre branche. A cet effet, Faraday employait une auge circulaire pleine de mercure, représentée *fig.* 23, § 491. Le courant entre par le fil AB, se divise en B, et, après avoir parcouru les arcs BPQ et BRP, se reforme en P et quitte l'auge par le fil PO, le godet de mercure O et un fil vertical placé au-dessous de O, par lequel il s'échappe.

L'aimant, non représenté sur la figure, est monté de manière à pouvoir tourner autour d'un axe vertical passant par O, et le fil OP tourne avec lui. L'aimant passe par l'ouverture de l'auge, un pôle, le pôle nord par exemple, étant en dessous du plan de l'auge et l'autre en dessus. Quand l'aimant et le fil OP tournent autour de l'axe vertical, le courant passe graduellement de la branche de l'auge qui est devant l'aimant à celle qui est derrière, de sorte qu'à chaque révolution complète l'aimant passe d'un côté à l'autre du courant. Le pôle nord de l'aimant tourne autour du courant descendant dans le sens nord-est-sud-ouest; et, si ω et ω' sont les angles solides (sans tenir compte des signes) que l'auge circulaire sous-tend aux deux pôles, le travail de la force électromagnétique par révolution complète est

$$mi(4\pi - \omega - \omega'),$$

m étant la puissance de chaque pôle et i l'intensité du courant (1).

---

(1) Ce problème peut se discuter de la manière suivante : Reportons-nous à la *fig.* 23, § 491; prenons OP dans une position quelconque, et introduisons par la pensée des courants qui se fassent équilibre, i suivant BO, x et y suivant

487. Essayons maintenant de nous faire une idée de l'état du champ magnétique dans le voisinage d'un circuit électrique linéaire.

Supposons trouvée pour chaque point de l'espace la valeur de l'angle solide ω sous-tendu par le circuit, et supposons décrites les surfaces pour lesquelles ω est constant. Ces surfaces seront des surfaces équipotentielles. Chacune de ces surfaces sera limitée par le circuit, et deux surfaces quelconques se couperont sur le circuit sous un angle $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ (1).

La *Pl. XVIII* représente une section des surfaces équipotentielles dues à un courant circulaire. Le petit cercle représente la section du fil conducteur, et la ligne horizontale au bas de la figure est la perpendiculaire menée au plan du courant circulaire par le centre de ce cercle. Les surfaces équipotentielles tracées, au nombre de 24, correspondent à des valeurs de ω différant de $\frac{\pi}{6}$; ce sont des surfaces de révolution ayant cette ligne pour axe commun. Ce sont évidemment des

---

OB. Quand l'aimant effectue une révolution complète, aucun travail n'est exécuté sur le pôle sud par le courant i, que l'on suppose passer par ABOZ, puisque ce pôle décrit une courbe fermée qui ne comprend pas le courant. Le pôle nord, au contraire, décrit une courbe qui comprend le courant, et le travail effectué sur ce pôle est $4\pi mi$. Nous devons maintenant évaluer les effets de courants x dans le circuit BPO et de y dans le circuit BRPO. Le potentiel du pôle nord, qui est au-dessous du plan de ces circuits, sera

$$-mx\omega_0 + my(\omega - \omega_0),$$

et celui du pôle sud

$$-mx\omega_0' - my(-\omega' + \omega_0'),$$

où ω_0 et ω_0' désignent les angles solides sous-tendus aux deux pôles par BOP, et ω et ω' ceux qui sont sous-tendus par l'auge circulaire. Le potentiel résultant est

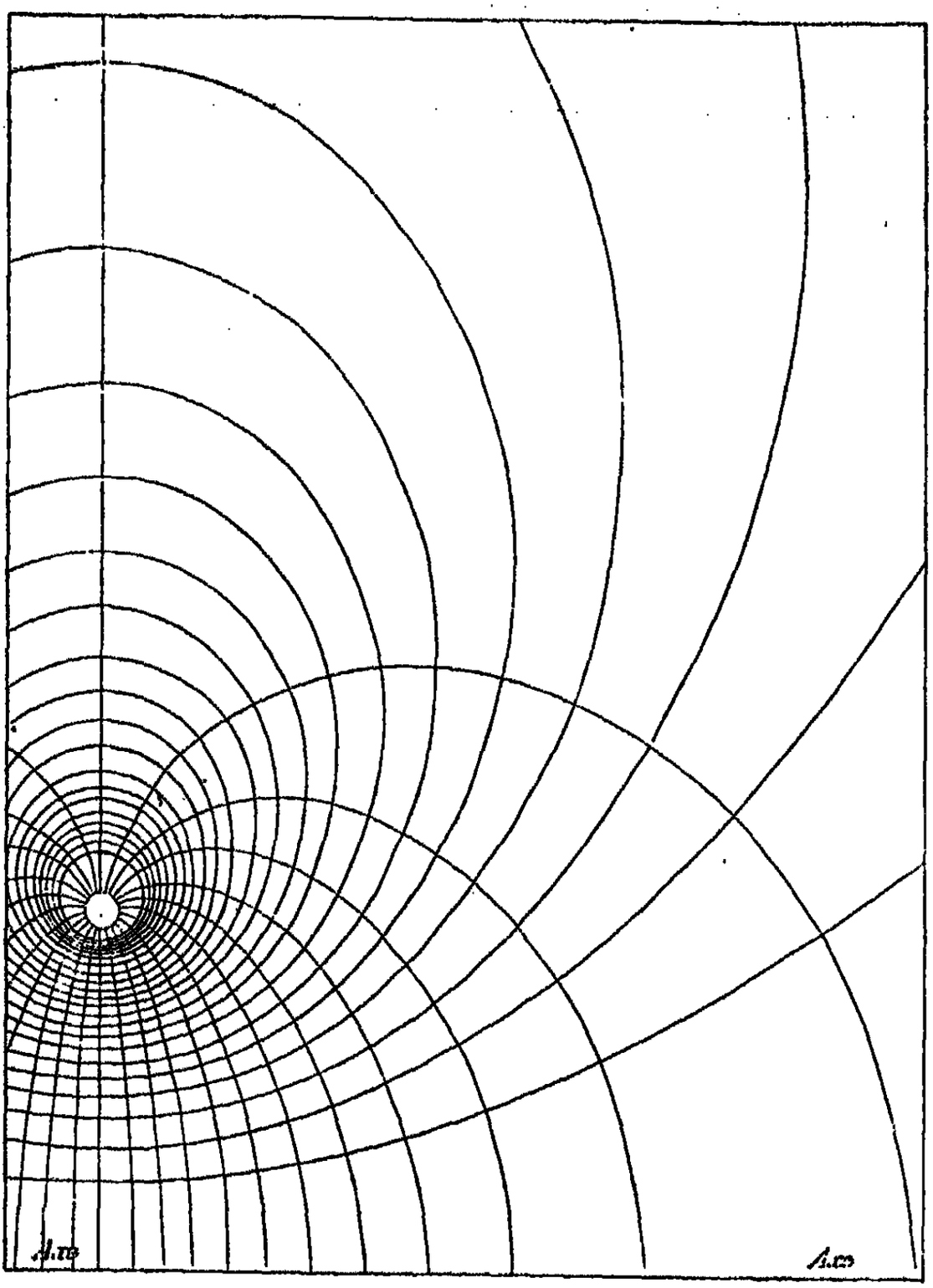
$$my(\omega + \omega') - mi(\omega_0 + \omega_0').$$

Donc, si OP, partant de sa position actuelle, décrit une révolution complète dans la direction NESO, le potentiel changera de $-mi(\omega + \omega')$. Le travail effectué par les courants est donc tel qu'on l'indique dans le texte.

(1) En effet, soit O un point du circuit, et soient OP, OQ, OR les lignes suivant lesquelles le plan normal en O coupe le plan osculateur et les plans tangents aux deux surfaces en ce point. Les points Q, R sont si voisins de O que l'on peut les regarder comme étant sur les deux surfaces, et l'on prend QR parallèle au plan osculateur. Les angles solides en Q et en R auront à peu près la forme de lunules et, par conséquent, leur valeur sera

$$\omega_1 = 4\pi - 2\widehat{QOP}, \qquad \omega_2 = 4\pi - 2\widehat{ROP}.$$

Pl. XVIII.



figures aplaties, déprimées suivant la direction de l'axe. Elles se rencontrent le long du circuit sous des angles de 15°.

La force qui agit sur un pôle magnétique placé en un point d'une surface équipotentielle est perpendiculaire à cette surface et varie en raison inverse de la distance des surfaces consécutives. Les courbes fermées qui entourent la section du fil, sur la *Pl. XVIII*, sont des lignes de force. Elles sont tirées du Mémoire de Sir William Thomson, sur le *Mouvement tourbillonnaire* (1). (*Voir* aussi § 702.)

Action d'un circuit électrique sur un système magnétique.

488. Nous sommes maintenant en mesure de déduire de la théorie des feuillets magnétiques l'action d'un courant électrique sur un système magnétique quelconque placé dans le voisinage. Construisons, en effet, un feuillet magnétique, dont la puissance soit numériquement égale à l'intensité du courant, dont le contour coïncide en position avec le circuit, et qui d'ailleurs ne rencontre aucune des parties du système magnétique; l'action de ce feuillet sur le système magnétique est identique à celle du courant électrique.

Réaction du système magnétique sur le courant électrique.

489. Appliquant à ce qui précède le principe que l'action et la réaction sont égales et opposées, nous concluons que l'action mécanique du système magnétique sur le courant électrique est identique à son action sur un feuillet magnétique ayant pour contour le circuit.

L'énergie potentielle d'un feuillet magnétique de puissance φ, placé dans un champ de force magnétique dont le potentiel est V, est, d'après le § 419,

$$\mathrm{M} = \varphi \int\int \left(l \frac{d\mathrm{V}}{dx} + m \frac{d\mathrm{V}}{dy} + n \frac{d\mathrm{V}}{dz} \right) d\mathrm{S},$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale menée à la face positive de l'élément $d\mathrm{S}$ du feuillet, et où l'intégration est étendue sur toute la surface de ce feuillet.

Or l'intégrale

$$\mathrm{N} = \int\int (la + mb + nc) d\mathrm{S},$$

où a, b, c sont les composantes de l'induction magnétique, représente

(1) *Trans. R. S. Edin.*, t. XXV, p. 217; 1869.

la quantité d'induction magnétique qui se produit à travers le feuillet, ou, pour employer le langage de Faraday, le *nombre*, compté algébriquement, des lignes d'induction magnétique qui traversent le feuillet de sa face négative à sa face positive, les lignes qui le traversent en sens contraire étant comptées négativement.

Nous souvenant que le feuillet n'appartient pas au système magnétique auquel est dû le potentiel V, et que, par suite, la force magnétique est égale à l'induction magnétique, nous avons

$$a = -\frac{dV}{dx}, \qquad b = -\frac{dV}{dy}, \qquad c = -\frac{dV}{dz},$$

et nous pouvons écrire la valeur de M

$$M = -\varphi N.$$

Or, si δx_1 représente un déplacement du feuillet, et X_1 la force qui agit sur lui pour favoriser ce déplacement, d'après le principe de la conservation de l'énergie, il vient

$$X_1 \delta x_1 + \delta M = 0$$

ou

$$X = \varphi \frac{dN}{dx}.$$

Nous avons ainsi déterminé la nature de la force qui correspond à un déplacement donné du feuillet. Elle favorise ou contrarie ce déplacement, suivant qu'il augmente ou diminue le nombre N des lignes d'induction qui traversent le feuillet.

La même chose est vraie du circuit électrique équivalent. Un déplacement de ce circuit est favorisé ou contrarié, suivant qu'il augmente ou diminue le nombre des lignes d'induction qui traversent le circuit dans le sens positif.

Il faut nous rappeler que, sur une ligne d'induction, le sens positif est celui suivant lequel le pôle nord d'un aimant tend à se mouvoir le long de la ligne, et qu'une ligne d'induction traverse le circuit dans le sens positif, si entre le sens de la ligne d'induction et celui du courant d'électricité vitrée, il existe la même relation qu'entre le mouvement longitudinal et le mouvement de rotation d'une vis à droite. (*Voir* § 25.)

490. Il est clair que la force correspondant à un déplacement de l'ensemble du circuit peut se déduire immédiatement de la théorie des feuillets magnétiques. Mais ce n'est pas tout : si une partie du cir-

cuit est flexible, de façon qu'elle puisse se déplacer indépendamment du reste du circuit, nous pouvons rendre le bord du feuillet susceptible de la même sorte de déplacement, en découpant sa surface en un nombre suffisant de parties reliées par des joints flexibles. De là nous concluons que tout déplacement d'une partie du circuit dans une direction donnée, ayant pour effet d'augmenter le nombre des lignes d'induction qui traversent le circuit, sera favorisé par la force électromagnétique agissant sur le circuit.

Par suite, chaque partie du circuit est sollicitée par une force tendant à lui faire traverser les lignes d'induction, de manière qu'un plus grand nombre de ces lignes soient comprises dans le contour du circuit, et le travail de cette force pendant ce déplacement est égal au produit du nombre des lignes d'induction additionnelles par l'intensité du courant.

Supposons que l'élément de circuit ds, dans lequel passe le courant d'intensité i, se déplace parallèlement à lui-même sur une longueur ∂x; il engendre une aire en forme de parallélogramme dont les côtés sont parallèles à ds et à ∂x.

Si $\mathfrak{B}$ désigne l'induction magnétique, et ε l'angle de sa direction avec la normale au parallélogramme, la valeur de l'accroissement de N correspondant au déplacement s'obtient en multipliant l'aire du parallélogramme par $\mathfrak{B}\cos\varepsilon$. Le résultat de cette opération est figuré géométriquement par le volume du parallélépipède dont les arêtes représentent en grandeur et en direction ∂x, ds et $\mathfrak{B}$, volume qui doit être compté positif si un mobile, décrivant ces trois arêtes dans l'ordre indiqué, tourne autour de la diagonale du parallélépipède dans le sens des aiguilles d'une montre. Le volume de ce parallélépipède est égal à $X\,\partial x$.

Si 0 est l'angle compris entre ds et $\mathfrak{B}$, l'aire de la face correspondante est

$$ds\,\mathfrak{B}\sin 0,$$

et si τ_i est l'angle que le déplacement ∂x fait avec la normale à cette face, le volume du parallélépipède est

$$ds\,\mathfrak{B}\sin 0\,\partial x\cos\tau_i = \partial N.$$

Or

$$X\,\partial x = i\partial N = i\,ds\,\mathfrak{B}\sin 0\,\partial x\cos\tau_i,$$

et

$$X = i\,ds\,\mathfrak{B}\sin 0\cos\tau_i$$

est la composante suivant la direction ∂x de la force qui agit sur ds.

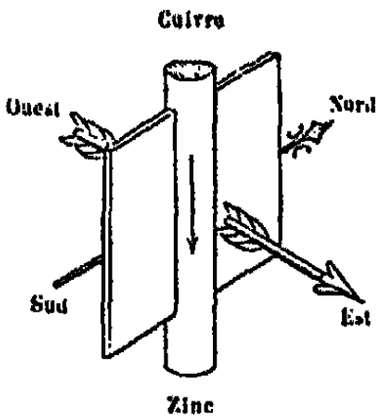
Cette force est donc perpendiculaire au parallélogramme et égale à

$$i\,ds\,\mathfrak{B}\sin\theta.$$

Or c'est là l'aire d'un parallélogramme dont les côtés sont en grandeur et en direction $i\,ds$ et $\mathfrak{B}$. La force qui agit sur ds est donc représentée en grandeur par l'aire de ce parallélogramme, et en direction par la normale menée à son plan dans le sens du mouvement longitudinal d'une vis à droite, dont on ferait tourner le manche de la direction du courant ids vers celle de l'induction magnétique $\mathfrak{B}$.

Dans le langage des quaternions, on peut exprimer la direction et

Fig. 22.



la grandeur de cette force en disant que c'est la partie vectorielle du résultat obtenu en multipliant le vecteur ids, qui est l'élément du courant, par le vecteur $\mathfrak{B}$ qui est l'induction magnétique (1).

491. Nous avons ainsi complètement déterminé la force qui agit sur une portion de circuit électrique placée dans un champ magnétique. Si le circuit se déplace d'une manière quelconque, en sorte qu'après avoir pris des formes et des positions diverses il revienne à sa place primitive, l'intensité du courant restant constante durant ce mouvement, le travail total effectué par les forces électromagnétiques est nul. Puisqu'il en est ainsi pour n'importe quel cycle de mouvements du circuit, il suit de là qu'il est impossible d'entretenir au moyen de forces électromagnétiques un mouvement continu de rotation dans une partie d'un conducteur linéaire à intensité constante, malgré les résistances de frottement, etc.

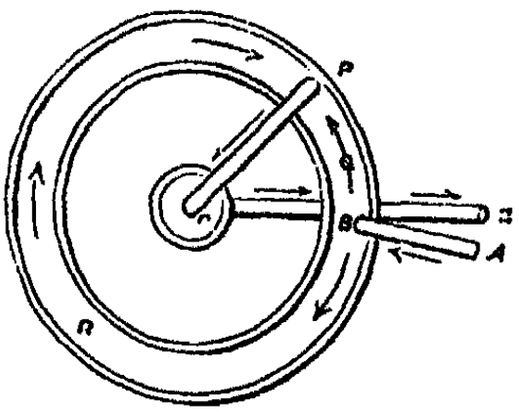
(1) [Dans le cas d'un pôle magnétique, cela se réduit à la loi de Laplace. (*Voir* la Note à la fin du Chapitre.) (P.)]

Mais il est possible de produire une rotation continue, pourvu qu'en un point de son parcours le courant électrique passe de l'un à l'autre des conducteurs qui glissent l'un sur l'autre.

Quand un circuit comporte un contact par glissement d'un conducteur sur la surface d'un solide poli ou d'un liquide, on ne peut plus le considérer comme un circuit simple linéaire à intensité constante; mais on doit le regarder comme un système de deux ou d'un plus grand nombre de circuits à intensité variable, entre lesquels le courant est distribué de manière que ceux pour lesquels N croît soient traversés par les courants dans le sens positif, et ceux pour lesquels N décroît dans le sens négatif.

Ainsi, dans l'appareil représenté *fig.* 23, OP est un conducteur mobile dont un des bouts repose dans un godet de mercure O,

Fig. 23.



tandis que l'autre bout plonge dans une auge circulaire de mercure, concentrique à O.

Le courant arrive par AB, se partage dans l'auge circulaire en deux parties, dont l'une, x, suit l'arc BOP, tandis que l'autre, y, suit BRP. Ces courants se réunissent en P, suivent le conducteur mobile PO et l'électrode OZ jusqu'au pôle zinc de la pile. L'intensité du courant suivant OP et OZ est $x + y$ ou i.

Ici, nous avons deux circuits : ABQPOZ où l'intensité est x, circulant dans le sens positif, et ABRPOZ où l'intensité est y, circulant dans le sens négatif.

Soit $\mathfrak{B}$ l'induction magnétique, que nous supposerons dirigée vers le haut, normalement au plan du cercle.

Pendant que OP se déplace d'un angle θ en sens inverse des aiguilles d'une montre, l'aire du premier circuit croît de $\frac{1}{2}\overline{OP}^2\theta$, et celle du second circuit décroît de la même quantité. Puisque la force du cou-

rant dans le premier circuit est x, le travail qu'il a accompli est

$$\tfrac{1}{2}x\overline{OP}^2\theta\mathfrak{B};$$

et puisque la force du courant dans le second circuit est $-y$, le travail accompli par lui est

$$-\tfrac{1}{2}y\overline{OP}^2\theta\mathfrak{B}.$$

Le travail total effectué est donc

$$\tfrac{1}{2}(x+y)\overline{OP}^2\theta\mathfrak{B}, \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}i\overline{OP}^2\theta\mathfrak{B},$$

qui dépend seulement de la force du courant dans PO. Donc, si i est maintenu constant, la tige OP se déplace tout autour du cercle sous l'action d'une force constante dont le moment est

$$\tfrac{1}{2}i\overline{OP}^2\mathfrak{B}.$$

Si, comme dans les latitudes septentrionales, $\mathfrak{B}$ est dirigée vers le bas et si le courant est dirigé vers l'intérieur du cercle, la rotation se fait dans le sens négatif, c'est-à-dire dans le sens PQBR.

492. Nous avons maintenant le moyen de passer de l'action mutuelle des aimants et des courants à l'action d'un courant sur un autre; car nous savons que les propriétés magnétiques d'un circuit électrique C_1, relativement à un système magnétique M_2, sont identiques à celles d'un feuillet magnétique S_2 dont le contour coïncide avec le circuit et dont la puissance est numériquement égale à l'intensité du courant électrique. Supposons que le système magnétique M_2 consiste en un feuillet magnétique S_2; l'action mutuelle de S_1 et S_2 sera identique à celle de S_1 et d'un circuit C_2, coïncidant avec le contour de S_2 et ayant une intensité numériquement égale à la puissance de S_2, et cette dernière action est identique à celle qui s'exercerait entre C_1 et C_2.

Donc l'action mutuelle de deux courants C_1 et C_2 est identique à celle des feuillets magnétiques correspondants S_1 et S_2.

Nous avons déjà étudié, au § 423, l'action mutuelle de deux feuillets magnétiques limités par les courbes fermées s_1 et s_2. Si nous faisons

$$M = \int_0^{s_2}\int_0^{s_1} \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds_1 ds_2,$$

ε étant l'angle compris entre les directions des éléments ds_1 et ds_2 et r leur distance, et l'intégration étant étendue une fois autour de s_1 et

une fois autour de s_2; et si nous appelons M le potentiel des deux courbes fermées s_1 et s_2, l'énergie potentielle des deux feuillets magnétiques de puissance i_1 et i_2 limités aux deux circuits est

$$-i_1 i_2 M,$$

et la force X, qui favorise un déplacement δx quelconque, est

$$i_1 i_2 \frac{dM}{dx}.$$

On peut déduire de ce résultat toute la théorie de la force qui agit sur une portion quelconque de circuit électrique, sous l'influence d'un autre circuit électrique.

493. La méthode que nous avons suivie dans ce Chapitre est celle de Faraday. Au lieu de commencer, comme nous le ferons, à l'exemple d'Ampère, dans le Chapitre suivant, par l'action directe d'une portion de circuit sur une portion d'un autre circuit, nous avons montré d'abord qu'un circuit produit sur un aimant le même effet qu'un feuillet magnétique; en d'autres termes, nous avons déterminé la nature du champ magnétique dû au circuit. Ensuite, nous avons montré qu'un circuit placé dans un champ magnétique est soumis à la même force qu'un feuillet magnétique. Nous avons ainsi déterminé la force qui agit sur un circuit placé dans un champ magnétique quelconque. Enfin, en supposant le champ magnétique dû à un second courant électrique, nous avons déterminé l'action d'un circuit sur tout ou partie d'un autre circuit.

494. Appliquons cette méthode au cas d'un courant rectiligne de longueur infinie, agissant sur une portion de conducteur rectiligne parallèle.

Supposons que dans le premier conducteur circule un courant i dirigé verticalement de haut en bas. Dans ce cas, le pôle nord d'une aiguille aimantée se tourne vers la droite d'une homme placé suivant l'axe du courant et regardant l'aiguille.

Les lignes d'induction magnétique sont donc des cercles horizontaux ayant leur centre sur l'axe, et sur lesquels la direction positive est nord, est, sud, ouest.

Soit un autre courant vertical descendant placé à l'ouest du premier. Les lignes d'induction magnétique dues au premier courant sont dirigées vers le nord aux points où passe le second. La direction de la force qui agit sur ce dernier est déterminée par le mouvement

d'une vis à droite dont la tête tournerait du nadir, direction du courant, vers le nord, direction de l'induction magnétique; or, dans ce cas, la vis se meut vers l'est, c'est-à-dire que la force agissant sur le second courant est dirigée vers le premier; ou, en général, puisque les phénomènes ne dépendent que des positions relatives des courants, deux courants parallèles et de même sens s'attirent.

On montrerait de même que deux courants parallèles et de sens contraires se repoussent.

495. L'intensité de l'induction magnétique, à la distance r d'un courant rectiligne d'intensité i, est, ainsi que nous l'avons montré au § 479,

$$2\frac{i}{r}.$$

Donc, une partie d'un second conducteur parallèle au premier et traversée par un courant i' de même sens est attirée vers le premier par une force

$$F = 2ii'\frac{a}{r},$$

où a est la longueur de la partie considérée et r sa distance au premier conducteur.

Puisque le rapport de a à r est une quantité numérique indépendante de la valeur absolue de ces lignes, le produit de deux intensités mesuré en mesure électromagnétique doit avoir les dimensions d'une force. Par suite, les dimensions du courant unité sont

$$[i] = \left[F^{\frac{1}{2}}\right] = \left[M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right].$$

496. Une autre méthode pour déterminer la direction de la force qui agit sur un courant se déduit de la considération de la relation qui existe entre l'action magnétique du courant et celle d'autres aimants et courants.

Si, d'un côté du fil que traverse le courant, l'action magnétique due à ce courant est de même sens, ou à peu près, que l'action due à d'autres courants, de l'autre côté du fil ces forces sont de sens contraire ou à peu près; et la force qui agit sur le fil est dirigée du côté où les forces s'ajoutent les unes aux autres vers celui où elles sont opposées (1).

---

(1) [Il est aisé de voir que cette règle *mnémonique* se réduit à la suivante : le circuit est sollicité par une force dirigée vers la gauche du personnage d'Ampère regardant dans la direction du champ, ou vers la droite du personnage de Maxwell (§ 477) dans lequel le courant entre par la tête. (P.)

Ainsi, un courant allant de haut en bas étant placé dans un champ de force magnétique dirigée vers le nord, son action magnétique sera dirigée du nord vers l'ouest et du sud vers l'est. Donc les forces s'ajoutent du côté de l'ouest, se contrarient du côté de l'est, et, par suite, le courant est soumis à l'action d'une force dirigée de l'ouest à l'est. (Voir *fig.* 22, § 490.)

Sur la *Pl. XVII*, le petit cercle représente la section du fil qui conduit le courant descendant, placé dans un champ de force magnétique uniforme dirigé vers le côté gauche de la planche. La force magnétique est plus grande en dessous du fil qu'en dessus; le fil est donc poussé du bas vers le haut de la figure (1).

497. Si deux courants sont dans le même plan, mais ne sont pas parallèles, on peut appliquer le même principe. Supposons que l'un des conducteurs soit un fil rectiligne indéfini, situé dans le plan du papier que l'on suppose horizontal. A droite du courant, la force magnétique agit de haut en bas, et à gauche de bas en haut; la même chose est vraie à l'égard de la force magnétique due à une petite partie d'un second courant situé dans le même plan. Si ce second courant est à droite du premier, les forces s'ajoutent à sa droite et se contrarient à sa gauche. Donc, ce second courant sera soumis à une force tendant à le déplacer de sa droite vers sa gauche, la grandeur de cette force ne dépendant que de la position du second courant, et non de sa direction. Si le second courant est à gauche du premier, il sera poussé de gauche à droite.

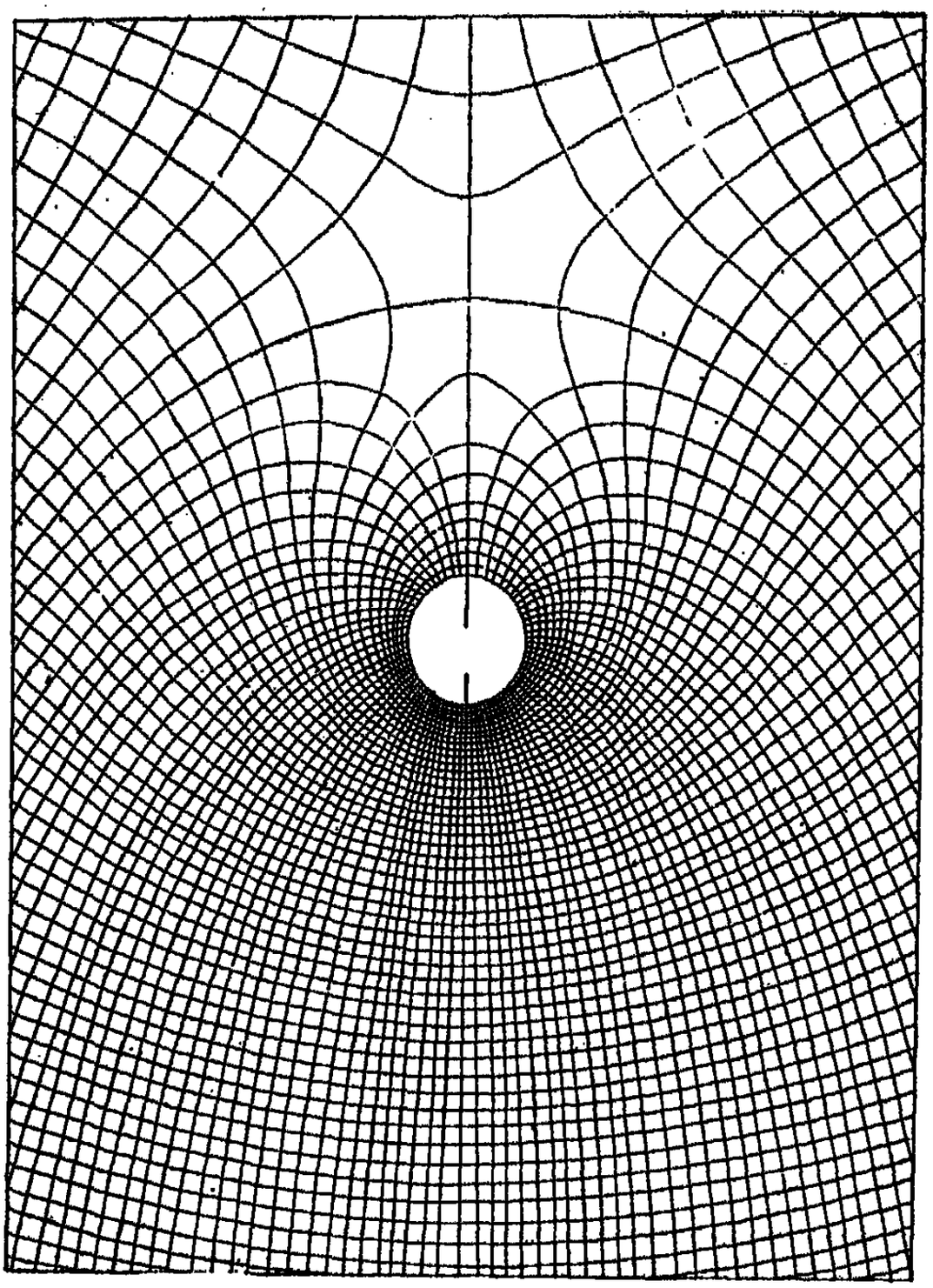
Ainsi, si le second courant est de même sens que le premier, il est attiré; s'il est de sens contraire, il est repoussé; s'il est perpendiculaire au premier et marche en s'éloignant de lui, il est poussé dans la direction du premier courant, et s'il lui est perpendiculaire et marche vers lui, il est poussé dans une direction opposée à celle où marche le premier courant.

Pour étudier les actions mutuelles de deux courants, il n'est pas nécessaire de se reporter aux relations qui existent entre le magnétisme et l'électricité, et que nous avons essayé de figurer en nous servant d'une vis à droite. Même si l'on avait oublié ces relations, on arriverait à des résultats exacts, à condition de s'attacher invariablement à l'une des deux formes que peut prendre la relation.

---

(1) [*Voir*, à la fin du Chapitre, la Note II, relative à la construction de la *Pl. XVII*. (C.)]

Pl. XVII.



Champ magnétique uniforme troublé par un courant électrique dans un conducteur rectiligne.

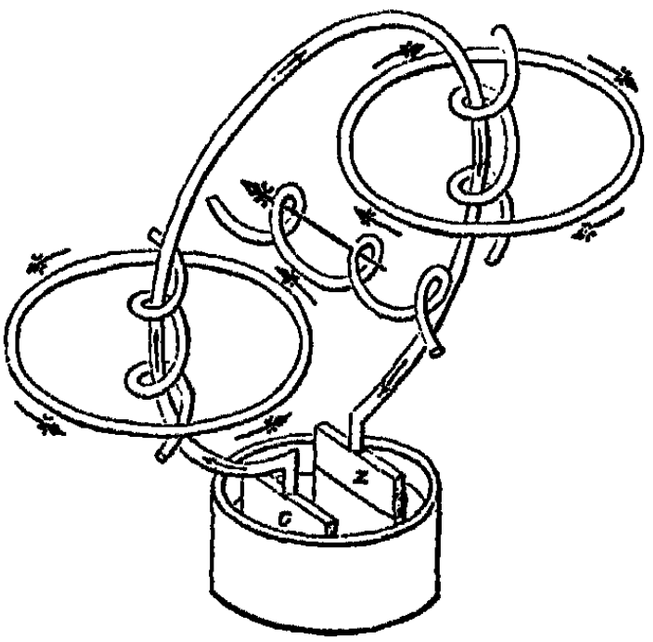
498. Récapitulons maintenant les phénomènes magnétiques dus au courant électrique, autant du moins que nous les avons étudiés jusqu'ici.

Nous pouvons concevoir le circuit électrique comme formé d'une pile voltaïque et d'un fil qui en relie les extrémités, ou d'un dispositif thermo-électrique, ou d'une bouteille de Leyde et d'un fil qui réunit l'armature positive à l'armature négative, ou de tout autre arrangement donnant un courant électrique suivant un chemin déterminé.

Le courant produit dans son voisinage des phénomènes magnétiques.

Si l'on trace une courbe fermée quelconque, et que l'on prenne tout le long de cette courbe l'intégrale de la force magnétique, cette intégrale est nulle si la courbe fermée et le circuit ne sont pas entrelacés; mais s'ils sont entrelacés, en sorte que le courant i passe au travers de la courbe fermée, l'intégrale est $4\pi i$; elle est positive si le sens de l'intégration le long de la courbe fermée est celui suivant lequel un observateur, traversant la courbe dans le sens du courant, verrait se mouvoir les aiguilles d'une montre. Pour une personne qui

Fig. 24.



Relation entre le courant électrique et l'induction magnétique, figurée au moyen d'une vis à droite.

se déplacerait suivant la courbe fermée dans le sens de l'intégration et qui traverserait le circuit électrique, le sens du courant serait alors

celui du mouvement des aiguilles d'une montre. Nous pouvons exprimer ce fait d'une autre manière, en disant : la relation entre les directions des deux courbes est figurée par une vis à droite tracée autour du courant électrique et une vis à droite, autour de la courbe fermée. Si, quand on se déplace sur le filet d'une des vis, le sens de la rotation coïncide avec la direction positive de l'autre, l'intégrale est positive; dans le cas contraire, elle est négative.

499. *Note.* — L'intégrale $4\pi i$ ne dépend que de l'intensité du courant, et de rien autre chose. Elle ne dépend point de la nature du conducteur traversé par le courant, métal, électrolyte ou conducteur imparfait. Nous avons lieu de croire que, lors même qu'il n'y a pas conduction proprement dite, mais seulement variation du déplacement électrique, comme dans le verre d'une bouteille de Leyde pendant sa charge ou sa décharge, l'effet magnétique du mouvement électrique est exactement le même (1).

La valeur de l'intégrale $4\pi i$ ne dépend pas non plus de la nature du milieu dans lequel a été tracée la courbe fermée. Elle reste la même, que la courbe fermée soit tracée en entier dans l'air ou qu'elle traverse un aimant ou du fer doux, ou toute autre substance paramagnétique ou diamagnétique.

500. Quand un circuit est placé dans un champ magnétique, l'action mutuelle du courant et des autres éléments du champ dépend de l'intégrale de l'induction magnétique sur une surface quelconque limitée par le circuit. Si, en donnant un certain mouvement à tout ou partie du circuit, on peut *augmenter* cette intégrale, il y aura une force mécanique tendant à déplacer de la manière en question l'ensemble ou cette partie du conducteur.

Le mouvement du conducteur, qui augmente l'intégrale, est un mouvement perpendiculaire à la direction du courant et coupant les lignes d'induction.

Si l'on trace un parallélogramme dont les côtés soient parallèles et proportionnels à l'intensité du courant et à l'induction magnétique en un point donné, la force qui agit sur l'unité de longueur du conducteur est numériquement égale à l'aire de ce parallélogramme et elle est perpendiculaire à son plan; elle agit dans le sens du mouve-

---

(1) [*Voir*, à ce sujet, une expérience de Röntgen favorable à cette manière de voir (*Phil. Mag.*, t. XIX, p. 385). (P.)]

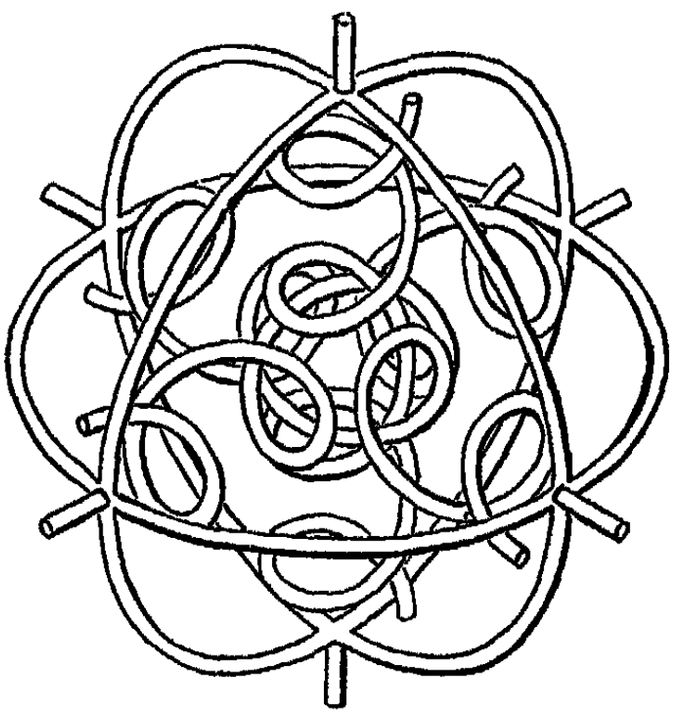
ment longitudinal d'une vis à droite dont la tête tourne de la direction du courant vers celle de l'induction magnétique.

Nous avons donc une nouvelle définition électromagnétique d'une ligne d'induction magnétique : c'est la ligne à laquelle est toujours perpendiculaire la force qui agit sur le conducteur.

On peut aussi la définir une ligne tout le long de laquelle un conducteur traversé par un courant électrique n'est soumis à aucune force.

501. Il faut avoir soin de se rappeler que la force mécanique qui pousse un conducteur traversé par un courant à travers les lignes de force magnétique, agit non point sur le courant électrique, mais sur le conducteur qui le transmet. Si le conducteur est un disque tournant ou un fluide, il se déplace en obéissant à cette force, et ce mou-

Fig. 25.



Relations entre les directions positives du mouvement et de la rotation, figurées par trois vis à droite.

vement peut être ou n'être pas accompagné d'un changement de position du courant électrique transmis par le conducteur. Mais si le courant lui-même peut librement choisir sa route à travers la masse d'un conducteur fixe ou dans un réseau de fils, lorsqu'on fait agir sur le système une force magnétique constante, ce chemin n'est pas mo-

diffé d'une façon permanente (¹); après que certains phénomènes transitoires, appelés *courants d'induction*, ont pris fin, on trouve que la distribution du courant est la même que si aucune force magnétique n'était en jeu.

La seule force qui agisse sur les courants électriques est la force électromotrice, et il faut la bien distinguer de la force mécanique qui a fait le sujet de ce Chapitre.

(¹) [Cette affirmation semble en contradiction avec les expériences de M. Hall. Ce savant a montré que, si une plaque mince de métal est placée entre les pôles d'un fort électro-aimant perpendiculairement aux lignes de force, et qu'on la fasse traverser par un courant, la distribution du potentiel sur la plaque change quand l'électro-aimant est excité. Cet effet est très variable, suivant la nature de la plaque conductrice, et paraît devoir être attribué plutôt à une modification subie par la matière dans le champ magnétique, qu'à une action du champ sur le courant lui-même ou à une force électromotrice spéciale. (P.)]

NOTE I

Sur l'équivalence d'un courant plan infiniment petit et d'un petit aimant de même puissance.

PAR M. A. CORNU.

L'auteur est amené à prendre cette équivalence comme point de départ des propositions ultérieures; il paraîtra à certains lecteurs plus concluant de démontrer cette proposition en partant de la loi de Laplace, établie d'après les expériences de Biot et Savart : la démonstration est réduite à une pure question de Géométrie analytique. Le nombre de données géométriques nécessaires pour définir le courant plan et toutes les directions utiles à considérer est assez grand, ce qui rend le calcul en apparence un peu compliqué; mais au fond il n'est besoin d'aucun artifice pour l'effectuer : il pourrait donc être exposé dans un Cours presque élémentaire.

Voici l'indication succincte du calcul :

La loi de Laplace donne une expression de la force F exercée par l'élément ds sur la masse magnétique M (située à l'origine des coordonnées)

$$F = kiM\frac{ds\sin\varepsilon}{r^2},$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, x, y, z étant les coordonnées d'un point de la courbe, $ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, ε angle de ds avec r.

Cette force est dirigée perpendiculairement à ds et à r : soient X, Y, Z les trois composantes de cette force; on a les trois relations

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= F^2, \\ Xx + Yy + Zz &= 0, \\ X\,dx + Y\,dy + Z\,dz &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire facilement

$$\frac{X}{z\,dy - y\,dz} = \frac{Y}{x\,dz - z\,dx} = \frac{Z}{y\,dx - x\,dy} = \frac{F}{r\,ds\sin\varepsilon}.$$

Pour avoir l'action du petit courant fermé, il faut intégrer les expressions X, Y, Z après substitution de F. Le calcul se simplifie par l'approximation dont on peut user, en posant

$$x = a + u, \qquad y = b + v, \qquad z = c + w,$$

a, b, c étant les coordonnées d'un point fixe intérieur au circuit, u, v, w les

coordonnées relatives d'un point de la courbe; on a alors, en négligeant les carrés u^2, v^2, w^2 devant $a^2+b^2+c^2=\rho^2$,

$$r^2=x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2+2(au+bv+cw)+\ldots=\rho^2+2(au+bv+cw).$$

La condition d'être un circuit plan introduit la relation

$$ul+vm+wn=0,$$

en appelant l, m, n les cosinus des angles de la normale du plan du circuit avec les trois axes.

La substitution des valeurs de x, y, z dans les expressions de X entraîne des simplifications correspondantes; on a, par exemple,

$$X=kiM\frac{x\,dy-y\,dx}{r^3}=\frac{kiM}{\rho^3}[(c+w)\,dv-(b+v)\,dw]\left[1-\frac{3}{\rho^2}(au+bv+bw)\right].$$

On élimine la variable u à l'aide de l'équation précédente.

Effaçant tous les termes négligeables ou formant des différentielles exactes qui donnent zéro pour un contour fermé, on parvient aisément à grouper les termes de manière à n'avoir plus comme facteur que le binôme $(w\,dv-v\,dw)$, différentielle du double de la projection de l'aire du circuit ou $2\sigma l$; d'où l'on conclut, après l'intégration,

$$X=\frac{kiM\sigma}{\rho^3}\left[-l+\frac{3a'}{\rho^2}(al+bm+cn)\right];$$

on obtient Y et Z par permutation tournante.

Ces trois composantes peuvent être identifiées avec celles de l'action d'un petit aimant ayant son centre en a, b, c dirigé suivant l, m, n et formé par deux masses magnétiques égales à m situées à la distance p.

En effet, la force totale est le résultat des deux forces

$$F_1=-h\frac{Mm}{r_1^2},\qquad F_2=+h\frac{Mm}{r_2^2},$$

dirigées suivant les droites dont les angles ont respectivement pour cosinus

$$\frac{x_1}{r_1},\ \frac{y_1}{r_1},\ \frac{z_1}{r_1}\quad\text{et}\quad\frac{x_2}{r_2},\ \frac{y_2}{r_2},\ \frac{z_2}{r_2}.$$

Les coordonnées des deux pôles sont évidemment

$$\begin{aligned} x_1&=a+pl, & x_2&=a-pl,\\ y_1&=b+pm, & y_2&=a-pm,\\ z_1&=c+pn, & z_2&=a-pn; \end{aligned}$$

d'où, avec la même approximation que ci-dessus,

$$r_1^2=\rho^2\left[1+\frac{2p}{\rho^2}(al+bm+cn)\right],\qquad r_2^2=\rho^2\left[1-\frac{2p'}{\rho^2}(al+bm+cn)\right].$$

On déduira les trois composantes X, Y, Z du calcul de l'une d'elles par permu-

tation

$$X = X_1 + X_2 = -h\frac{Mm}{\rho^3}(a+pl)\left[1-\frac{3\rho}{\rho^2}(al+bm+cn)\right]$$
$$+h\frac{Mm}{\rho^3}(a-pl)\left[1-\frac{3\rho'}{\rho^2}(al+bm+cn)\right]$$

et, finalement,

$$X = h\frac{M\,2mp'}{\rho^3}\left[-l+\frac{3a'}{\rho'}(al+bm+cn)\right].$$

L'identification du circuit plan et du petit aimant perpendiculaire se déduit de la comparaison de ces expressions avec les précédentes, et l'on a la relation cherchée

Moment magnétique $2mp = i\sigma$ puissance du courant,

si l'on admet que la constante k de la loi de Laplace soit la même que la constante h de la loi de Coulomb.

NOTE II

Relative à la construction de la Planche XVII.

PAR M. A. CORNU.

Nous nous proposons de faire sur la *Pl. XVII* (p. 167) l'étude analogue à celle qui a été faite sur la *Pl. III* (t. I, p. 198), à savoir la construction des lignes équipotentielles et des lignes de force qui y sont tracées, et la détermination graphique des éléments que le tracé permet de conclure.

1° ÉQUATION DES LIGNES ÉQUIPOTENTIELLES.

Le champ primitif avait pour surfaces équipotentielles des plans parallèles

$$V_1 = V_0 + \alpha x,$$

la force exercée sur l'unité de masse magnétique étant α, dirigée suivant l'axe des x négatifs, car la définition, ordinairement usitée, de la force est $X = -\frac{dV}{dx}$. Cette direction, indiquée dans le texte (§ 490), se déterminerait aisément, d'après la figure, par la considération suivante.

Lorsque la force devient nulle dans un champ magnétique, sa direction devient en *général indéterminée* et, par conséquent aussi, *la direction de la tangente aux lignes équipotentielles*. Cette indétermination de la direction de la tangente est le caractère d'un point singulier; donc le point singulier qui existe en P est vraisemblablement le point où la force résultante est nulle, sachant que cette résultante est due à l'action du courant placé en C et que cette action est perpendiculaire au plan passant par le courant (normal au plan de la figure) et au rayon vecteur $PC = b$. Cette action, antagoniste de celle du champ, est perpendiculaire à PC. L'axe des x, direction des lignes de force du champ uniforme primitif, doit donc être horizontal. Le sens resterait évident et indéterminé. L'auteur indique (§ 496) qu'elle est dirigée vers la gauche.

On prendra l'axe des y perpendiculairement au précédent, de sorte que le courant indéfini, qui ajoute son action à celle du champ uniforme, est dirigé suivant l'axe des z.

L'introduction de ce courant ajoute au potentiel, en chaque point (x, y), la quantité (§ 477)

$$V_2 = B_0 + 2i \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

i étant l'intensité du courant, car les surfaces équipotentielles sont des plans

passant par le courant, et le potentiel, par chaque plan, croît proportionnellement à l'angle que fait ce plan avec une direction arbitraire prise comme origine.

La somme des deux potentiels, en chaque point (x, y), peut s'écrire

$$V = V_0 + ax + 2i \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x};$$

c'est l'équation des lignes équipotentielles dont V est le paramètre arbitraire; on est ainsi ramené à la Géométrie plane.

La discussion de ces courbes est facile : nous examinerons surtout les propriétés qui peuvent servir au tracé de l'épure. On écrira l'équation ci-dessous

$$y = x \operatorname{tang}\left(\frac{V - V_0 - ax}{2i}\right).$$

Partant de l'origine $(x = 0, y = 0)$, commune à toutes ces courbes, on aura la direction de la tangente par l'équation

$$\lim\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{V - V_0}{2i}\right).$$

Prenons $V = V_0$ comme origine des valeurs de V; on aura

$$\lim\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

courbe tangente à l'axe des x à l'origine; le reste de la courbe est donné par

$$y = -x \operatorname{tang}\left(\frac{x}{b}\right);$$

en posant $b = \frac{a'}{a}$, l'axe des y est un axe de symétrie. Aux environs de l'origine la courbe se réduit à

$$y = -\frac{x^2}{b},$$

c'est-à-dire à une parabole tangente à l'axe des x; le rayon de courbure γ est évidemment égal à

$$\frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0} = \frac{b}{2},$$

c'est-à-dire à la moitié du paramètre b. On verra plus loin que ce paramètre b est égal à PC. La courbe présente une série de branches infinies avec asymptotes, car on a $y = x$ pour les valeurs équidistantes

$$x = b(2k+1)\frac{\pi}{2};$$

les deux plus rapprochées de toutes sont

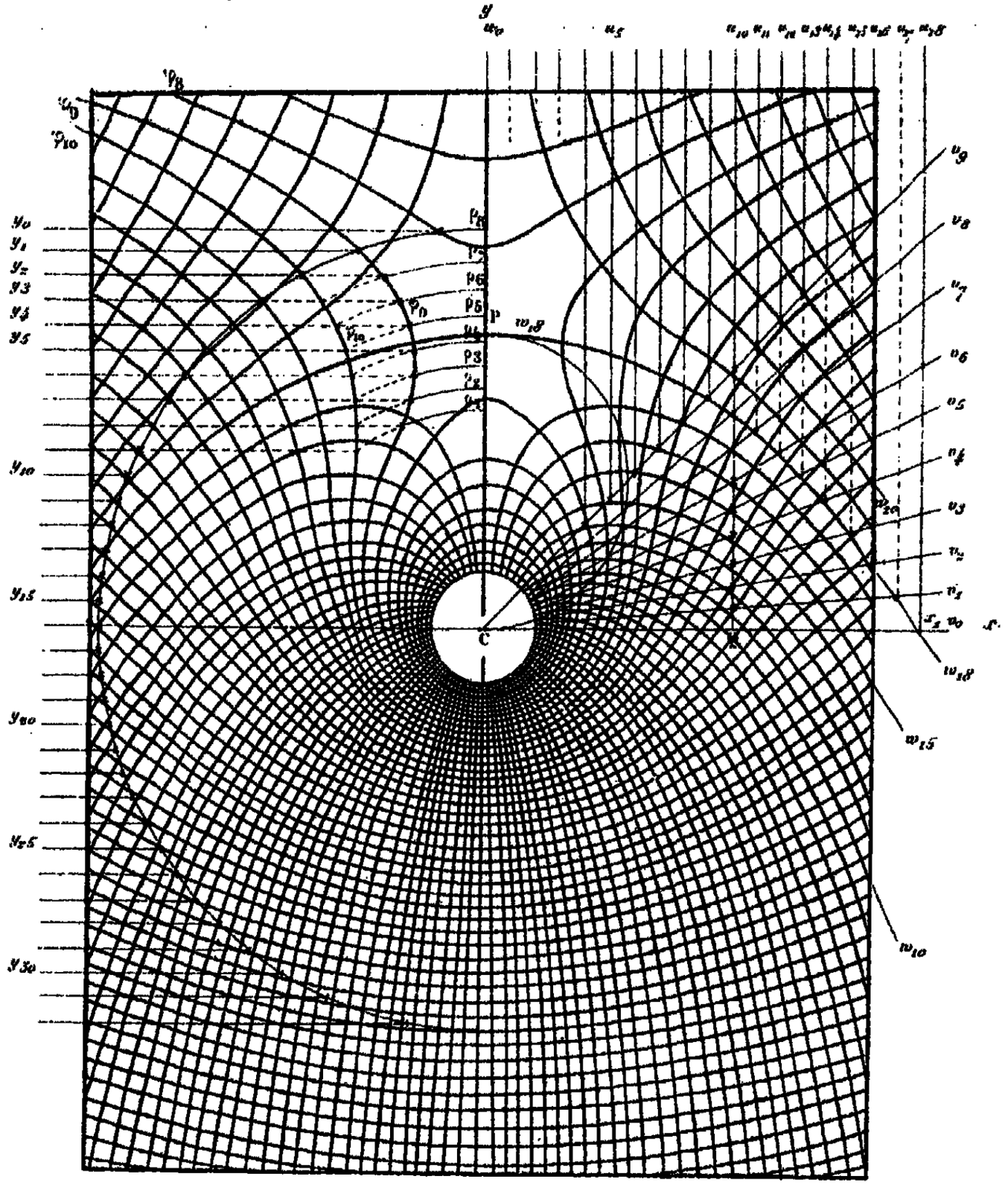
$$x = \pm b\frac{\pi}{2}.$$

La courbe coupe l'axe des x aux abscisses $x = \pm kb\pi$, c'est-à-dire au milieu des asymptotes considérées.

Planche XVII bis

Construction des

lignes de force — **lignes équipotentielles**



A part la première branche qui ressemble à la parabole ci-dessus, les autres branches rappellent les courbes bien connues

$$y = \pm m \operatorname{tang} \frac{x}{b}.$$

Si l'on donne à V des valeurs croissantes comprises entre zéro et $V = \frac{1}{2}\pi i$ (les seules utiles à considérer), on obtient des courbes dont l'angle avec l'axe des x à l'origine va en croissant,

$$\lim\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{V}{2i}\right).$$

Entre $V = 0$ et $V = \pi i$, la tangente, à l'origine, est comprise dans l'angle des x, y positifs. L'axe des y n'est plus un axe de symétrie : l'ordonnée, nulle à l'origine, va en croissant jusqu'à un maximum

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Au lieu de le déduire de l'équation

$$y = x \operatorname{tang}\left(\frac{V}{2i} - \frac{x}{b}\right),$$

on le conclut plus aisément de la forme primitive $dV = 0$

$$0 = \left(x - 2i\,\frac{y'}{x'+y'}\right)dx + 2i\,\frac{x'}{x'+y'}\,dy.$$

On voit que, quel que soit V, le lieu des maxima est donné par

$$x - 2i\,\frac{y}{x'+y'} = 0$$

ou

$$x' + y' - by = 0.$$

C'est le cercle décrit sur CP, comme diamètre, car $b = CP$, P étant le point singulier; en effet, les points singuliers d'une équation $F(x, y) = 0$ sont donnés par la condition que $\frac{dy}{dx}$ soit indéterminé, ce qui entraîne

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0;$$

ces deux conditions sont ici

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

qui correspondent à

$$x' + y' - by = 0, \qquad x = 0,$$

ce qui donne l'origine

$$x = 0, \qquad y = 0,$$

et le point P

$$x = 0, \qquad y = b.$$

On démontre aisément que le rayon de courbure, en ces points, est le même sur toutes ces courbes et égal à

$$\tfrac{1}{2}CP = \tfrac{1}{2}b.$$

Pour les valeurs de V comprises entre πi et $2\pi i$, on retrouve les courbes symétriques des précédentes.

La valeur limite $V = \pi i$ donne

$$y = x \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{b}\right) = x \cot \frac{x}{b},$$

équation qui est satisfaite par l'axe des y et par une courbe rappelant une parabole; transportant l'origine des coordonnées au point P,

$$y = y' + b, \qquad (y' + b) \operatorname{tang} \frac{x}{b} = x,$$

on en conclut qu'aux environs du point P la courbe se réduit à

$$(y' + b)\left(\frac{x}{b} + \frac{x^3}{3b^3}\right) = x$$

et finalement à

$$x\left(y' + \frac{x^2}{3b}\right) = 0,$$

équation de l'axe des y et de la parabole tangente au nouvel axe des x à l'origine et dont le rayon de courbure est $\frac{3}{2}b$

La forme de cette courbe a donc certaine analogie avec celle qui correspond à $V = 0$. Elle coupe l'axe des x aux points équidistants de b

$$\frac{x}{b} = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Les points les plus rapprochés de l'origine sont

$$x = \pm b\frac{\pi}{2}.$$

Il est facile de voir que les branches de courbes extérieures à celles-ci sont les branches infinies comprises entre les asymptotes déjà décrites.

2° ÉQUATION DES LIGNES DE FORCE CONSIDÉRÉES COMME TRAJECTOIRES ORTHOGONALES DES LIGNES EQUIPOTENTIELLES.

Envisagées comme trajectoires orthogonales des précédentes, on obtient aisément leur équation; la règle consiste à éliminer le paramètre variable V entre l'équation donnée et la différentielle $dV = 0$, où dx et dy sont changés en dy et $-dx$. L'élimination se fait d'elle-même et l'équation différentielle de ces trajectoires est

$$0 = \left(x - 2i\frac{y'}{x^2 + y^2}\right)dy = 2i\frac{x}{x^2 + y^2}dx,$$

$$0 = b\,dy - \frac{y\,dy + x\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Intégrant

$$by - \tfrac{1}{2}\log(x^2 + y^2) = \log C,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{by},$$

dont la discussion se fait aisément, d'après la première famille de courbes. On retrouve un point singulier en P.

3° CONSTRUCTION PAR POINTS DES LIGNES ÉQUIPOTENTIELLES.

Si l'on trace une série de droites équidistantes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ parallèles à l'axe des y, on représentera les lignes équipotentielles du champ uniforme primitif, correspondant à des accroissements égaux du potentiel. Si l'on trace, par le point C, des lignes également inclinées $v_1, v_2, \ldots, v_n$, on représentera les lignes équipotentielles du courant correspondant aussi aux accroissements égaux du potentiel.

Si l'on prend soin de choisir, dans les deux cas, la même valeur pour la variation du potentiel, dans les deux cas, et de numéroter chaque série de lignes dans le sens de l'accroissement positif, on obtiendra évidemment les lignes équipotentielles résultantes en joignant les points u_i et v_j d'intersection dont la somme des indices est constante, $i + j = l$; cette somme caractérisera la valeur l du paramètre des nouvelles lignes équipotentielles de w_l.

Inversement, si l'on trace une droite u à travers le réseau des lignes w_l et qu'on trace les lignes v passant par les points d'intersection de u avec les courbes w, on reproduira une série de lignes v correspondant à des accroissements égaux du potentiel. De la même manière on reproduira une série de lignes u en traçant une droite v.

C'est ce qui a été exécuté sur la *Pl. XVII bis* et ce qui permet de restituer les lignes de construction primitives.

Trace d'une droite u. — Soit Qu_{10} cette ligne; les points d'intersection avec les lignes équipotentielles w de la ligne jointe au point C donnent les droites $v_1, v_2, v_3, \ldots$, série qu'on n'a pas prolongée au delà de v_7 ni au-dessous de v_7 pour ne pas embrouiller la figure.

Il est facile de voir, en prolongeant la construction, que les droites v, également inclinées, partagent l'angle xCy en 18 parties et la circonférence en 72.

Une construction préliminaire avec une parallèle quelconque avait fourni ce résultat.

On a recommencé le tracé avec la droite Cu_{10}, qui a donné la droite v_9 à 45° ou bissectrice des axes.

Tracé d'une droite v. — Soit précisément Cv_9 cette droite; elle coupe la série des lignes équipotentielles w en des points dont les abscisses sont équidistantes $u_{10}, u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{18}, \ldots$.

Vérification du tracé des lignes équipotentielles w. — Les traits ponctués, prolongements de $u_{10}, u_{11}, \ldots, u_{18}$, ont été arrêtés à leur intersection avec les droites $cv_3, cv_4, cv_5, \ldots$. Ces points d'intersection sont tous sur une ligne équipotentielle qui, dans ce système de numérotage arbitraire, serait numérotée elle-même w_{18}, car la somme des indices des droites u et v, qui s'y coupent, ont pour valeur 18.

C'est la courbe équipotentielle, passant par le point singulier P, où la force résultante est nulle.

Remarque. — La condition d'accroissements égaux du potentiel, dont le tracé des droites u et v entraîne une condition nécessaire dans la forme des courbes et,

en particulier, dans la courbe limite choisie ici, c'est-à-dire par le point singulier — P.

L'équation de cette courbe est, comme on l'a vu plus haut,

$$y = x \cot \frac{x}{b}.$$

Les deux points les plus voisins de l'origine où la courbe prolongée à vue coupe l'axe des x sont

$$\frac{x_1}{b} = \pm \frac{\pi}{3},$$

d'où

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{2} \overline{CP}.$$

Effectivement, si l'on mesure les distances Cx_1 et CP, on trouve

$$CP = 3^{cm},70 \qquad \text{et} \qquad Cx_1 = 5^{cm},70.$$

Or

$$3,70 \times \tfrac{1}{2}\pi = 3,70 \times 1,5707 = 5,80,$$

différence de l'ordre du tracé et des altérations typographiques.

Données numériques du tracé. — En relevant sur le tracé la distance des droites u_1, u_2, ..., on trouve environ $\frac{1}{3}$ de centimètre; l'angle des lignes v est $\frac{1}{72}$ de circonférence ou de 5° sexagésimaux; la relation nécessaire entre CP = 3,70 et ces deux données peut se mettre sous une autre forme, qui donne vraisemblablement la valeur de l'échelle adoptée pour cette planche.

En effet, si l'on choisit l'origine des coordonnées comme origine des u, on est conduit, par la construction graphique, à la relation

$$u_{18} = x_1,$$

d'où

$$18u = 5^{cm},80,$$

et l'intervalle constant u serait égal à

$$\frac{5,70}{18} = 0,317.$$

Cette valeur est si voisine de $\frac{1}{10}\pi = 3,14$, qu'on est porté à croire que l'auteur a choisi précisément cette valeur particulière pour simplifier; d'où il résulterait, puisque $CP \times \frac{1}{2}\pi = Cx_1$,

$$CP \times \tfrac{1}{10}\pi \times 18 \qquad \text{ou} \qquad CP = \tfrac{30}{10} = 3,6;$$

le paramètre CP ou b serait égal à $3^{cm},6$, valeur presque identique à 3,70 relevée directement.

La variation du potentiel du courant, en passant d'une droite radiale à la suivante, est donc égale à

$$2i \times \frac{2\pi}{72} = \frac{4\pi i}{72} = \frac{\pi i}{18}.$$

D'autre part, la variation du potentiel du champ uniforme, en passant d'une pa-

rallèle à la suivante, doit être la même; or elle est égale à

$$\alpha u \quad \text{ou à} \quad \frac{a\delta}{b} u;$$

substituant la valeur $u = \frac{\pi}{10}$ et $b = 3{,}6$, on retrouve bien

$$\frac{\pi\delta}{18},$$

ce qui confirme l'unité présumée choisie par l'auteur du tracé.

4° DÉFINITION DES LIGNES DE FORCE DÉDUITES DE LA CONSTRUCTION DES TUBES D'INDUCTION.

La mise en nombre de l'équation des trajectoires orthogonales des lignes équipotentielles, données plus haut, permettrait de tracer les lignes de force. La constante arbitraire serait déterminée par le choix du point par lequel on veut faire passer par chaque ligne de force, et l'on pourrait ainsi obtenir telle loi qu'on choisirait, pour la répartition de ces lignes, sur le plan de la figure. C'est ce qui a été développé précédemment (p. 207). Mais l'auteur, parmi toutes les lois arbitraires qu'on se propose, a choisi celle qui partage l'espace en tubes d'égale *induction* (p. 208). Il en résulte non seulement une répartition intéressante, mais une construction géométrique par points, comme dans le cas de la *Pl. III*.

Le courant rectiligne indéfini étant assimilé à un feuillet magnétique indéfini, limité à une droite, le champ des forces, qu'il exerce sur l'unité de masse magnétique, est un véritable champ magnétique. Si ce courant était seul, les tubes d'induction (surfaces limitées par des lignes de force) seraient des anneaux ou *tores* concentriques au courant, puisque les lignes de forces du courant sont des cercles.

Supposons que la section droite de ces anneaux ou base des tubes d'induction soit un rectangle, dont la hauteur constante h est parallèle au courant, l'autre côté sera la différence des rayons des deux surfaces latérales de l'anneau. Nous nous proposerons d'abord le problème suivant :

Quelle est la loi de variation à donner aux rayons r du cercle de base pour former une série d'anneaux représentant des tubes d'égale induction?

L'induction à travers une surface, telle que la définit Maxwell, est (p. 209) l'intégrale

$$\iint \mathrm{R}\cos\varepsilon \, d\mathrm{S},$$

R étant ici la force exercée sur l'unité de masse magnétique répartie sur l'élément dS, ε l'angle qui fait cette force avec la normale à l'élément. La surface S est ici le rectangle de hauteur h et de base $(r_2 - r_1)$ et $\varepsilon = 0$.

L'intégrale double se réduit ici à une intégrale simple, puisque la force ne dépend que de la distance au courant, suivant l'expérience (§ 479),

$$\mathrm{R} = \frac{2\iota}{r},$$

et, comme $d\mathrm{S} = h\,dr$, on a, pour la valeur de l'induction, dans le tube ainsi

défini,

$$h\int_{r_1}^{r_2}\frac{2i}{r}\,dr = 2hi\log\frac{r_2}{r_1}.$$

Si donc on veut que l'induction, dans les anneaux successifs, ait pour valeur la constante K, on aura

$$2hi\log\frac{r_2}{r_1} = \mathrm{K}.$$

Le rapport des rayons successifs sera constant : *ces rayons formeront donc une progression géométrique, dont la raison est*

$$\frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{\mathrm{K}}{2hi}}.$$

Dans le champ uniforme où la force est constante $\mathrm{R} = \alpha$ et parallèle à l'axe des x, les tubes d'induction seront des parallélépipèdes indéfinis suivant l'axe des x; l'induction à travers la base formée par un rectangle de hauteur h, parallèle au courant et de base $y_2 - y_1$, sera simplement

$$\alpha h(y_2 - y_1).$$

Les largeurs $y_2 - y_1$ des tubes d'induction du champ uniforme correspondant à des inductions égales à K *forment donc une progression arithmétique dont la raison est*

$$\frac{\mathrm{K}}{\alpha h}.$$

Traçons dans le plan de la figure la série des cercles et des droites, bases de ces tubes d'induction, en numérotant chaque ligne; on reconnaîtra aisément, conformément à la règle de Maxwell sur l'addition des *inductions* à travers un élément de surface, que le lieu des points d'intersection des lignes où la somme des indices est constante est une ligne de force du champ résultant. L'équation de ces lignes de force sera facile à obtenir; les rayons successifs seront, en effet,

$$r = r_0\left(e^{\frac{\mathrm{K}}{2hi}}\right)^n = r_0 e^{\frac{n\mathrm{K}}{2hi}},$$

les droites successives

$$y = y_0 + \frac{n\mathrm{K}}{\alpha h}.$$

Éliminant le numéro d'ordre n,

$$n = (y - y_0)\frac{\alpha h}{\mathrm{K}},$$

$$r = r_0 e^{(y-y_0)\frac{\alpha h}{\mathrm{K}}\frac{\mathrm{K}}{2hi}} = r_0 e^{(y-y_0)\frac{\alpha}{2i}}$$

ou

$$\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{A}e^{\frac{y}{b}},$$

équation qui coïncide avec celle des trajectoires orthogonales aux lignes équipotentielles.

5° CONSTRUCTION PAR POINTS DES LIGNES DE FORCE.

Si l'on trace une série de droites équidistantes parallèles à l'axe des x et une série de cercles dont les rayons soient en progression géométrique numérotée suivant leur ordre, le lieu des points d'intersection tels, que la somme des indices soit constante, représentera une des lignes de force d'un champ résultant.

Mais les raisons des deux progressions doivent être les mêmes, comme on l'a vu ci-dessus,

$$K = 2hi \log \frac{r_2}{r_1} = \alpha h (y_2 - y_1),$$

d'où

$$\log \frac{r_2}{r_1} = \frac{\alpha'}{2i} (y_2 - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{b}.$$

Donc *le logarithme népérien du rapport des rayons de deux cercles consécutifs doit égaler le rapport de la distance constante de deux droites au paramètre* $b = PC$.

Il s'agit de déterminer sur le tracé les raisons adoptées pour ces deux progressions.

A cet effet traçons, du point C comme centre, un cercle de rayon arbitraire, il coupera les lignes de force consécutives (sur la partie gauche de la figure). Suivant des points dont les ordonnées y_0, y_1, ... sont équidistantes, leur distance constante est précisément la raison cherchée de la progression arithmétique; la distance $y_{10} - y_0 = 9^{cm},70$; la distance constante est donc de 0,323; si l'on tient compte des difficultés graphiques, on reconnaîtra que cette distance a probablement été choisie égale à celle adoptée pour les lignes équipotentielles égales du champ uniforme; la valeur moyenne mesurée ci-dessus était $= 0^{cm},317$.

La raison de la progression géométrique des rayons des cercles s'obtient aisément; prolongeons les droites y_0, y_1, y_2, ... jusqu'à la rencontre d'une même ligne de force, par exemple celle notée φ_4, les points d'intersection définiront les rayons des cercles $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_7$.

Comme vérification, si l'on prolonge les arcs de cercle au delà de la courbe ρ_4, on reconnaîtra que les points d'intersection des droites y se trouvent sur la courbe φ_4.

En mesurant les rayons des cercles ρ_4 et ρ_{11}, je trouve $\rho_4 = 5^{cm},00$ et $\rho_{11} = 2^{cm},70$: le rapport de ρ_4 à ρ_{11} est donc la septième puissance de la raison cherchée; calculant ce rapport en logarithmes vulgaires, on trouve

$$\log \rho_4 - \log \rho_{11} = 7 \times 0,03823.$$

Multipliant par l'inverse du module (2,3026) pour transformer en logarithmes népériens, il vient, pour le logarithme népérien de la raison de la progression géométrique,

$$0,08803.$$

Or la raison de la progression arithmétique des y, divisés par b, est

$$\frac{0,323}{b} = \frac{0,323}{3,7} = 0,08730.$$

L'égalité de ces deux nombres est aussi approchée que le permet l'approximation grossière des relevés.

La valeur théorique serait $\frac{\pi}{36} = 0,087266$, si l'on admet les données hypothétiques précitées.

En résumé, la *Pl. XVII* a été tracée en faisant un quadrillage carré, dont chaque maille a pour valeur $a = 0^{cm},314$ ou $\frac{\pi}{10}$ représentant le champ magnétique uniforme. Un des points de croisement a été pris pour le point C, et, par ce point C, on a tracé, à partir d'une des droites du quadrillage, 36 droites faisant un angle de $\frac{1}{72}$ de circonférence mesurée par un arc de $\frac{\pi}{36}$. Les intersections de ces droites divergentes avec une des séries de parallèles ont donné les lignes équipotentielles.

D'autre part, sur la parallèle passant par C, on a porté $PC = 3^{cm},6 = \frac{3 \times 18}{10}$; on a tracé une série de cercles concentriques à C, dont le premier a pour rayon CP, les autres rayons formant une progression géométrique dont la raison a pour logarithme népérien

$$\frac{a'}{CP} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{36} = 0,087266,$$

et pour logarithme vulgaire

$$0,03790.$$

Cette raison est donc

$$1,0912$$

et, par suite, les rayons des cercles voisins de CP seront

5,57, 5,10, 4,68, 4,29, 3,93, 3,60, 3,30, 3,02, 2,77, 2,54, 2,33.

Les intersections de ces cercles avec la série des droites du quadrillage perpendiculaires à CP donneront les lignes de force.

En déplaçant cette seconde série de droites parallèlement à elle-même, on obtiendrait, avec les mêmes cercles, une autre série de lignes de force intercalées entre les premières; on pourrait recommander la série passant par le point P : elle présente la courbe à point double, dont les tangentes sont les bissectrices des deux lignes équipotentielles qui se croisent en P.

CHAPITRE II.

RECHERCHES D'AMPÈRE SUR L'ACTION MUTUELLE DE DEUX COURANTS.

502. Nous avons examiné, dans le Chapitre précédent, la nature du champ magnétique produit par un courant électrique, et l'action mécanique qui s'exerce sur un conducteur traversé par un courant et placé dans un champ magnétique. De là, nous sommes venus à considérer l'action d'un circuit électrique sur un autre, en déterminant l'action exercée sur le premier par le champ magnétique dû au second. Mais l'action d'un circuit sur un autre a été étudiée, pour la première fois, par Ampère, par une méthode directe, presque aussitôt après la publication de la découverte d'Œrsted. Nous allons donc donner un aperçu de la méthode d'Ampère, et nous reprendrons, au Chapitre suivant, la méthode suivie dans ce Traité.

Les idées qui ont guidé Ampère se rattachent au système qui admet l'action directe à distance, et nous verrons qu'une suite remarquable de spéculations et de recherches fondées sur ces idées a été développée par Gauss, Weber, J. Neumann, Riemann, Betti, C. Neumann, Lorenz et d'autres encore, avec d'importants résultats, tant pour la découverte de faits nouveaux que pour la formation d'une théorie de l'électricité. (*Voir* les § 846-866.)

Les idées que j'ai essayé de poursuivre supposent une action qui se propage de proche en proche dans un milieu. Elles ont été très cultivées par Faraday; et je me suis proposé, dans plusieurs publications, de les développer sous forme mathématique et de comparer les résultats ainsi obtenus avec les faits connus. A un point de vue philosophique, en comparant les résultats de deux méthodes dont les premiers principes sont si complètement opposés, on doit être conduit à des résultats de quelque valeur pour l'étude des conditions de la spéculation scientifique.

503. La théorie d'Ampère sur les actions mutuelles des courants électriques est fondée sur quatre faits d'expérience et sur une hypothèse.

Les expériences fondamentales d'Ampère sont toutes des exemples

de ce que l'on a appelé la *méthode de comparaison des forces par réduction à zéro* (*voir* § 214). Au lieu de mesurer la force par son effet dynamique de mouvement communiqué à un corps ou par la méthode statique consistant à lui faire équilibre par le poids d'un corps ou par la torsion d'un fil; dans la méthode de réduction à zéro, on fait agir simultanément sur un corps déjà en équilibre deux forces de même origine, si aucun effet ne se produit : c'est que les deux forces sont elles-mêmes en équilibre. Cette méthode est particulièrement précieuse lorsqu'il s'agit de comparer les effets du courant électrique traversant deux circuits de formes différentes. En reliant tous les conducteurs en série continue, on est assuré que l'intensité du courant est la même en tous les points de son parcours; et, puisque le courant commence à peu près au même instant en tous les points de son parcours, nous démontrons que les forces dues à son action sur un corps suspendu se font équilibre, si nous observons qu'aucun effet n'est produit sur le corps par l'émission ou la rupture du courant.

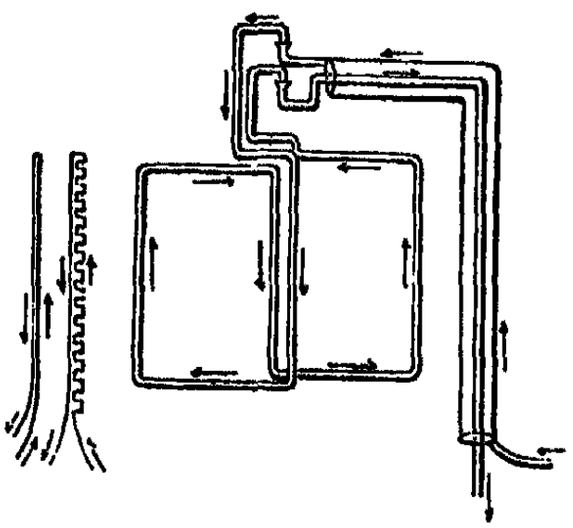
504. La balance d'Ampère consiste en un cadre léger, pouvant tourner autour d'un axe vertical et portant un fil qui forme deux circuits d'aire égale, situés dans le même plan ou dans des plans parallèles, et traversés en sens contraires par le courant. L'objet de cette disposition est d'éliminer les effets du magnétisme terrestre sur le fil conducteur. Un circuit électrique libre de se mouvoir tend à se placer de manière à comprendre le plus grand nombre possible de lignes d'induction. Si ces lignes sont dues au magnétisme terrestre, un circuit tracé dans un plan vertical sera dans cette position quand son plan sera dirigé de l'est à l'ouest et quand le courant circulera en sens inverse du mouvement apparent du Soleil.

En reliant d'une manière invariable deux circuits d'aire égale, situés dans des plans parallèles et dans lesquels des courants égaux circulent dans des sens opposés, on forme une combinaison qui n'est plus influencée par le magnétisme terrestre, et que, pour cette raison, on appelle une *combinaison astatique* (*voir* la *fig.* 26). Mais elle subit l'influence des forces dues à des courants ou à des aimants assez rapprochés pour exercer des actions différentes sur les deux circuits.

505. La première expérience d'Ampère est relative à l'action de deux courants égaux, voisins et de sens contraires. Un fil, recouvert d'une substance isolante, est replié sur lui-même et placé près d'un des circuits de la balance astatique. Quand on fait passer un courant

dans le fil et dans la balance, l'équilibre de celle-ci n'est pas troublé, ce qui montre que deux courants égaux, voisins et de sens contraires, se neutralisent l'un l'autre. Si, au lieu de deux fils placés l'un à côté de l'autre, on emploie un fil isolé au milieu d'un tube de métal, et que le courant arrive par le fil et s'éloigne par le tube, l'action à l'extérieur du tube est non seulement à peu près, mais rigoureusement nulle. Ce principe a une grande importance dans la construction des appareils électriques; car il nous donne le moyen d'amener le courant à un galvanomètre ou à un autre instrument, et de le faire revenir sans que ce courant produise d'effet électromagnétique dans son trajet d'aller ou de retour. Dans la pratique, il suffit généralement

Fig. 26.



de lier les fils ensemble, en ayant soin qu'ils restent parfaitement isolés l'un de l'autre; mais, s'ils doivent passer près d'une partie sensible des appareils, il vaut mieux donner à l'un des conducteurs la forme d'un tube à l'intérieur duquel passe l'autre conducteur (*voir* § 683).

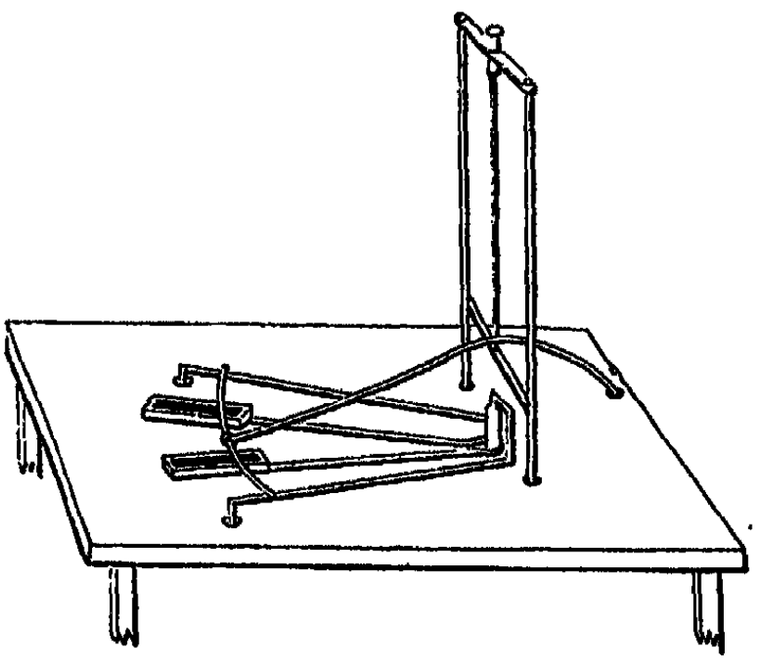
506. Dans la seconde expérience d'Ampère, un des fils est replié et recourbé en un grand nombre de petites sinuosités, mais de manière qu'en tous les points de son parcours il reste toujours très voisin du fil rectiligne. On constate qu'un courant arrivant par le fil sinueux et revenant par le fil rectiligne est sans action sur la balance astatique. De là résulte que l'effet du courant qui circule dans une partie sinueuse du fil est équivalent à celui du même courant traversant la ligne droite qui joint les extrémités de la ligne sinueuse, pourvu que celle-ci ne soit en aucun point de son parcours éloignée de la ligne droite. Donc un petit élément de circuit est équivalent à deux ou plusieurs éléments

composants, la relation entre les éléments composants et l'élément résultant étant la même qu'entre les composantes et la résultante d'un déplacement ou d'une vitesse.

507. Dans la troisième expérience, on substitue à la balance astatique un conducteur susceptible de se mouvoir dans le sens de sa longueur seulement. Le courant entre dans le conducteur et en sort en des points fixes de l'espace : on constate qu'aucun circuit fermé placé dans le voisinage de ce conducteur n'est susceptible de le faire mouvoir.

Dans cette expérience, le conducteur est un fil en forme d'arc de

Fig. 27.



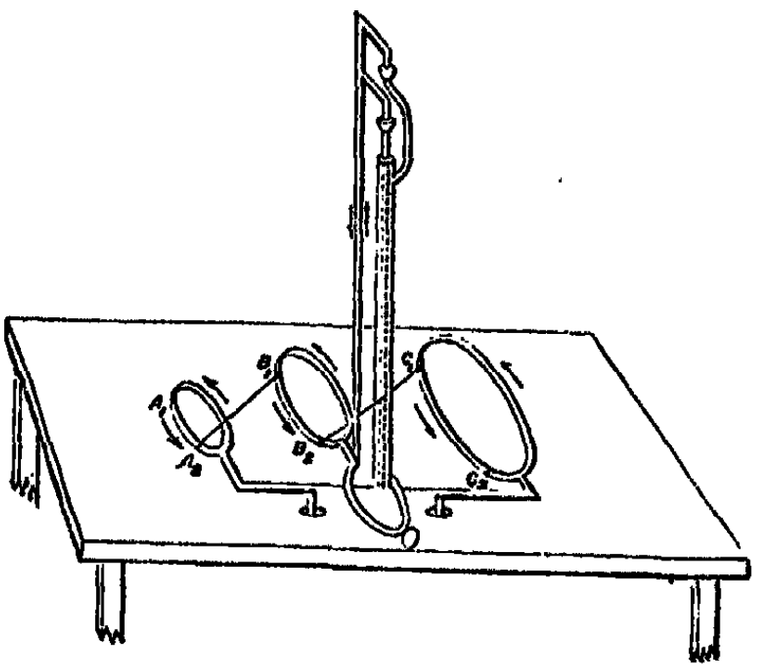
cercle, suspendu à un support qui peut tourner autour d'un axe vertical. L'arc circulaire est horizontal, et son centre coïncide avec l'axe vertical. On remplit de mercure deux petites auges, jusqu'à ce que la surface convexe du mercure s'élève au-dessus du bord de ces auges. Ces auges sont placées sous l'arc circulaire et sont réglées jusqu'à ce que le mercure touche le fil qui est fait de cuivre bien amalgamé. Le courant entre par une de ces auges et sort par l'autre, en passant par la partie de l'arc circulaire comprise entre elles. Ainsi, une partie de l'arc circulaire est traversée par le courant, et, en même temps, l'arc reste susceptible de se mouvoir très librement dans le sens de sa longueur. On peut alors approcher du conducteur mobile des courants fermés ou des aimants quelconques, sans qu'il ait la moindre tendance à se mouvoir dans le sens de sa longueur.

508. Dans la quatrième expérience avec la balance astatique, on emploie deux circuits semblables l'un et l'autre à l'un des circuits de la balance, mais ayant, l'un C des dimensions n fois plus grandes, et l'autre A des dimensions n fois plus petites. On les place de part et d'autre du circuit de la balance, que nous appellerons B, de manière qu'ils soient semblablement placés par rapport à B, et que la distance de C à B soit n fois plus grande que celle de B à A. Le sens et l'intensité du courant sont les mêmes dans A et dans C; le sens dans B peut être le même ou opposé. Dans ces conditions, on trouve que, quelle que soit la forme des trois circuits, B reste en équilibre sous l'action simultanée de A et de C, pourvu que les relations indiquées plus haut soient satisfaites.

Puisque les actions entre les circuits complets peuvent être considérées comme dues aux actions entre les éléments des circuits, on peut employer la méthode suivante pour déterminer la loi de ces actions.

Soient A_1, B_1, C_1 (*fig.* 28) des éléments correspondants sur les trois circuits, et A_2, B_2, C_2 des éléments correspondants sur une autre partie des circuits. La position de B_1 par rapport à A_2 est semblable

Fig. 28.



à celle de C_1 par rapport à B_2; mais les distances et les dimensions de C_1 et B_2 sont n fois plus grandes que les distances et les dimensions correspondantes de B_1 et A_2. Si la loi des actions électromagnétiques est une fonction de la distance, l'action qui s'exerce entre B_1 et A_2,

quelles qu'en soient la forme et la nature, peut s'écrire

$$F = B_1 . A_2 f(\overline{B_1 . A_2}) ab,$$

et celle qui s'exerce entre C_1 et B_2,

$$F' = C_1 . B_2 f(\overline{C_1 . B_2}) bc,$$

où a, b, c sont les intensités des courants dans A, B, C. Mais

$$n B_1 = C_1, \qquad n A_2 = B_2,$$

$$n\overline{B_1 A_2} = \overline{C_1 B_2} \qquad \text{et} \qquad a = c,$$

d'où

$$F' = n^2 B_1 A_2 f(n\overline{B_1 A_2}) ab;$$

l'expérience montre que F' est égal à F; nous avons donc

$$n^2 f(n\overline{A_2 B_1}) = f(\overline{A_2 B_1}),$$

c'est-à-dire que *la force varie en raison inverse du carré de la distance.*

509. On peut observer, relativement à ces expériences, que tout courant électrique forme un circuit fermé. Les courants dont se servait Ampère, étant produits par la pile voltaïque, se produisaient naturellement dans des circuits fermés. On pourrait supposer que, dans le cas où un conducteur se décharge par une étincelle, il se produit un courant suivant une ligne ouverte de grandeur finie; mais, d'après les idées qui ont été exposées dans ce Traité, même ce cas est celui d'un circuit fermé. On n'a point fait d'expériences sur l'action mutuelle de circuits non fermés. Par suite, on ne saurait dire qu'aucune assertion relative à l'action mutuelle de deux éléments de courant repose sur des données purement expérimentales. Il est vrai que l'on peut rendre mobile une partie d'un circuit de manière à déterminer l'action qu'exercent sur elle d'autres courants; mais ces courants, ainsi que celui qui passe dans la partie mobile, forment nécessairement des circuits fermés; de sorte que, en fin de compte, le résultat des expériences est relatif à l'action d'un ou plusieurs circuits fermés sur tout ou partie d'un courant fermé.

510. Cependant, dans l'analyse des phénomènes, nous pouvons considérer l'action d'un circuit fermé sur un élément, soit de lui-même, soit d'un autre circuit, comme étant la résultante d'un certain nombre de forces séparées dépendant des différentes parties dans lesquelles

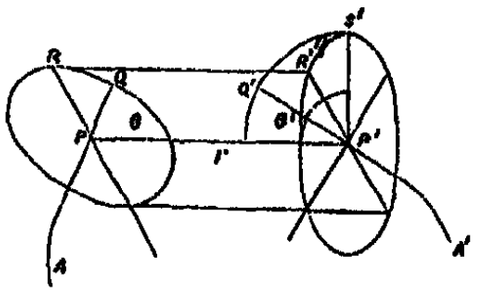
on peut, en vue d'opérations mathématiques, supposer le premier circuit divisé.

Ce n'est là qu'une analyse mathématique de l'action; c'est donc parfaitement légitime qu'en réalité ces forces puissent ou non agir séparément.

511. Nous commencerons par examiner les relations géométriques qui existent entre les deux lignes de l'espace qui représentent les circuits et entre les parties élémentaires de ces lignes.

Soient deux courbes dans l'espace; sur chacune d'elles on prend un

Fig. 29.



point fixe à partir duquel on mesure les arcs dans une direction déterminée sur la courbe. Soient A, A′ ces points; PQ, P′Q′ des éléments des deux courbes.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} AP = s, & A'P' = s', \\ PQ = ds, & P'Q' = ds', \end{cases}$$

et désignons par r la distance PP′; par 0 l'angle P′PQ; par 0′ l'angle PP′Q′, et par η l'angle compris entre les plans de ces angles.

La position relative des deux éléments est suffisamment définie par leur distance r et par les trois angles 0, 0′ et η; car, si l'on possède ces données, la position relative des éléments est aussi bien déterminée que s'ils faisaient partie d'un même solide invariable.

512. Si l'on emploie des coordonnées rectangulaires et que l'on désigne par x, y, z les coordonnées de P, par x', y', z' les coordonnées de P′, par l, m, n et l', m', n' les cosinus directeurs de PQ et de P′Q′, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = l, & \dfrac{dy}{ds} = m, & \dfrac{dz}{ds} = n, \\ \dfrac{dx'}{ds'} = l', & \dfrac{dy'}{ds'} = m', & \dfrac{dz'}{ds'} = n' \end{cases}$$

et

$$(3)\qquad \begin{cases} l(x'-x)+m(y'-y)+n(z'-z)=r\cos\theta, \\ l'(x'-x)+m'(y'-y)+n'(z'-z)=-r\cos\theta', \\ ll'+mm'+nn'=\cos\varepsilon, \end{cases}$$

ε étant l'angle des directions des éléments eux-mêmes et

$$(4)\qquad \cos\varepsilon=-\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\eta.$$

On a aussi

$$(5)\qquad r^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2;$$

d'où

$$(6)\qquad \begin{cases} r\dfrac{dr}{ds}=-(x'-x)\dfrac{dx}{ds}-(y'-y)\dfrac{dy}{ds}-(z'-z)\dfrac{dz}{ds} \\ \qquad\quad =-r\cos\theta, \\ r\dfrac{dr}{ds'}=(x'-x)\dfrac{dx'}{ds'}+(y-y')\dfrac{dy'}{ds'}+(z-z')\dfrac{dz'}{ds'} \\ \qquad\quad =-r\cos\theta' \end{cases}$$

et, différentiant $r\dfrac{dr}{ds}$ par rapport à s',

$$(7)\qquad \begin{cases} r\dfrac{d^2r}{ds\,ds'}+\dfrac{dr}{ds}\dfrac{dr}{ds'}=-\dfrac{dx}{ds}\dfrac{dx'}{ds'}-\dfrac{dy}{ds}\dfrac{dy'}{ds'}-\dfrac{dz}{ds}\dfrac{dz'}{ds'} \\ \qquad\qquad =-(ll'+mm'+nn') \\ \qquad\qquad =-\cos\varepsilon. \end{cases}$$

On peut donc exprimer les trois angles θ, θ' et η, ainsi que l'angle auxiliaire ε, en fonction des dérivées de r par rapport à s et à s', de la manière suivante :

$$(8)\qquad \begin{cases} \cos\theta=-\dfrac{dr}{ds}, \\ \cos\theta'=-\dfrac{dr}{ds'}, \\ \cos\varepsilon=-r\dfrac{d^2r}{ds\,ds'}-\dfrac{dr}{ds}\dfrac{dr'}{ds'}, \\ \sin\theta\sin\theta'\cos\eta=-r\dfrac{d^2r}{ds\,ds'}. \end{cases}$$

513. Nous allons examiner maintenant de quelle manière on peut concevoir mathématiquement que les éléments PQ et P'Q' agissent l'un sur l'autre, et, dans cette étude, nous ne supposerons pas pour

commencer que leur action mutuelle soit nécessairement dirigée suivant la ligne qui les joint.

Nous avons vu que l'on peut supposer chaque élément décomposé en d'autres, pourvu que ces éléments composants, étant combinés d'après la loi d'addition des vecteurs, donnent bien comme résultante l'élément primitif.

Nous considérerons donc ds comme étant décomposé en $ds\cos\theta = \alpha$ suivant r, et $ds\sin\theta = \beta$ suivant la perpendiculaire à r dans le plan P′PQ.

Nous considérerons aussi ds' comme décomposé en $ds'\cos\theta' = \alpha'$, suivant la direction de r prise en sens contraire; $\sin\theta'\cos\gamma\, ds' = \beta'$

Fig. 30.

suivant une direction parallèle à celle où l'on a mesuré β, et $\sin\theta'\sin\gamma\, ds' = \gamma'$, suivant une direction perpendiculaire à celle de α et de β'.

Considérons l'action qui s'exerce entre les composantes α et β d'une part, α', β', γ' de l'autre.

1° α et α' sont dirigés suivant la même ligne droite. La force qui agit entre eux doit donc être dirigée suivant la même ligne. Nous supposerons que ce soit une attraction

$$= A\alpha\alpha' ii',$$

où A est une fonction de r et où i et i' sont les intensités des courants qui traversent ds et ds' respectivement. Cette expression satisfait à la condition de changer de signe en même temps que i ou i'.

2° β et β' sont parallèles l'un à l'autre et perpendiculaires à la ligne qui les joint. L'action qui s'exerce entre eux peut s'écrire

$$B\beta\beta' ii'.$$

Cette force est évidemment dirigée suivant la ligne qui joint β et β', car elle doit être dans le plan où se trouvent ces deux éléments; et, si nous mesurions β et β' en sens inverse, la valeur de cette expression resterait la même; si donc elle représente une force, cette force n'a point de composante dans la direction de β et, par suite, doit être dirigée suivant r. Supposons que cette expression représente une attraction quand elle est positive.

3° β et γ' sont perpendiculaires l'un à l'autre et à la ligne qui les

joint. La seule action qui puisse exister entre deux éléments ainsi disposés est celle d'un couple dont l'axe est parallèle à r. Pour l'instant, nous nous occupons des forces; nous laissons donc ce couple de côté.

4° Si α et β' agissent l'un sur l'autre, leur action doit être exprimée par

$$C\alpha\beta' ii'.$$

Le signe de cette expression change quand on change le sens dans lequel on mesure β'. Elle doit donc représenter soit une force dans le sens de β', soit un couple dans le plan de α et β'. Comme nous n'étudions pas les couples, nous admettrons que ce soit une force agissant dans le sens de β'.

Il y a évidemment une force égale qui agit en sens contraire sur β'.

Pour la même raison, nous avons une force

$$C\alpha\gamma' ii'$$

qui agit sur α dans la direction de γ', et une force

$$C\beta\alpha' ii'$$

qui agit sur β dans la direction contraire.

514. Réunissant nos résultats, nous trouvons que l'action sur ds se compose de trois forces,

$$(9)\qquad \begin{cases} X = (A\alpha\alpha' + B\beta\beta')ii' & \text{dans la direction de } r, \\ Y = C(\alpha\beta' - \alpha'\beta)ii' & \text{dans la direction de } \beta, \\ Z = C\alpha\gamma' ii' & \text{dans la direction de } \gamma'. \end{cases}$$

Supposons que cette action sur ds soit la résultante de trois forces, $Rii'\,ds\,ds'$ agissant suivant la direction de r, $Sii'\,ds\,ds'$ agissant suivant ds, et $S'ii'\,ds\,ds'$ agissant suivant ds'; on a alors, en fonction de θ, θ' et η,

$$(10)\qquad \begin{cases} R = A\cos\theta\cos\theta' + B\sin\theta\sin\theta'\cos\eta, \\ S = -C\cos\theta', \qquad S' = C\cos\theta; \end{cases}$$

en fonction des dérivées de r,

$$(11)\qquad \begin{cases} R = A\dfrac{dr}{ds}\dfrac{dr}{ds'} - Br\dfrac{d^2r}{ds\,ds'}, \\ S = C\dfrac{dr}{ds}, \qquad S' = -C\dfrac{dr}{ds}; \end{cases}$$

en fonction de l, m, n et l', m', n',

$$(12)\quad \begin{cases} R = -(A+B)\frac{1}{r^2}(l\xi+m\eta+n\zeta)(l'\xi+m'\eta+n'\zeta) \\ \qquad +B(ll'+mm'+nn'), \\ S = C\frac{1}{r}(l'\xi+m'\eta+n'\zeta), \\ S' = C\frac{1}{r}(l\xi+m\eta+n\zeta), \end{cases}$$

où l'on a posé ξ, η, ζ pour $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$.

515. Nous avons maintenant à calculer la force avec laquelle le courant fini s' agit sur le courant fini s. Or le courant s s'étend depuis A, où $s=0$, jusqu'à P, où s prend la valeur s; le courant s' s'étend depuis A', où $s'=0$, jusqu'à P', où s' prend la valeur s'. Sur chaque courant, les coordonnées des points sont des fonctions de s ou de s'.

Soit F une fonction de la position d'un point : nous emploierons l'indice $(s,0)$ pour désigner l'excès de la valeur de F au point P sur sa valeur au point A; ainsi

$$F_{(s,0)} = F_P - F_A.$$

De telles fonctions disparaissent forcément si le circuit est fermé.

Soient $ii'X$, $ii'Y$ et $ii'Z$ les composantes de la force totale avec laquelle A'P' agit sur AP. Alors la composante parallèle à X de la force avec laquelle ds' agit sur ds est

$$ii'\frac{d^2X}{ds\,ds'}\,ds\,ds',$$

d'où

$$(13)\quad \frac{d^2X}{ds\,ds'} = R\frac{\xi}{r} + Sl + S'l'.$$

Substituant les valeurs de R, S et S' tirées de (12), nous souvenant que

$$(14)\quad l'\xi+m'\eta+n'\zeta = r\frac{dr}{ds'},$$

et ordonnant les termes par rapport à l, m, n, nous trouvons

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{d^2X}{ds\,ds'} = l\left[-(A+B)\frac{1}{r^3}\frac{dr}{ds'}\xi^2 + C\frac{dr}{ds'} + (B+C)\frac{l'\xi}{r}\right] \\ \qquad +m\left[-(A+B)\frac{1}{r^3}\frac{dr}{ds'}\xi\eta + C\frac{l'\eta}{r} + B\frac{m'\xi}{r}\right] \\ \qquad +n\left[-(A+B)\frac{1}{r^3}\frac{dr}{ds'}\xi\zeta + C\frac{l'\zeta}{r} + B\frac{n'\xi}{r}\right]. \end{cases}$$

Puisque A et B sont des fonctions de r, nous pouvons écrire

$$(16) \qquad P = \int_r^\infty (A+B)\frac{1}{r^2}\,dr, \qquad Q = \int_r^\infty C\,dr,$$

l'intégration étant effectuée entre r et ∞, parce que A, B et C s'annulent pour $r = \infty$.

De là on tire

$$(17) \qquad (A+B)\frac{1}{r^2} = -\frac{dP}{dr}, \qquad C = -\frac{dQ}{dr}.$$

516. Or nous savons, par la troisième expérience d'équilibre d'Ampère, que, s' étant un circuit fermé, la force qui agit sur ds est perpendiculaire à la direction de ds ou, en d'autres termes, que la composante de la force dans la direction de ds même est nulle. Prenons la direction de l'axe des x parallèle à ds; alors $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$. L'équation (15) devient

$$(18) \qquad \frac{d^2X}{ds\,ds'} = \frac{dP}{ds'}\frac{\xi^2}{r^2} - \frac{dQ}{ds'} + (B+C)\frac{l'\xi}{r^3}.$$

Pour trouver $\frac{dX}{ds}$, c'est-à-dire la force qui agit sur ds rapportée à l'unité de longueur, il nous faut intégrer cette expression par rapport à s'. Intégrant le premier terme par parties, il vient

$$(19) \qquad \frac{dX}{ds} = (P\xi^2 - Q)_{(s',0)} - \int_0^{s'} (2Pr - B - C)\frac{l'\xi}{r^3}\,ds'.$$

Quand s' est un circuit fermé, cette expression doit être nulle. Le premier terme disparaît de lui-même; mais, en général, le second terme ne disparaît, dans le cas d'un circuit fermé de forme quelconque, que si la quantité sous le signe d'intégration est toujours nulle. Donc, pour satisfaire à la condition d'Ampère, nous devons poser

$$(20) \qquad P = \frac{1}{2r}(B+C).$$

517. Nous pouvons alors éliminer P et trouver la valeur générale de $\frac{dX}{ds}$,

$$(21) \quad \begin{cases} \dfrac{dX}{ds} = \left[\dfrac{B+C}{2}\,\dfrac{\xi}{r}(l\xi + m\eta + n\zeta) + Q\right]_{(s',0)} \\ \qquad + m\displaystyle\int_0^{s'} \frac{B-C}{2}\,\frac{m'\xi - l'\eta}{r^3}\,ds' - n\int_0^{s'} \frac{B-C}{2}\,\frac{l'\zeta - n'\xi}{r^3}\,ds'. \end{cases}$$

Le premier terme de l'expression s'annule, quand s' est un circuit fermé, et, si nous posons

$$(22)\qquad \begin{cases} \alpha' = \displaystyle\int_0^{s'} \frac{B-C}{2}\,\frac{n'\eta - m'\zeta}{r}\,ds', \\ \beta' = \displaystyle\int_0^{s'} \frac{B-C}{2}\,\frac{l'\zeta - n'\xi}{r}\,ds', \\ \gamma' = \displaystyle\int_0^{s'} \frac{B-C}{2}\,\frac{m'\xi - l'\eta}{r}\,ds', \end{cases}$$

l'intégration étant étendue tout le long du circuit fermé s', nous pouvons écrire

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{ds} = m\gamma' - n\beta', \\ \dfrac{dY}{ds} = n\alpha' - l\gamma', \\ \dfrac{dZ}{ds} = l\beta - m\alpha'. \end{cases}$$

Les quantités α', β', γ' sont quelquefois appelées les *déterminantes du circuit s' rapportées au point* P. Ampère appelle leur résultante la *directrice de l'action électrodynamique*.

Il est évident, d'après cette équation, que la force dont les composantes sont $\frac{dX}{ds}$, $\frac{dY}{ds}$ et $\frac{dZ}{ds}$, est perpendiculaire à ds et à cette directrice, et qu'elle est représentée numériquement par l'aire du parallélogramme dont les côtés sont ds et la directrice.

Dans le langage des quaternions, la force résultante agissant sur ds est la partie vectorielle du produit de la directrice par ds.

Puisque nous savons déjà que la directrice est identique à la force due à un courant unité traversant le circuit s', nous parlerons dorénavant de la directrice comme étant la force magnétique due à ce circuit.

518. Nous allons maintenant terminer le calcul des composantes de la force qui s'exerce entre deux courants de dimensions finies, fermés ou ouverts.

Soit ρ une nouvelle fonction de r, telle que

$$(24)\qquad \rho = \tfrac{1}{2}\int_r^{\infty} (B-C)\,dr;$$

d'après (19) et (20),

$$A + B = r\frac{d^2}{dr^2}(Q+\rho) = \frac{d}{dr}(Q+\rho), \tag{25}$$

et les équations (11) deviennent

$$\begin{cases} R = -\dfrac{d\rho}{dr}\cos\varepsilon + r\dfrac{d^2}{ds\,ds'}(Q+\rho), \\ S = -\dfrac{dQ}{ds'}, \qquad S' = \dfrac{dQ}{ds}. \end{cases} \tag{26}$$

Avec ces valeurs des composantes, l'équation (13) devient

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{ds\,ds'} = -\cos\varepsilon\dfrac{d\rho}{dr}\dfrac{\xi}{r} + \xi\dfrac{d^2}{ds\,ds'}(Q+\rho) - l\dfrac{dQ}{ds'} + l'\dfrac{dQ}{ds} \\ \qquad = -\cos\varepsilon\dfrac{d\rho}{dx} + \dfrac{d^2(Q+\rho)\xi}{ds\,ds'} + l\dfrac{d\rho}{ds'} - l'\dfrac{d\rho}{ds}. \end{cases} \tag{27}$$

519. Soient

$$F = \int_0^s l\rho\,ds, \qquad G = \int_0^s m\rho\,ds, \qquad H = \int_0^s n\rho\,ds. \tag{28}$$

$$F' = \int_0^{s'} l'\rho\,ds', \qquad G' = \int_0^{s'} m'\rho\,ds', \qquad H' = \int_0^{s'} n'\rho\,ds'. \tag{29}$$

Ces quantités ont des valeurs définies pour un point quelconque de l'espace. Si les circuits sont fermés, elles correspondent aux composantes des potentiels vecteurs des circuits.

Soit L une nouvelle fonction de r, telle que

$$L = \int_0^r r(Q+\rho)\,dr, \tag{30}$$

et soit M l'intégrale double

$$M = \int_0^{s'}\int_0^{s} \rho\cos\varepsilon\,ds\,ds' \tag{31}$$

qui devient le potentiel mutuel des circuits; lorsque ceux-ci sont fermés, l'équation (27) peut s'écrire

$$\frac{d^2X}{ds\,ds'} = \frac{d^2}{ds\,ds'}\left(\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dx} + F' - F\right). \tag{32}$$

520. Intégrant par rapport à s et à s' entre les limites données, nous

trouvons

$$(33)\quad X = \frac{dM}{dx} - \frac{d}{dx}(L_{PP'} - L_{AP'} - L_{A'P} + L_{AA'}) + F'_P - F'_A - F'_{P'} + F'_{A'},$$

où les indices de L indiquent la distance r dont la quantité L est fonction, et où les indices de F et de F′ indiquent les points pour lesquels on prend les valeurs de ces fonctions.

Les expressions de Y et de Z peuvent s'écrire d'après celle-là. Multipliant les trois composantes respectivement par dx, dy, dz, nous obtenons

$$(34)\quad \begin{cases} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = DM - D(L_{PP'} - L_{AP'} - L_{A'P} + L_{AA'}) \\ \qquad\qquad + (F'\,dx + G'\,dy + H'\,dz)_{(P-A)} \\ \qquad\qquad - (F\,dx + G\,dy + H\,dz)_{(P'-A')}, \end{cases}$$

D étant le symbole d'une différentielle totale.

Puisque, en général, $F\,dx + G\,dy + H\,dz$ n'est pas la différentielle totale d'une fonction de x, y, z, $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ n'est pas non plus une différentielle exacte pour des courants dont l'un n'est pas fermé.

521. Mais, si les deux courants sont fermés, les termes en L, F, G, H, F′, G′, H′ disparaissent, et

$$(35)\qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = DM,$$

où M est le potentiel mutuel des deux circuits fermés, quand ils sont traversés par un courant unité. La quantité M exprime le travail effectué par les forces électromagnétiques sur l'un ou l'autre des circuits conducteurs, pendant qu'on le déplace d'une distance infinie jusqu'à sa position actuelle. Tout changement dans sa position, qui a pour effet d'*augmenter* M, est *favorisé* par les forces électromagnétiques.

On peut montrer, comme aux § 490 et 596, que si le circuit ne se meut pas parallèlement à lui-même, les forces qui agissent sur lui sont cependant déterminées par la variation du potentiel M d'un des circuits sur l'autre.

522. Le seul fait expérimental dont nous ayons fait usage dans cette étude est celui qui a été établi par Ampère, à savoir que l'action d'un courant fermé sur une partie d'un autre courant est perpendiculaire à la direction de ce dernier. Tout le reste de cette étude dépend de

considérations purement mathématiques sur les propriétés des lignes dans l'espace; par suite, les raisonnements peuvent être présentés sous une forme beaucoup plus condensée et plus appropriée au sujet, si l'on emploie les idées et le langage de la méthode mathématique qui se prête le mieux à exprimer de telles relations : les *quaternions* de Hamilton.

C'est ce qu'a fait le professeur Tait pour l'étude originale d'Ampère, dans le *Quarterly mathematical Journal*, 1866, et dans son *Traité des Quaternions*, §399; le lecteur pourra aisément appliquer la même méthode à l'étude, un peu plus générale, que l'on vient de donner ici.

523. Jusqu'à présent, nous n'avons point fait d'hypothèses sur les quantités A, B, C, si ce n'est que ce sont des fonctions de la distance r des éléments. Nous avons maintenant à déterminer la forme de ces fonctions, et, pour cela, nous ferons usage du quatrième cas d'équilibre d'Ampère (§ 508), où l'on voit que si l'on altère dans le même rapport toutes les dimensions et toutes les distances dans un système de deux circuits, les intensités restant les mêmes, la force qui agit entre les deux circuits reste la même.

Or la force qui agit entre deux circuits traversés par l'unité de ce courant est $\frac{dM}{dx}$, et, puisqu'elle est indépendante des dimensions du système, ce doit être une quantité numérique. Donc M lui-même, le coefficient de potentiel mutuel des deux circuits, doit être une quantité de la dimension d'une ligne. Il en résulte, par l'équation (31), que ρ doit être l'inverse d'une ligne; par suite, d'après (24), $B - C$ doit être l'inverse du carré d'une ligne. Mais, puisque B et C sont deux fonctions de r, $B - C$ doit être l'inverse du carré de r ou un multiple numérique de cet inverse.

524. Le multiple à adopter dépend de notre système de mesure. Si nous adoptons le système électromagnétique, ainsi nommé parce qu'il est en concordance avec le système déjà admis pour les mesures magnétiques, la valeur de M doit être identique à celle du potentiel de deux feuillets magnétiques dont la puissance est égale à l'unité, et dont les bords coïncident avec les deux circuits. La valeur numérique de M est dans ce cas, d'après le § 423,

$$M = \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds', \tag{36}$$

l'intégration étant effectuée le long des deux circuits dans le sens po-

sitif. Adoptant cette expression comme valeur numérique de M, et la comparant à (31), nous trouvons

$$\rho = \frac{1}{r} \qquad \text{et} \qquad B - C = \frac{2}{r^2}. \tag{37}$$

525. Nous pouvons maintenant exprimer les composantes de la force due à l'action de ds sur ds', sous la forme la plus générale qui soit compatible avec les faits d'expérience.

La force qui agit sur ds se compose :

$$\left\{\begin{aligned} &\text{d'une attraction dans la direction de } r,\\ &R = \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - 2r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right) ii'\,ds\,ds' + r\frac{d^2Q}{ds\,ds'}\,ii'\,ds\,ds',\\ &\text{d'une autre dans la direction de } ds,\\ &S = -\frac{dQ}{ds'}\,ii'\,ds\,ds',\\ &\text{et d'une troisième dans la direction de } ds',\\ &S' = \frac{dQ}{ds}\,ii'\,ds\,ds', \end{aligned}\right. \tag{38}$$

où

$$Q = \int_r^\infty C\,dr;$$

et, puisque C est une fonction inconnue de r, nous savons seulement que Q est une fonction de r.

526. La quantité Q ne peut être déterminée sans faire d'hypothèse, par des expériences où le courant agissant forme un circuit fermé. Si nous supposons, avec Ampère, que l'action des éléments ds et ds' est dirigée suivant la ligne qui joint ces éléments, S et S' doivent disparaître, et Q doit être une quantité constante ou nulle. La force se réduit alors à une attraction dont la valeur est

$$R = \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - 2r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right) ii'\,ds\,ds'. \tag{39}$$

Ampère, qui a fait ces recherches bien avant que l'on eût établi le système des unités magnétiques, employait une formule réduite de moitié,

$$R = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right) jj'\,ds\,ds'. \tag{40}$$

Ici l'intensité du courant est mesurée en ce que l'on appelle *mesure*

électrodynamique. Si i et i' sont les intensités des courants en mesure électromagnétique, et j et j' les intensités en mesure électrodynamique, il est clair que

$$(41) \qquad jj' = 2ii' \qquad \text{ou} \qquad j = \sqrt{2}\, i.$$

Donc l'unité de courant adoptée dans les mesures électromagnétiques est plus grande que celle adoptée dans les mesures électrodynamiques dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1.

Le seul titre en raison duquel l'unité électrodynamique mérite quelque considération, c'est qu'elle a été adoptée primitivement par Ampère, qui a découvert la loi des actions entre les courants. L'intervention continuelle du facteur $\sqrt{2}$ dans les calculs faits dans ce système est incommode, et le système électromagnétique a le grand avantage d'être en accord numérique avec toutes nos formules magnétiques. Comme il est difficile pour le lecteur de se souvenir s'il doit multiplier ou diviser par $\sqrt{2}$, nous n'emploierons, dorénavant, que le système électromagnétique, dont se sont servis Weber et la plupart des autres auteurs.

Puisque la forme et la valeur de Q n'ont d'effet dans aucune des expériences faites jusqu'à présent, au moins quand le courant agissant est un courant fermé, nous pouvons, si nous voulons, adopter telle valeur de Q qui nous paraîtra simplifier les formules.

Ainsi, Ampère admet que la force qui agit sur les éléments est dirigée suivant la ligne qui les joint, ce qui donne $Q = 0$,

$$(42) \qquad R = \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right) ii'\,ds\,ds', \qquad S = 0, \qquad S' = 0.$$

Grassmann (1) admet que deux éléments en ligne droite n'ont pas d'action mutuelle : ce qui donne

$$(43) \quad Q = -\frac{1}{2r}, \qquad R = -\frac{3}{2r}\frac{d^2r}{ds\,ds'}, \qquad S = -\frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds'}, \qquad S' = \frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds}.$$

Nous pouvons, si nous voulons, admettre que l'attraction entre deux éléments, à une distance donnée, est proportionnelle au cosinus de l'angle compris entre ces éléments. Dans ce cas

$$(44) \quad Q = -\frac{1}{r}, \qquad R = \frac{1}{r^2}\cos\varepsilon, \qquad S = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}, \qquad S' = \frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}.$$

Enfin nous pouvons admettre que l'attraction et les forces obliques

(1) *Pogg. Ann.*, t. LXIV, p. 1; 1845.

ne dépendent que des angles que les éléments font avec la ligne qui les joint, et nous aurons

$$(45)\quad Q=-\frac{2}{r},\qquad R=-3\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'},\qquad S=-\frac{2}{r^2}\frac{dr}{ds'},\qquad S'=\frac{2}{r^2}\frac{dr}{ds}.$$

527. De ces quatre hypothèses différentes, celle d'Ampère est indubitablement la meilleure; car c'est la seule pour laquelle les forces agissant sur les deux éléments sont non seulement égales et opposées, mais encore dirigées suivant la ligne droite qui joint les éléments.

CHAPITRE III.

INDUCTION DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

528. OErsted ayant découvert l'action magnétique des courants électriques, on fut conduit par une suite de raisonnements directs à découvrir l'aimantation par les courants électriques et l'action mécanique entre les courants électriques. Mais ce fut seulement en 1831 que Faraday, qui essayait depuis quelque temps de produire des courants électriques au moyen d'actions électriques ou magnétiques, reconnut les conditions dans lesquelles se produit l'induction magnéto-électrique. La méthode que suivait Faraday dans ses recherches consistait à recourir constamment à l'expérience comme moyen de vérifier l'exactitude de ses idées, et à développer constamment ses idées sous l'influence directe de l'expérience. Dans les recherches qu'il a publiées, nous trouvons ses idées exprimées dans le langage qui convient le mieux à une science naissante, car il diffère assez du style des physiciens accoutumés à la forme mathématique de certaines idées reçues.

L'étude expérimentale par laquelle Ampère a établi les lois de l'action mécanique qui s'exerce entre les courants électriques constitue un des plus brillants exploits de la Science.

Il semble que cet ensemble de théorie et d'expérience ait jailli dans toute sa puissance, avec toutes ses armes, du cerveau du Newton de l'électricité. La forme en est parfaite, la rigueur inattaquable, et le tout se résume en une formule, d'où peuvent se déduire tous les phénomènes et qui devra toujours rester la formule fondamentale de l'Électrodynamique.

Mais la méthode d'Ampère, quoique revêtant une forme inductive, ne nous permet pas de suivre l'enchaînement des idées qui lui ont servi de guide. Nous avons peine à croire qu'Ampère ait réellement découvert la loi de l'action au moyen des expériences qu'il décrit. Nous sommes conduits à soupçonner, ce que d'ailleurs il nous dit lui-même (1), qu'il a découvert la loi par quelque méthode qu'il ne nous montre pas, et qu'ayant ensuite édifié une démonstration parfaite, il

(1) *Théorie des phénomènes électrodynamiques*, p. 9.

a fait disparaître toutes les traces des échafaudages au moyen desquels il l'avait élevée.

Au contraire, Faraday nous montre toutes ses expériences, celles qui réussissent et celles qui ne réussissent pas, ses idées à l'état d'ébauche et à celui de complet développement; et le lecteur, si inférieur qu'il soit à Faraday comme puissance d'induction, éprouve de la sympathie plus encore que de l'admiration, et se sent tenté de croire que, lui aussi, s'il en avait l'occasion, ferait des découvertes. Quiconque étudie, devra donc lire les *Recherches* d'Ampère, comme un magnifique modèle de style scientifique, dans l'exposé d'une découverte; mais il devra aussi étudier Faraday, en vue de cultiver les tendances scientifiques de son esprit par l'action et la réaction qui s'y établiront entre les faits nouvellement découverts, tels que les lui présente Faraday, et les idées qui naissent dans son propre esprit.

Ce fut peut-être un avantage pour la Science que Faraday, bien qu'ayant une parfaite connaissance des notions fondamentales de temps, d'espace et de force, n'ait pas été un mathématicien de profession. Il n'était pas tenté de s'engager dans les nombreuses et intéressantes recherches de Mathématiques pures, qu'auraient suggérées ses découvertes si elles avaient été présentées sous une forme mathématique, et il ne se sentait pas porté à imposer à ses résultats une forme qui répondît au goût mathématique de l'époque ou à les exprimer sous une forme qui permît aux mathématiciens de les aborder. Mais il se garda ainsi le loisir de faire son travail personnel, d'accorder ses idées avec ses observations et d'exprimer sa pensée dans un langage ordinaire et non technique.

C'est surtout dans l'espoir de faire de ces idées la base d'une méthode mathématique que j'ai entrepris ce Traité.

529. Nous sommes habitués à considérer l'univers comme formé de parties, et les mathématiciens commencent d'ordinaire par considérer une particule isolée, puis ils conçoivent ses relations avec une autre, et ainsi de suite. On a communément supposé que c'est là la méthode la plus naturelle. Mais pour concevoir une particule, il faut opérer une abstraction, puisque toutes nos perceptions s'appliquent à des corps étendus, et par suite l'idée du *tout,* dont nous avons conscience à un moment donné, peut bien être tout aussi primitive que celle d'un objet pris individuellement. Il peut donc exister une méthode mathématique dans laquelle on procéderait du tout aux parties, au lieu d'aller des parties au tout. Ainsi Euclide, dans son Premier

Livre, conçoit une ligne comme tracée par un point, une surface comme décrite par une ligne, un volume comme engendré par une surface; mais il définit aussi une surface comme la limite d'un volume, une ligne comme le bord d'une surface, un point comme l'extrémité d'une ligne.

De même, nous pouvons concevoir le potentiel d'un système matériel comme une fonction obtenue par certaines opérations d'intégration étendues aux masses des corps compris dans le champ; ou nous pouvons supposer que ces masses mêmes n'ont d'autre signification mathématique que d'être les intégrales de volume de $\frac{1}{4\pi}\nabla^2\Psi$, Ψ étant le potentiel.

Dans les recherches électriques, nous pouvons employer des formules où figurent les distances de certains corps et leurs charges ou les courants qui les traversent, ou bien nous pouvons employer des formules où figurent d'autres quantités qui soient toutes continues dans tout l'espace.

Les opérations mathématiques auxquelles on a recours dans la première méthode sont des intégrations le long de lignes, sur des surfaces, dans des espaces finis; dans la seconde méthode, on procède par équations différentielles partielles et intégrations étendues à tout l'espace.

La méthode de Faraday semble intimement liée à la seconde de ces manières d'opérer. Jamais il ne considère des corps comme existant sans qu'il n'y ait rien entre eux que leur distance, et comme agissant l'un sur l'autre suivant une certaine fonction de cette distance. Mais il conçoit l'espace entier comme un champ de force, où les lignes de force sont généralement courbes; celles qui sont dues à un corps s'étendent dans tous les sens à partir de ce corps, et leur direction est modifiée par la présence d'autres corps. Il parle même (1) des lignes de force appartenant à un corps, comme si elles faisaient en quelque sorte partie de lui de façon qu'on ne puisse dire que, dans son action sur les corps éloignés, un corps agit là où il n'est pas. Mais ceci n'est point une idée dominante chez Faraday. Je crois qu'il aurait plutôt dit que tout le champ de l'espace est rempli de lignes de force dont l'arrangement dépend de l'arrangement des corps dans ce champ, et que l'action mécanique ou électrique qui s'exerce sur chaque corps est déterminée par les lignes qui y aboutissent.

---

(1) *Exp. Res.*, t. II, p. 293; t. III, p. 417.

Phénomènes d'induction électromagnétique (1).

530. 1° *Induction par variation du courant primaire.* — Soient deux circuits conducteurs : le circuit primaire et le circuit secondaire. Le circuit primaire est relié à une pile voltaïque, au moyen de laquelle on peut produire le courant électrique, l'entretenir, l'interrompre ou le renverser. Le circuit secondaire renferme, pour révéler les courants qui peuvent s'y produire, un galvanomètre placé à une distance suffisante du circuit primaire pour que le courant primaire n'ait pas d'action directe sensible sur ses indications.

Supposons qu'une partie du circuit primaire consiste en un fil rectiligne, et une partie du circuit secondaire en un autre fil rectiligne, voisin du premier et parallèle, les autres parties des deux circuits étant plus éloignées.

On constate qu'au moment où l'on envoie le courant dans le fil rectiligne primaire, le galvanomètre accuse dans le fil rectiligne secondaire un courant de sens *inverse :* c'est ce qu'on appelle *le courant induit.* Ce courant secondaire disparaît bientôt, si l'on maintient constant le courant primaire, qui paraît ne plus produire d'effet sur le circuit secondaire. Si alors on interrompt le courant primaire, on observe un courant secondaire de même sens que le courant primaire. Toute variation du courant primaire donne lieu à une force électromotrice dans le circuit secondaire : si le courant primaire augmente, la force électromotrice est en sens inverse de ce courant ; s'il diminue, elle est de même sens que lui ; si le courant primaire est constant, il n'y a pas de force électromotrice.

Ces effets d'induction s'accroissent si l'on rapproche les deux fils. Ils s'accroissent encore si l'on donne aux circuits la forme de bobines circulaires ou en spirale, placées l'une près de l'autre, et, plus encore, si l'on met une tige de fer ou un faisceau de fils de fer à l'intérieur des bobines.

2° *Induction par mouvement du circuit primaire.* — Nous avons vu que, si l'on maintient le courant primaire constant et en repos, le courant secondaire disparaît rapidement.

Mais, laissant constant le courant primaire, approchons le fil rectiligne primaire du fil rectiligne secondaire : pendant ce mouvement

---

(1) Lire les séries I et II des *Experimental Researches* de Faraday.

d'approche, il se produit un courant secondaire en sens *inverse* du courant primaire.

Si l'on éloigne le circuit primaire du circuit secondaire, il y a un courant secondaire de *même* sens que le courant primaire.

3° *Induction par mouvement du circuit secondaire.* — Si l'on déplace le circuit secondaire, le courant qui y est induit est en sens contraire du courant primaire lorsque les deux circuits se rapprochent, et dans le même sens lorsque les deux circuits s'éloignent.

Dans tous les cas, le sens du courant secondaire est tel que l'action mécanique qui s'exerce entre les deux conducteurs est en sens contraire du mouvement; c'est une répulsion si les fils se rapprochent, une attraction si les fils s'éloignent. Ce fait, très important, a été établi par Lenz (1).

4° *Induction par mouvement relatif d'un aimant et du circuit secondaire.* — Si nous substituons au circuit primaire un feuillet magnétique dont les bords coïncident avec ce circuit, dont la puissance est numériquement égale à l'intensité dans ce circuit, et dont la face australe correspond à la face positive du circuit, les phénomènes produits par le mouvement relatif de ce feuillet et du circuit secondaire sont les mêmes qu'on observe avec un circuit primaire.

531. L'ensemble de ces phénomènes peut se résumer en une seule loi. Toute variation du nombre des lignes d'induction magnétique qui traversent le circuit secondaire dans le sens positif met en jeu le long du circuit une force électromotrice qui a pour mesure le taux de décroissement de l'induction magnétique à travers le circuit.

532. Supposons les rails d'une voie de chemin de fer isolés de la terre et réunis à une extrémité à travers un galvanomètre, et supposons le circuit complété à une distance x de l'extrémité par les roues et l'essieu d'une voiture. Négligeant la hauteur de l'essieu au-dessus du niveau des rails, l'induction dans le circuit secondaire est due à la force magnétique terrestre qui, sous les latitudes septentrionales, est dirigée de haut en bas. Si donc b est l'écartement des rails, l'aire horizontale du circuit est bx, et l'intégrale de l'induction magnétique à travers la surface de ce circuit est Zbx, Z étant la composante verticale de la force magnétique de la Terre. Puisque Z est dirigé de

(1) *Pogg. Ann.*, vol. XXI, p. 483 (1834).

haut en bas, c'est la face inférieure du circuit que l'on doit compter positive, et la direction positive dans le circuit est nord, est, sud, ouest, c'est-à-dire celle du mouvement diurne apparent du Soleil.

Supposons maintenant la voiture en mouvement : x varie, et il y a dans le circuit une force électromotrice dont la valeur est

$$-2b\frac{dx}{dt}.$$

Si x croît, c'est-à-dire si la voiture s'éloigne de l'extrémité, la force électromotrice est dans le sens négatif, c'est-à-dire nord, ouest, sud, est; et la direction de cette force est de droite à gauche dans l'essieu. Si x décroît, la direction absolue de la force est renversée; mais, comme le sens du mouvement de la voiture est aussi renversé, la force électromotrice agit toujours de droite à gauche dans l'essieu, pour l'observateur placé dans la voiture, lequel est toujours censé faire face dans le sens du mouvement. Sous les latitudes australes, où c'est l'extrémité sud de l'aiguille aimantée qui plonge, la force électromotrice qui agit sur un corps en mouvement est dirigée de gauche à droite.

Nous avons donc la règle suivante pour déterminer la force électromotrice qui agit dans un fil se déplaçant à travers un champ de force magnétique. Supposons-nous placés dans la position d'une aiguille aimantée, la tête à l'extrémité qui indique le nord, les pieds à celle qui se dirige au sud, et tournons-nous de manière à faire face dans le sens du mouvement : la force électromotrice due au mouvement est dirigée de gauche à droite.

533. Comme ces relations de directions sont importantes, nous allons prendre un autre exemple. Supposons une bague de métal placée autour de l'équateur de la Terre, et un fil de métal posé le long du méridien de Greenwich, de l'équateur au pôle nord.

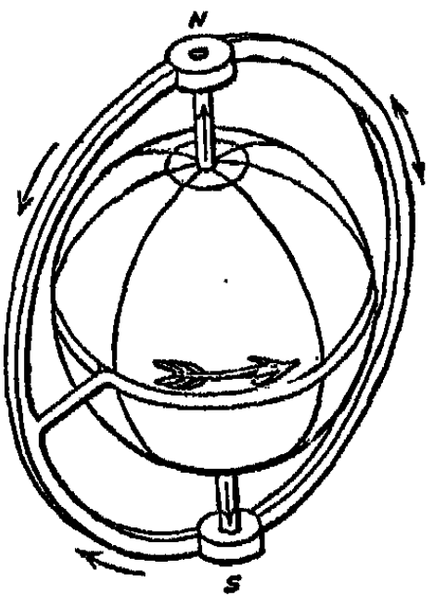
Supposons construit un grand arc métallique d'un quadrant, dont une des extrémités pivote autour du pôle nord, tandis que l'autre est portée par l'équateur et glisse sur la grande bague, en suivant le Soleil dans son mouvement diurne (*fig.* 31). Il y aura une force électromotrice agissant le long du quadrant, du pôle vers l'équateur.

La force électromotrice est la même, que nous supposions la Terre en repos et le quadrant mobile de l'est à l'ouest, ou que nous supposions le quadrant en repos et la Terre tournant de l'ouest à l'est. Si nous supposons que la Terre tourne, la force électromotrice est la

même, quelle que soit la forme de la partie du circuit qui reste fixe dans l'espace, et dont une extrémité touche un des pôles et l'autre l'équateur. Dans cette partie du circuit, le courant va du pôle à l'équateur.

L'autre partie du circuit, qui est fixe par rapport à la Terre, peut aussi avoir une forme quelconque et se trouver à l'intérieur ou à l'ex-

Fig. 31.



térieur de la Terre. Dans cette partie, le courant va de l'équateur à l'un ou à l'autre pôle.

534. L'intensité de la force électromotrice d'induction électromagnétique est absolument indépendante de la nature de la substance dont est formé le conducteur où elle agit, ou celui que traverse le courant inducteur.

Pour montrer qu'il en est ainsi, Faraday (1) forme un conducteur de deux fils de métaux différents, isolés l'un de l'autre par une enveloppe de soie, cordés ensemble et soudés à une extrémité. Par leurs autres extrémités, les fils sont reliés à un galvanomètre; de cette manière, ils occupent la même position par rapport au circuit primaire; et si la force électromotrice était plus grande dans l'un que dans l'autre, elle produirait un courant qui serait accusé par le galvanomètre. Or il a constaté qu'une pareille combinaison peut être soumise aux forces électromotrices d'induction les plus énergiques

(1) *Exp. Res.*, p. 193.

sans que le galvanomètre en soit aucunement affecté. Il a également trouvé que le galvanomètre n'indique rien, que les deux branches du conducteur composé soient formées de deux métaux, ou bien d'un métal et d'un électrolyte (1).

Donc, la force électromotrice qui agit sur un conducteur ne dépend que de la forme et du mouvement de ce conducteur, ainsi que de la force, de la forme et du mouvement des courants électriques du champ.

535. Une autre propriété négative de la force électromotrice est qu'elle n'a par elle-même aucune tendance à produire le mouvement mécanique d'aucun corps, mais qu'elle tend seulement à y produire un courant électrique.

Si un courant se produit effectivement dans le corps, il y a une action mécanique due à ce courant; mais si nous empêchons le courant de se former, il n'y a point d'action mécanique exercée sur le corps lui-même. Toutefois, si le corps est électrisé, la force électromotrice le déplace, ainsi que nous l'avons exposé en Électrostatique.

536. L'étude expérimentale des lois de l'induction des courants électriques dans les circuits fixes peut être poursuivie avec une grande rigueur, par l'emploi de méthodes où la force électromotrice et, par suite, l'intensité sont réduites à zéro dans le circuit du galvanomètre.

Ainsi, si l'on veut montrer que l'induction de la bobine A sur la bobine X est égale à celle de B sur Y, on place le premier couple de bobines A et X à une distance suffisante du second couple B et Y. On relie A et B à une pile voltaïque, de façon que le même courant primaire traverse A dans le sens positif et B dans le sens négatif, puis on attache (*fig.* 32) X et Y à un galvanomètre, de façon que le courant secondaire, si il y en a un, traverse X et Y successivement dans le même sens.

Alors, si l'induction de A sur X est égale à celle de B sur Y, le galvanomètre ne doit point accuser de courant d'induction quand on ouvre ou qu'on ferme le circuit de pile.

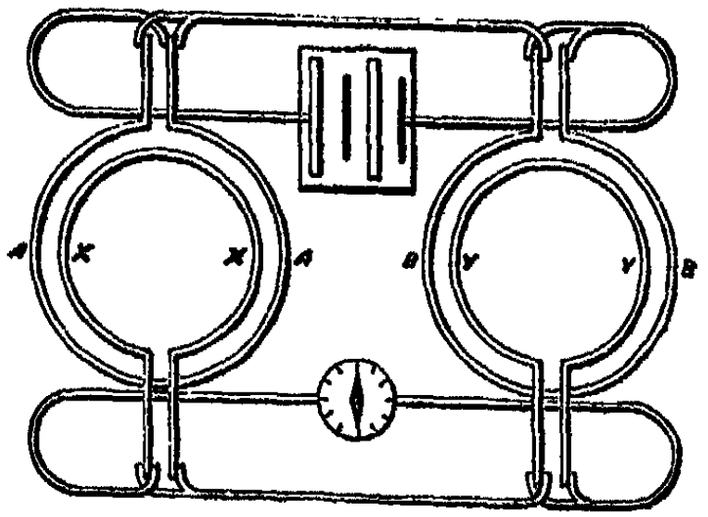
La délicatesse de cette méthode croît avec la force de courant primaire et la sensibilité du galvanomètre pour les courants instantanés, et ces expériences se font bien plus aisément que celles qui sont re-

(1) *Exp. Res.*, p. 200.

latives aux attractions électromagnétiques, et exigent que le conducteur lui-même soit délicatement suspendu.

Une série très instructive d'expériences de ce genre, fort bien combinées, a été décrite par le professeur Felici, de Pise (1).

Fig. 32.



Je ne ferai qu'indiquer brièvement quelques-unes des lois que l'on peut établir de cette manière :

1° *La force électromotrice d'induction d'un circuit sur un autre est indépendante de la section des conducteurs et de la matière dont ils sont formés.*

En effet on peut, sans rien changer au résultat, remplacer dans l'expérience un circuit par un autre de section et de substance différentes, mais de forme semblable.

2° *L'induction du circuit* A *sur le circuit* X *est égale à celle du circuit* X *sur le circuit* A.

Car, si l'on met A dans le circuit du galvanomètre et X dans celui de la pile, l'équilibre des forces électromotrices n'est pas troublé.

3° *L'induction est proportionnelle au courant inducteur.*

En effet, si l'on a établi au préalable que l'induction de A sur X est égale à celle de B sur Y et à celle de C sur Z, et qu'on fasse passer le courant de pile d'abord à travers A, puis qu'on le partage entre B et

(1) *Annales de Chimie*, t. XXXIV, p. 66 (1852), et *Nuovo Cimento*, t. IX, p. 345 (1859).

C dans une proportion quelconque, et si, enfin, on relie au galvanomètre la série formée de X pris en sens inverse, et de Y et Z dans le sens direct, la force électromotrice développée dans X fait équilibre à la somme des forces électromotrices développées dans Y et dans Z.

4° *Dans des couples de circuits qui forment des systèmes géométriquement semblables, l'induction est proportionnelle aux dimensions linéaires.*

En effet, supposons les trois couples de circuits mentionnés plus haut semblables entre eux, et tels que les dimensions linéaires de A soient égales à la somme des dimensions linéaires correspondantes de B et C; si l'on relie en série avec la pile A, B et C et que l'on mette en série avec le galvanomètre X dans le sens inverse, Y et Z dans le sens direct, il y a équilibre.

5° *La force électromotrice produite dans une bobine de n tours par une bobine de m tours est proportionnelle au produit mn.*

537. Pour des expériences du genre de celles que nous venons de considérer, le galvanomètre doit être aussi sensible que possible et son aiguille aussi légère que possible pour qu'un courant instantané, même très faible, donne un effet appréciable. Les expériences sur l'induction produite par le mouvement exigent que l'aiguille ait une période d'oscillation un peu plus longue, afin qu'on ait le temps d'effectuer certains mouvements des conducteurs tandis que l'aiguille n'est pas encore loin de sa position d'équilibre. Dans les premières expériences, les forces électromotrices se font équilibre tout le temps dans le circuit du galvanomètre, en sorte qu'il ne passe point de courant dans la bobine du galvanomètre; dans les expériences que nous allons décrire maintenant, la force électromotrice agit d'abord dans un sens, puis dans un autre, de manière à produire successivement dans le galvanomètre deux courants de sens contraires, et nous avons à faire voir que, dans certains cas, les impulsions que l'aiguille reçoit de ces deux courants successifs sont égales et contraires.

La théorie de l'emploi du galvanomètre pour la mesure des courants instantanés sera examinée plus en détail au § 748. Pour l'instant, et pour l'objet que nous avons en vue, il suffira de remarquer que, tant que l'aiguille est près de sa position d'équilibre, la force déviatrice du courant est proportionnelle à l'intensité du courant, et que si la durée totale pendant laquelle agit le courant est courte relativement à la période d'oscillation de l'aiguille, la vitesse finale de l'ai-

mant est proportionnelle à la quantité d'électricité transmise par le courant. Si donc deux courants se succèdent à court intervalle, transportant en sens contraire des quantités égales d'électricité, l'aiguille doit rester finalement sans vitesse.

Ainsi, pour montrer que les courants induits dans le circuit secondaire par la fermeture et par la rupture du circuit primaire sont égaux comme quantité totale d'électricité transmise, mais de sens contraires, nous pouvons disposer les communications du circuit primaire avec la pile, de façon que, en appuyant sur une clef ou en retirant la main, on puisse à volonté envoyer le courant dans le circuit primaire ou rompre le circuit. Si l'on abaisse la clef pendant un certain temps, le galvanomètre placé dans le circuit secondaire indique, au moment où l'on établit le contact, un courant instantané en sens contraire du courant primaire. Si l'on maintient le contact, ce courant d'induction ne fait que passer et disparaît aussitôt. Si maintenant on rompt le contact, un autre courant instantané traverse en sens contraire le circuit secondaire, et l'aiguille du galvanomètre reçoit une impulsion en sens inverse.

Mais, si l'on n'établit le contact que pendant un instant et qu'on le rompe aussitôt, les deux courants induits se succèdent si rapidement dans le galvanomètre que l'aiguille, subissant l'impulsion du premier courant, n'a pas eu le temps de s'écarter sensiblement de sa position d'équilibre, qu'elle est arrêtée par le second courant, et, en raison de la rigoureuse égalité des quantités transmises dans ces deux courants instantanés, l'aiguille s'arrête court.

Si l'on observe l'aiguille avec soin, elle semble lancée, par une brusque secousse, d'une position de repos à une autre position de repos très voisine de la première.

On démontre ainsi que la quantité d'électricité transmise dans le courant induit de rupture est exactement égale et de sens contraire à celle du courant induit de fermeture.

538. Voici une autre application de cette méthode, qui a été donnée par Felici dans la seconde série de ses *Recherches*.

Il est toujours possible de trouver plusieurs positions de la bobine secondaire B telles qu'il ne s'y produise point de courants d'induction quand on établit ou que l'on rompt le contact dans la bobine primaire A. On dit alors que les positions des deux bobines sont conjuguées.

Soient B_1 et B_2 deux de ces positions. Si la bobine B est brusquement déplacée de la position B_1 à la position B_2, la somme algébrique

des courants instantanés qui la traversent est exactement nulle, en sorte que l'aiguille du galvanomètre reste en repos quand le mouvement de B est achevé.

Ceci est vrai, quelle que soit la façon dont B_1 vient en B_2, et que le courant qui traverse la bobine primaire reste constant ou qu'il varie durant le mouvement.

Soit encore B′ une autre position de B non conjuguée de A et telle, par conséquent, qu'il se produise des courants d'induction dans B, quand on ouvre ou qu'on ferme le contact en A.

Établissons le contact quand B est dans la position B_1 : il n'y a pas de courant d'induction; déplaçons B jusqu'à B′, il y a un courant d'induction dû au mouvement; mais, si B est rapidement amené en B′ et qu'alors on coupe le circuit primaire, le courant induit de rupture annule exactement l'effet dû au mouvement, en sorte que l'aiguille du galvanomètre reste en repos. Donc le courant dû au déplacement depuis une position conjuguée jusqu'à une autre position quelconque est égal au courant de rupture obtenu dans cette dernière position.

Mais, puisque l'effet de la clôture est égal et contraire à celui de la rupture, il en résulte que, si l'on établit le contact pendant que la bobine B est dans une position quelconque B′, l'effet produit est égal à celui que l'on obtiendrait en amenant la bobine d'une position conjuguée B_1 jusqu'en B′ pendant que le courant circule dans A.

Si le changement des positions relatives des bobines est obtenu en déplaçant le circuit primaire au lieu du circuit secondaire, on trouve que le résultat est le même.

539. Il résulte de ces expériences que, si simultanément A se déplace de A_1 en A_2 et B de B_1 en B_2, tandis que l'intensité dans A varie de γ_1 à γ_2, le courant d'induction total qui traverse B ne dépend que de l'état initial A_1, B_1, γ_1 et de l'état final A_2, B_2, γ_2, et nullement de la nature des états intermédiaires par lesquels a pu passer le système.

Donc la valeur du courant d'induction total doit être de la forme

$$F(A_2, B_2, \gamma_2) - F(A_1, B_1, \gamma_1),$$

où F est une fonction de A, B et γ.

Relativement à la forme de cette fonction, nous savons (536) que, quand il n'y a pas mouvement et, par suite, quand $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$, le courant d'induction est proportionnel au courant primaire. Donc γ n'intervient que comme facteur, l'autre facteur étant une fonction de la forme et de la position des circuits A et B.

Nous savons aussi que la valeur de cette fonction dépend des positions relatives et non des positions absolues de A et B; elle doit donc pouvoir s'exprimer comme fonction des distances des divers éléments dont sont composés les circuits, et des angles que ces éléments font les uns avec les autres.

Soit M cette fonction. Un courant d'induction total pourra se représenter par

$$C(M_1\gamma_1 - M_2\gamma_2),$$

où C est la conductibilité du circuit secondaire, et où M_1 et γ_1 sont les valeurs initiales, M_2 et γ_2 les valeurs finales de M et de γ.

Ces expériences montrent donc que le courant d'induction total dépend du changement qui se produit sur une certaine quantité $M\gamma$, changement qui peut provenir soit d'une variation du courant primaire γ, soit d'un mouvement du circuit primaire ou du circuit secondaire qui modifiera la valeur de M.

540. Cette conception d'une quantité dont les variations, et non la grandeur absolue, déterminent le courant d'induction s'était présentée à l'esprit de Faraday vers le début de ses *Recherches* (1). Il remarquait que le circuit secondaire, maintenu en repos dans un champ électromagnétique d'intensité constante, ne manifeste point d'effets électriques, alors qu'il y aurait eu courant si l'on avait produit brusquement le même état du champ. De même encore, si l'on écarte du champ le courant primaire ou si l'on supprime les forces magnétiques, il y a un courant de sens inverse. C'est pour cette raison qu'il voyait dans l'état d'un circuit secondaire placé dans le champ électromagnétique « un état électrique particulier de la matière », auquel il donnait le nom d'*état électrotonique*. Plus tard, il reconnut qu'il pouvait se passer de cette hypothèse et n'employer que des considérations de lignes de force magnétique (2); mais, même dans ses dernières *Recherches* (3), il dit : « A plusieurs reprises, l'idée d'un état électrotonique (4) s'est imposée à mon esprit ».

Toute l'histoire du chemin fait par cette idée dans l'esprit de Faraday, telle que nous la montrent ses *Recherches* publiées, mérite bien d'être étudiée. Une série d'expériences, qu'avaient inspirées des

---

(1) *Exp. Res.*, série I, p. 60.
(2) *Ibid.*, série II, p. 242.
(3) *Ibid.*, 3269.
(4) *Ibid.*, 60, 1114, 1661, 1729, 1733.

réflexions assidues sans l'aide du calcul mathématique, l'avaient conduit à reconnaître l'existence de quelque chose que nous savons maintenant être une quantité mathématique, que l'on peut même appeler la *quantité fondamentale* dans la théorie de l'Électromagnétisme. Mais, comme il était arrivé à cette conception par une voie purement expérimentale, il lui attribuait une existence physique et supposait qu'il s'agissait d'un état particulier de la matière; il restait, d'ailleurs, tout prêt à abandonner cette théorie aussitôt qu'il pourrait expliquer les phénomènes au moyen de conceptions revêtant une forme plus familière.

Longtemps après, d'autres recherches ont conduit à la même idée par une voie purement mathématique; mais personne, que je sache, n'a reconnu, dans la conception mathématique complexe du potentiel de deux circuits, l'hypothèse hardie de Faraday d'un état électrotonique. Aussi, ceux qui ont abordé cette étude en suivant la voie indiquée par les éminents investigateurs qui ont les premiers réduit les lois de ces phénomènes à une forme mathématique ont souvent eu de la peine à apprécier la rigueur scientifique des lois énoncées avec une si merveilleuse perfection dans les deux premières séries des *Recherches* de Faraday.

La valeur scientifique de cette conception de l'état électrotonique de Faraday consiste en ce qu'elle conduit l'esprit à s'attacher à une certaine quantité dont les changements déterminent les phénomènes actuels. Mais, si l'on ne lui donne des développements bien plus grands qu'elle n'en a reçu de Faraday, cette conception ne se prête point aisément à l'explication des phénomènes. Nous reviendrons sur ce sujet au § 584.

541. Une méthode qui, dans les mains de Faraday, a été bien plus puissante, est celle où il fait usage de ces lignes de force magnétique qu'il avait toujours en vue quand il considérait des aimants ou des courants électriques, et dont le dessin, obtenu avec de la limaille de fer, lui semblait (1) avec raison de la plus grande utilité pour l'expérimentateur.

Faraday considérait ces lignes comme représentant non seulement par leur direction la direction de la force magnétique, mais encore par leur nombre et leur rapprochement l'intensité de cette force; et, dans ses dernières *Recherches* (2), il a montré comment on peut

(1) *Exp. Res.*, 3234.
(2) *Ibid.*, p. 3122.

concevoir des lignes de force unité. Dans différentes parties de ce Traité, j'ai expliqué quelles relations existent entre les propriétés que Faraday attribuait aux lignes de force et les conditions mathématiques auxquelles satisfont les forces électriques et magnétiques, et comment on peut donner une précision mathématique à la notion de Faraday des lignes-unités et du nombre de ces lignes (*voir* § 82, 404, 490).

Dans la première série de ses *Recherches* (1), il montre clairement comment le sens du courant dans un circuit conducteur dont une partie est mobile dépend de la manière dont la partie mobile coupe les lignes de force magnétique.

Dans la deuxième série (2), il montre comment on peut expliquer les phénomènes produits par les variations d'intensité d'un courant ou d'un aimant, en supposant que le système des lignes de force s'épanouit autour du fil ou de l'aimant ou se contracte vers lui, suivant que sa puissance augmente ou diminue.

Je ne sais à quel degré de netteté était déjà parvenue pour lui la doctrine qu'il a, plus tard, exposée si clairement (3), à savoir que, quand un conducteur se meut en coupant des lignes de force, l'action totale qu'il subit dépend de l'aire ou de la section des lignes de force. Mais cette vue sur la question ne semble plus nouvelle, si l'on tient compte des *Recherches* exposées dans la deuxième série (4).

La conception que se faisait Faraday de la continuité des lignes de force lui interdisait d'admettre que ces lignes pussent subitement commencer d'exister en un point où elles n'existaient pas auparavant. Si donc le nombre des lignes de force qui traversent un circuit vient à varier, ce ne peut être que parce que le circuit se meut en coupant les lignes, ou que les lignes se meuvent en coupant le circuit. Dans les deux cas, il y a courant produit dans le circuit.

Le nombre des lignes de force qui traversent un circuit est donc mathématiquement équivalent à la conception primitive de Faraday de l'état électrotonique de ce circuit, et est représenté par la quantité $M\gamma$.

C'est seulement depuis que l'on a rendu plus précise la définition de la force électromotrice (69, 274) et la manière de la mesurer que

(1) *Exp. Res.*, p. 114.
(2) *Ibid.*, p. 238.
(3) *Ibid.*, p. 3082, 3087, 3113.
(4) *Ibid.*, p. 217, etc.

nous pouvons énoncer complètement, sous la forme suivante, les véritables lois de l'Électromagnétisme :

La force électromotrice totale qui, à un moment donné, agit le long d'un circuit, est proportionnelle au décroissement par unité de temps du nombre des lignes de force magnétique qui traversent le circuit.

En intégrant par rapport au temps, cet énoncé devient :

La somme de l'intégrale par rapport au temps de la force électromotrice qui agit le long d'un circuit et du nombre des lignes de force qui passent à travers ce circuit, est constante.

Au lieu de parler du nombre des lignes de force magnétique, nous pouvons parler de l'induction magnétique à travers le circuit ou de l'intégrale de l'induction magnétique sur une surface quelconque limitée par le circuit.

Nous reviendrons à la méthode de Faraday; mais, pour l'instant, nous devons énumérer les théories de l'induction qui sont fondées sur d'autres considérations.

Loi de Lenz.

542. En 1834, Lenz (1) fit connaître la remarquable relation qui suit, entre les phénomènes d'action mécanique dus aux courants électriques, et définis par la formule d'Ampère, et ceux de l'induction électrique par mouvement relatif des conducteurs. Antérieurement, dans le *Philosophical Magazine* de janvier de la même année, Ritchie avait essayé d'énoncer une relation du même genre; mais il avait assigné dans tous les cas une direction inexacte du courant induit. Voici la loi de Lenz :

Si un courant constant traverse le circuit primaire A, *et que, par le mouvement de* A *ou du circuit secondaire* B, *un courant soit induit dans* B, *le sens de ce courant est tel que son action électromagnétique sur* A *tend à contrarier le mouvement relatif des circuits.*

C'est sur cette loi que J. Neumann (2) a fondé sa théorie mathématique de l'induction, où il a établi les lois mathématiques des courants

(1) *Pogg. Ann.*, vol. XXXI, p. 483; 1834.
(2) *Berlin. Acad.*, 1845 et 1847.

induits par déplacement du conducteur primaire ou du conducteur secondaire. Il a fait voir que cette quantité M, que nous avons appelée le *potentiel d'un circuit sur l'autre,* n'est autre que ce potentiel électromagnétique d'un circuit sur l'autre que nous avons déjà étudié à propos de la formule d'Ampère. Nous pouvons donc regarder J. Neumann comme ayant étendu à l'induction des courants l'emploi des méthodes mathématiques qu'Ampère avait appliquées à leurs actions mécaniques.

543. Un progrès scientifique plus important encore fut réalisé peu de temps après par Helmholtz, dans son *Essai sur la conservation de la force* (1), et par Sir W. Thomson (2), dans des travaux un peu postérieurs, mais indépendants de ceux de Helmholtz. Ils ont montré que l'induction des courants électriques, découverte par Faraday, pouvait se déduire mathématiquement des actions électromagnétiques découvertes par OErsted et Ampère, en appliquant le principe de la conservation de l'énergie.

Helmholtz prend le cas d'un circuit conducteur de résistance R, dans lequel agit une force électromotrice A due à une pile voltaïque ou thermo-électrique. A chaque instant le courant qui traverse le circuit est I. Il suppose en mouvement dans le voisinage du circuit un aimant dont le potentiel par rapport au conducteur est V, en sorte que l'énergie communiquée à l'aimant, par l'action électromagnétique durant un espace de temps très court dt, est

$$I\frac{dV}{dt}dt.$$

Le travail effectué sous forme de chaleur dégagée dans le circuit est, d'après la loi de Joule (§ 242),

$$I^2 R\,dt,$$

et le travail dépensé par la force électromotrice A, pour entretenir le courant I pendant le temps dt, est

$$AI\,dt.$$

Donc, puisque le travail total effectué doit être égal au travail dé-

---

(1) Lu devant la Société de Physique de Berlin, le 23 juillet 1847. Traduit dans les *Mémoires scientifiques* de Taylor, 2e Partie, p. 114.

(2) *Trans. Brit. Ass.*, 1848, et *Phil. Mag.*, déc. 1851. Voir aussi son Mémoire sur les *Courants électriques instantanés* (*Phil. Mag.*, 1853).

pensé,

$$\mathrm{A}I\,dt = I^2 R\,dt + I\frac{dV}{dt}\,dt;$$

d'où nous tirons l'intensité du courant

$$I = \frac{A - \frac{dV}{dt}}{R}.$$

Or la valeur de A est arbitraire : faisons-la égale à zéro, alors

$$I = -\frac{1}{R}\frac{dV}{dt}.$$

Le courant total induit pendant que l'aimant se déplace d'un point où son potentiel est V_1 à un point où son potentiel est V_2 est

$$\int I\,dt = -\frac{1}{R}\int \frac{dV}{dt}\,dt = \frac{1}{R}(V_1 - V_2).$$

Donc le courant total est indépendant de la vitesse ou du chemin suivi par l'aimant et ne dépend que de ses positions initiale et finale.

Dans sa première étude, Helmholtz employait un système d'unités fondé sur la chaleur que le courant produit dans le conducteur. Considérant comme arbitraire l'unité d'intensité, l'unité de résistance est celle dans laquelle cette unité d'intensité produit l'unité de chaleur en l'unité de temps. Dans ce système, l'unité de force électromotrice est celle qui donne lieu à l'unité d'intensité dans un conducteur présentant l'unité de résistance. L'emploi de ce système entraîne l'introduction dans les équations d'un coefficient a, qui est l'équivalent mécanique de l'unité de chaleur. Comme nous nous en tenons invariablement au système des unités électrostatiques ou au système des unités électromagnétiques, ce facteur ne paraît pas dans les équations qui sont données ici.

544. Helmholtz calcule ainsi le courant d'induction quand un circuit conducteur et un circuit traversé par un courant constant se meuvent l'un par rapport à l'autre.

Soient

R_1 et R_2 les résistances;
I_1 et I_2 les intensités;
A_1 et A_2 les forces électromotrices extérieures;
V le potentiel d'un circuit sur l'autre quand l'unité de courant traverse chacun des conducteurs.

On a

$$A_1 I_1 + A_2 I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_1 I_2 \frac{dV}{dt}.$$

Supposons que I_1 soit le courant primaire, et que I_2 soit assez faible pour ne pas produire par induction de changement sensible sur I_1; nous pouvons poser

$$I_1 = \frac{A_1}{R_1},$$

et alors

$$I_2 = \frac{A_2 - I_1 \frac{dV}{dt}}{R_2},$$

résultat qui peut s'interpréter absolument comme dans le cas de l'aimant.

Si nous supposons que I_2 soit le courant primaire et que I_1 soit beaucoup plus petit que I_2, nous avons pour I_1

$$I_1 = \frac{A_1 - I_2 \frac{dV}{dt}}{R_1};$$

ce qui montre que, pour des courants égaux, la force électromotrice induite par le premier circuit agissant sur le second est égale à celle du second agissant sur le premier, quelles que soient les formes des circuits.

Dans ce Mémoire, Helmholtz ne discute pas le cas de l'induction due à l'augmentation ou à l'affaiblissement du courant primaire, ni l'induction d'un courant sur lui-même. Thomson (1) a appliqué le même principe à la détermination de la valeur mécanique d'un courant, et il a montré que, quand du travail est accompli par l'action mutuelle de deux courants constants, leur valeur mécanique est *accrue* d'autant, en sorte que la pile doit fournir, outre le travail nécessaire pour entretenir ces courants malgré la résistance des circuits, le *double* du travail effectué (2).

545. En introduisant un système d'unités absolues pour la mesure des quantités électriques, W. Weber fit réaliser à la Science un de ses plus grands progrès. Déjà, avec Gauss, il avait porté la mesure

(1) *Théorie mécanique de l'électrolyse* (*Phil. Mag.*, déc. 1851).

(2) NICHOLS, *Cyclopædia of Physical Science;* article « MAGNÉTISME, ses relations dynamiques », et *Reprint*, § 571.

des quantités magnétiques au premier rang des méthodes de précision; ensuite il s'occupa dans ses *Mesures électrodynamiques*, non seulement d'établir des principes rationnels relativement au choix des unités à employer, mais encore de déterminer certaines quantités électriques en fonction de ces unités avec un degré de précision auquel on n'avait encore point tenté de parvenir. C'est à ces recherches que les deux systèmes d'unités électrostatiques et électrodynamiques doivent leur développement et leur application pratique.

Weber a aussi créé une théorie générale de l'action électrique, de laquelle il déduit la force électrostatique et la force électromagnétique, ainsi que l'induction des courants électriques. Nous reviendrons, dans un Chapitre spécial, sur cette théorie et sur quelques-uns de ses développements plus récents. (*Voir* § 846.)

CHAPITRE IV.

INDUCTION D'UN COURANT SUR LUI-MÊME.

546. Faraday a consacré la neuvième série de ses *Recherches* à l'étude d'une classe de phénomènes auxquels donne lieu le courant qui traverse un fil formant la bobine d'un électro-aimant.

M. Jenkin avait observé que l'on ne peut produire de secousse sensible par l'action directe d'un système voltaïque formé d'un seul couple; mais que, si l'on fait passer le courant dans la bobine d'un électro-aimant et que l'on coupe le circuit entre les extrémités de deux fils tenus chacun d'une main, on sent une légère secousse. On ne sent pas de secousse de ce genre quand on établit le contact.

Faraday a fait voir que ce phénomène, et d'autres qu'il décrit, sont dus à la même action inductive du courant, dont il avait déjà observé les effets exercés sur des conducteurs voisins du courant; mais, dans ce cas, l'action s'exerce sur le conducteur même où circule le courant, et elle est d'autant plus puissante que le fil est plus rapproché des divers éléments de courant que ne saurait l'être aucun autre fil.

547. Mais il remarque (1) que « la première idée qui se présente à l'esprit est que l'électricité en mouvement dans le fil possède quelque chose d'analogue à une quantité de mouvement ou à une inertie ». En effet, si l'on ne considère qu'un fil, les phénomènes sont tout semblables à ceux que l'on observerait dans un tuyau plein d'eau coulant en courant continu. Si, tandis que l'eau coule, on ferme brusquement le bout du tuyau, la quantité de mouvement de l'eau donne lieu à une pression soudaine, bien supérieure à celle qui est due à la charge, et pouvant être assez forte pour faire éclater la conduite.

Si l'eau peut s'échapper par un orifice étroit quand la principale ouverture est fermée, elle est lancée avec une vitesse bien plus grande que celle qui est due à sa charge; et, si elle peut s'échapper par une soupape dans un réservoir, elle le fait, lors même que la pression dans le réservoir serait supérieure à celle qui est due à sa charge propre.

(1) *Exp. Res.*, 1077.

C'est sur ce principe qu'est construit le bélier hydraulique, au moyen duquel une petite quantité d'eau peut être élevée à une grande hauteur au moyen d'une grande quantité tombant d'un niveau bien moins élevé.

548. Ces effets d'inertie du fluide contenu dans le tube ne dépendent que de la quantité de fluide en mouvement, de la longueur du tube et de sa section aux différents points de sa longueur. Ils ne dépendent en rien des objets extérieurs, ni de la forme suivant laquelle le tube peut être courbé, pourvu que sa longueur reste constante.

Ce n'est plus le cas pour un fil traversé par un courant : si l'on replie sur lui-même en double un long fil, l'effet est très petit; si l'on sépare les deux parties, l'effet est plus grand; il augmente encore si le fil est enroulé en bobine, et il est le plus grand possible si, à l'intérieur de cette bobine, on introduit un noyau en fer doux.

De même, si l'on enroule en même temps que le premier un second fil qui en soit isolé, et si ce second fil ne forme pas un circuit fermé, les effets sont les mêmes que précédemment; mais, si le second fil forme un circuit fermé, il s'y forme un courant d'induction, et les effets de self-induction dans le premier fil sont retardés.

549. Ces résultats nous montrent clairement que, si ces phénomènes sont dus à une quantité de mouvement, ce n'est certainement point celle de l'électricité qui circule dans le fil; car le même fil, traversé par le même courant, donne lieu à des effets variables suivant sa forme; et même, sa forme ne changeant pas, la présence d'objets extérieurs, tels qu'un morceau de fer ou un circuit métallique fermé, influe sur le résultat.

550. Mais, pour l'esprit qui a une fois reconnu l'analogie que présentent les phénomènes de self-induction et ceux du mouvement des corps matériels, il est difficile de renoncer entièrement au secours qu'on peut tirer de cette analogie ou d'admettre qu'elle est purement superficielle et trompeuse. Au point de vue dynamique, la notion fondamentale de matière se réduit à la faculté de devenir par le mouvement une sorte de réservoir de quantité de mouvement et d'énergie; et cette idée est si intimement liée aux formes de notre pensée que, dès que nous pouvons l'entrevoir dans une partie quelconque de la nature, nous sentons que nous avons devant nous un chemin devant nous conduire tôt ou tard à la complète intelligence de la question.

551. Dans le cas du courant électrique, nous trouvons que la force électromotrice qui commence à agir ne produit pas immédiatement le courant dans son entier, mais que le courant augmente graduellement. Que fait donc la force électromotrice pendant ce temps où la résistance qui s'oppose au courant ne lui fait point encore équilibre? Elle augmente le courant électrique.

Or une force qui agit sur un corps ordinaire dans le sens de son mouvement augmente sa quantité de mouvement et lui donne de l'énergie cinétique, c'est-à-dire le pouvoir d'effectuer du travail en raison de son mouvement.

De même, la partie de la force électromotrice qui n'a point rencontré de résistance a servi à accroître le courant électrique. Le courant électrique, ainsi produit, a-t-il une quantité de mouvement ou une énergie cinétique?

Nous avons déjà montré qu'il possède quelque chose de bien semblable à une quantité de mouvement; qu'il oppose de la résistance à un arrêt brusque et qu'il peut développer pour une courte durée une force électromotrice considérable.

Mais un circuit conducteur dans lequel on a établi un courant possède, grâce à ce courant, le pouvoir d'effectuer du travail; et l'on ne saurait dire que ce pouvoir soit quelque chose de semblable à de l'énergie, car c'est réellement et véritablement de l'énergie.

Ainsi, le courant abandonné à lui-même continue de circuler jusqu'à ce qu'il soit arrêté par la résistance du circuit; mais, avant d'être arrêté, il engendre une certaine quantité de chaleur, laquelle, exprimée en mesure dynamique, est égale à l'énergie qui existait originairement dans le courant.

De même, le courant étant abandonné à lui-même, on peut lui faire faire le travail mécanique de déplacer des aimants; et, d'après la loi de Lenz, l'effet inductif de ces mouvements est d'arrêter le courant plus tôt que ne l'aurait arrêté à elle seule la résistance du circuit. De cette façon, une partie de l'énergie du courant peut se transformer en travail mécanique au lieu de passer en chaleur.

552. On voit donc qu'un conducteur traversé par un courant est le siège d'une énergie d'une certaine nature; et, puisque nous ne pouvons concevoir le courant électrique que comme un phénomène cinétique (1), son énergie doit être de l'énergie cinétique, c'est-à-dire l'énergie qu'un corps mobile possède en vertu de son mouvement.

---

(1) FARADAY, *Exp. Res.* (283).

Nous avons déjà montré que l'on ne peut considérer l'électricité qui circule dans le fil comme étant le corps dans lequel se doit retrouver cette énergie; car l'énergie d'un corps mobile ne dépend de rien de ce qui est extérieur à ce corps, tandis que la présence d'autres corps dans le voisinage du courant modifie son énergie.

Nous sommes donc conduits à rechercher s'il ne pourrait pas se produire quelque mouvement dans l'espace extérieur au fil, où ne passe pas le courant électrique, mais où se manifestent les effets électromagnétiques de ce courant.

Je n'examinerai point, pour le moment, les raisons que l'on a de chercher ces mouvements à un endroit plutôt qu'à un autre, ou de les regarder comme étant d'une espèce plutôt que d'une autre.

Ce que je me propose de faire maintenant, c'est d'examiner les conséquences de l'hypothèse que les phénomènes du courant électrique sont les mêmes que ceux d'un système mobile, le mouvement étant communiqué d'un point à un autre du système par des forces dont, pour l'instant, je n'essuyerai même pas de définir la nature ni les lois, puisque ces forces peuvent être éliminées des équations du mouvement par la méthode indiquée par Lagrange pour un système à liaisons quelconques.

Dans les cinq Chapitres qui suivent, je me propose de déduire d'une hypothèse dynamique de ce genre les traits principaux de la théorie de l'électricité, au lieu de suivre la voie qui a conduit Weber et d'autres investigateurs à un grand nombre de découvertes et d'expériences remarquables, et à des conceptions dont quelques-unes sont aussi belles que hardies. J'ai préféré cette méthode parce que je voulais montrer qu'il y a d'autres manières d'envisager les phénomènes, qui me paraissent plus satisfaisantes et qui, en même temps, s'accordent avec les méthodes suivies dans les Parties précédentes de cet Ouvrage, mieux que ne le font les méthodes fondées sur l'hypothèse d'une action directe à distance.

CHAPITRE V.

SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME A LIAISONS.

553. Dans la quatrième Section de la seconde Partie de sa *Mécanique analytique*, Lagrange a donné une méthode pour réduire les équations dynamiques ordinaires du mouvement des parties d'un système à liaisons à un nombre égal à celui des degrés de liberté du système.

Les équations du mouvement d'un système à liaison ont été données sous une autre forme par Hamilton, et ont conduit à un grand développement des parties supérieures de la Dynamique pure (1).

Comme, pour notre tentative de faire rentrer les phénomènes électriques dans le domaine de la Dynamique, il est nécessaire que nos idées dynamiques aient la forme qui convient pour l'application directe aux questions physiques, nous allons consacrer ce Chapitre à l'exposé de ces idées, à un point de vue physique.

554. Lagrange se proposait de ramener la Dynamique à ne dépendre que du calcul. Il commence donc par exprimer les relations dynamiques élémentaires au moyen des relations correspondantes entre des quantités purement algébriques, et des équations ainsi obtenues il déduit ses équations finales par une opération purement algébrique. Certaines quantités, exprimant les réactions qui s'établissent entre les parties du système en raison de leur liaison physique, figurent dans les équations du mouvement des parties qui composent ce système : l'étude de Lagrange, considérée au point de vue mathématique, est une méthode pour éliminer ces quantités des équations finales.

Quand il suit les progrès de cette élimination, l'esprit s'applique au calcul et doit, par conséquent, rester dégagé de l'intervention de toute idée dynamique. Mais notre but, à nous, est de cultiver nos idées dynamiques. Nous allons donc profiter du travail des mathéma-

(1) *Voir* le *Rapport sur la dynamique théorique*, présenté par le professeur Cayley à l'Association britannique, 1857, et THOMSON et TAIT, *Natural philosophy*.

ticiens et faire passer leurs résultats du langage du calcul dans celui de la Dynamique, de façon que nos expressions figurent à l'esprit, non quelque opération algébrique, mais certaines propriétés des corps en mouvement.

Le langage de la Dynamique a été considérablement étendu, principalement par ceux qui ont développé, sous une forme courante, la doctrine de la conservation de l'énergie; on verra qu'une bonne partie de l'exposé qui suit a été suggérée par l'étude faite de ce sujet dans la *Natural Philosophy* de Thomson et Tait : telle est, en particulier, la méthode consistant à commencer par la théorie des forces impulsives.

J'ai appliqué cette méthode de manière à éviter d'introduire explicitement la considération du mouvement d'aucune partie du système autre que les coordonnées ou variables, desquelles dépend le mouvement du tout. Sans doute il est important que le lecteur sache suivre la relation qui existe entre le mouvement de chaque partie du système et le mouvement des coordonnées, mais il n'est pas du tout nécessaire de passer par là pour obtenir les équations finales, lesquelles sont indépendantes de la forme particulière de ces liaisons.

Les variables.

555. Le nombre des degrés de liberté d'un système est le nombre des données qui doivent être connues, pour que la position du système soit complètement déterminée. Ces données peuvent être présentées sous différentes formes, mais leur nombre dépend de la nature même du système, et ne saurait être changé.

Pour fixer les idées, nous pouvons concevoir que les liaisons du système soient réalisées par le moyen d'un mécanisme convenable comprenant un certain nombre de pièces mobiles, toutes susceptibles de prendre un mouvement rectiligne, et ne pouvant prendre d'autre mouvement. Ce mécanisme idéal qui relie les différentes pièces au système doit être supposé exempt de frottement, dépourvu d'inertie, et ne pouvant être déformé par l'action des forces appliquées. D'ailleurs ce mécanisme ne sert qu'à aider l'imagination à attribuer une position, une vitesse et une quantité de mouvement à ce qui ne figure dans les recherches de Lagrange que comme quantités purement algébriques.

Désignons par q la position d'une de ces pièces mobiles, définie par sa distance à un point fixe pris sur la ligne droite où elle se meut. Nous distinguerons par les indices 1, 2, ... les valeurs de q, qui correspondent aux différentes pièces. Quand nous nous occuperons d'une

série de quantités correspondant à une seule pièce, nous pourrons supprimer l'indice.

Lorsque les valeurs de toutes les variables (q) sont données, la position de chacune des pièces mobiles est connue, et, en vertu du mécanisme idéal, la configuration de tout le système est déterminée.

Les vitesses.

556. Pendant le mouvement du système, sa configuration change d'une certaine manière définie; et, puisque à chaque instant la configuration du système est entièrement déterminée par les valeurs des variables (q), la vitesse de chacune des parties du système aussi bien que sa configuration seront complètement déterminées si nous connaissons les valeurs des variables (q), et leurs vitesses $\frac{dq}{dt}$, ou, suivant la notation de Newton, $(\dot{q})$.

Les forces.

557. En réglant convenablement le mouvement des variables, on peut produire n'importe quel mouvement compatible avec la nature des liaisons. Pour produire ce mouvement par le déplacement des pièces mobiles, il faut appliquer des forces à ces pièces.

Nous désignerons par F_r la force qui doit être appliquée à une variable q_r. Le système des forces (F) est mécaniquement équivalent, en vertu des liaisons, au système des forces qui produisent effectivement le mouvement.

Les quantités de mouvement.

558. Quand un corps se meut de façon que sa configuration reste toujours la même relativement à la force qui agit sur lui (par exemple quand une force agit sur une molécule isolée suivant la direction de son mouvement), la force motrice a pour mesure l'accroissement de la quantité de mouvement par unité de temps. Si F est la force motrice et p la quantité de mouvement,

$$F = \frac{dp}{dt},$$

d'où

$$p = \int F\, dt.$$

L'intégrale de temps d'une force est appelée l'*impulsion* de cette force :

nous pouvons donc dire que la quantité de mouvement est l'impulsion de la force qui amènerait le corps de l'état de repos à l'état de mouvement considéré.

Dans le cas du mouvement d'un système à liaisons, sa configuration change constamment avec une rapidité qui dépend des vitesses ($\dot{q}$); nous ne pouvons donc plus admettre que sa quantité de mouvement soit l'intégrale de temps de la force qui agit sur lui.

Mais l'accroissement δq d'une variable ne peut être supérieur à $\dot{q}'\,\delta t$, δt étant le temps durant lequel se produit l'accroissement, et $\dot{q}'$ la plus grande valeur de la vitesse pendant ce temps. Dans le cas d'un système partant du repos sous l'influence de forces toujours dirigées dans le même sens, cette vitesse est évidemment la vitesse finale.

Si l'on donne la vitesse et la configuration finales du système, nous pouvons concevoir que sa vitesse ait été communiquée au système en un temps δt très petit, la configuration initiale différant de la quantité finale des quantités δq_1, δq_2, ... inférieures à $\dot{q}_1\,\delta t$, $\dot{q}_2\delta t$, ...

Plus nous supposerons petit l'accroissement de temps δt, plus grandes devront être les forces appliquées, mais l'intégrale de temps ou l'impulsion de chaque force restera finie. La valeur limite de l'impulsion, lorsque le temps décroît et devient nul à la limite, est ce que l'on appelle, par définition, l'impulsion *instantanée;* et la quantité du mouvement p relative à une variable q est définie comme étant l'impulsion relative à cette variable, qui amènerait instantanément le système de l'état de repos à l'état de mouvement considéré.

Cette conception, que les quantités de mouvement peuvent être produites par des impulsions instantanées appliquées à un système en repos, n'est introduite ici que comme moyen de définir la grandeur des quantités de mouvement, puisque les quantités de mouvement du système ne dépendent que de l'état actuel de son mouvement, et non de la manière dont ce mouvement a été produit.

Dans un système à liaisons, la quantité de mouvement relative à une variable quelconque est généralement une fonction linéaire des vitesses de toutes les variables, au lieu d'être, comme dans la dynamique des points matériels, simplement proportionnelle à la vitesse de cette variable.

Les impulsions nécessaires pour faire passer la vitesse d'un système de $\dot{q}_1$, q_2, ... à $\dot{q}'_1$, $\dot{q}'_2$, ... sont évidemment égales à $p'_1 - p_1$, $p'_2 - p_2$, ..., le changement de quantité de mouvement des différentes variables.

Travail d'une petite impulsion.

559. Le travail accompli par la force F_1 pendant l'impulsion est l'intégrale d'espace de la force, ou

$$W = \int F_1 dq_1$$
$$= \int F_1 \dot{q}_1 dt.$$

Si $\dot{q}'_1$ et $\dot{q}''_1$ sont la plus grande et la plus petite valeur de la vitesse $\dot{q}_1$ pendant la durée de l'action de la force, W doit être inférieur à

$$\dot{q}'_1 \int F_1 dt \quad \text{ou} \quad \dot{q}'_1 (p'_1 - p_1)$$

et supérieur à

$$\dot{q}''_1 \int F_1 dt \quad \text{ou} \quad \dot{q}''_1 (p'_1 - p_1).$$

Si maintenant nous supposons que la valeur de l'impulsion diminue sans limites, les valeurs de $\dot{q}'_1$ et $\dot{q}''_1$ tendront vers celle de $\dot{q}_1$ et finalement coïncideront avec elle; et nous pourrons poser $p'_1 - p_1 = \delta p_1$, en sorte que le travail effectué sera finalement

$$\delta W_1 = \dot{q}_1 \delta p_1,$$

c'est-à-dire que *le travail effectué par une très petite impulsion est, à la limite, le produit de l'impulsion par la vitesse.*

Accroissement de l'énergie cinétique.

560. Quand on dépense du travail à mettre en mouvement un système conservatif, on lui communique de l'énergie, et le système devient susceptible d'effectuer contre les résistances une quantité de travail égale avant de rentrer en repos.

On appelle *énergie cinétique* l'énergie que possède un système en vertu de son mouvement: elle lui est communiquée sous la forme du travail effectué par les forces qui le mettent en mouvement.

Si T est l'énergie cinétique du système, et si elle devient $T + \delta T$ par l'action d'une impulsion infiniment petite, dont les composantes sont $\delta p_1, \delta p_2, \ldots$, l'accroissement δT doit être la somme des quantités de travail effectuées par les composantes de l'impulsion, ce qui peut s'écrire

$$(1) \quad \begin{cases} \delta T = \dot{q}_1 \delta p_1 + \dot{q}_2 \delta p_2 + \ldots \\ \qquad = \sum (\dot{q} \delta p). \end{cases}$$

L'état instantané du système est complètement défini, si l'on donne les variables et les quantités de mouvement. Donc, l'énergie cinétique, qui dépend de l'état instantané du système, peut s'exprimer en fonction des variables (q) et des quantités de mouvement (p). C'est là le mode d'expression de T qui a été introduit par Hamilton. Quand T sera exprimé de cette manière, nous la distinguerons par l'indice p, T_p.

La variation complète de T_p est

$$\delta T_p = \sum\left(\frac{dT_p}{dp}\,\delta p\right) + \sum\left(\frac{dT_p}{dq}\,\delta q\right). \tag{2}$$

Le dernier terme peut s'écrire

$$\sum\left(\frac{dT_p}{dp}\,q\,\delta t\right),$$

qui diminue avec δt et finit par s'annuler si l'impulsion devient instantanée.

Donc, égalant les coefficients de δp dans les équations (1) et (2), nous avons

$$q = \frac{dT_p}{dp}, \tag{3}$$

c'est-à-dire que *la vitesse correspondant à la variable q est la dérivée de* T_p *par rapport à la quantité de mouvement correspondante p.*

Nous sommes arrivés à ce résultat en considérant des forces impulsives. Par cette méthode, nous avons évité d'avoir à considérer le changement de configuration qui se produit pendant l'action des forces. Mais l'état instantané du système est le même à tous égards, que le système ait été amené de l'état de repos à l'état de mouvement considéré par l'application pendant un temps très court de forces impulsives, ou qu'il soit arrivé graduellement à cet état de quelque autre manière.

En d'autres termes, les variables et les vitesses, quantités de mouvement et énergie cinétique correspondantes, dépendent de l'état actuel du système à l'instant donné, et non de son histoire antérieure. Donc l'équation (3) s'applique également bien, que l'on considère l'état de mouvement du système comme dû à des forces impulsives, ou à des forces agissant de n'importe quelle autre manière.

Nous pouvons maintenant abandonner la considération des forces impulsives, ainsi que les restrictions faites sur la durée de leur ac-

tion, et sur les changements de configuration qui ont lieu pendant cette action.

Équations du mouvement de Hamilton.

561. Nous avons déjà montré que

$$\frac{d\mathrm{T}_p}{dp} = q. \tag{4}$$

Supposons que le système se meuve d'une manière quelconque, sous les conditions imposées par les liaisons : les variations de p et de q sont

$$\delta p = \frac{dp}{dt}\,\delta t, \qquad \delta q = q\,\delta t; \tag{5}$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{T}_p}{dp}\,\delta p = \dfrac{dp}{dt}\,q\,dt \\ \qquad\qquad = \dfrac{dp}{dt}\,\delta q, \end{cases} \tag{6}$$

et la variation complète de T_p en

$$\begin{cases} \delta \mathrm{T}_p = \sum\left(\dfrac{d\mathrm{T}_p}{dp}\,\delta p + \dfrac{d\mathrm{T}_p}{dq}\,\delta q\right) \\ \qquad = \sum\left[\left(\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{d\mathrm{T}_p}{dq}\right)\delta q\right]; \end{cases} \tag{7}$$

mais l'accroissement d'énergie cinétique est produit par le travail des forces appliquées, ou

$$\delta \mathrm{T}_p = \sum(\mathrm{F}\,\delta q). \tag{8}$$

Dans ces deux expressions, les variations δq sont toutes indépendantes les unes des autres; nous sommes donc en droit d'égaler leurs coefficients dans les expressions (7) et (8). Nous obtenons ainsi

$$\mathrm{F}_r = \frac{dp_r}{dt} + \frac{d\mathrm{T}_p}{dq_r}, \tag{9}$$

où la quantité de mouvement p_r et la force F_r sont relatives à la variable q_r.

Il y a autant d'équations de cette forme que de variables. Ces équations ont été données par Hamilton. Elles montrent que la force correspondant à une variable est la somme de deux parties : la première est l'accroissement de la quantité de mouvement de cette variable par unité de temps; l'autre est l'accroissement de l'énergie cinétique

pour un accroissement d'une unité de la variable, les autres variables et les autres quantités de mouvement restant constantes.

Expression de l'énergie cinétique en fonction des quantités de mouvement et des vitesses.

562. Soient $p_1, p_2, \ldots$ les quantités de mouvement et $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots$ les vitesses à un instant donné; et soient $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots, \dot{\mathrm{q}}_1, \dot{\mathrm{q}}_2, \ldots$ un autre système de quantités de mouvement et de vitesses, tel que

$$p_1 = n\mathrm{p}_1, \qquad \dot{q}_1 = n\dot{\mathrm{q}}_1, \qquad \ldots. \tag{10}$$

Il est clair que les systèmes p, $\dot{\mathrm{q}}$ seront compatibles si les systèmes p, $\dot{q}$ le sont.

Faisons varier n de δn. Le travail accompli par la force F_1 est

$$\mathrm{F}_1\,\delta\mathrm{q}_1 = \dot{\mathrm{q}}_1\,\delta\mathrm{p}_1 = \dot{q}_1 p_1 n\,\delta n. \tag{11}$$

Faisons croître n de 0 à 1 : le système est amené d'un état de repos à un état de mouvement $(\dot{q}p)$, et le travail total dépensé pour produire ce mouvement est

$$(\dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 + \ldots)\int_0^1 n\,dn; \tag{12}$$

mais

$$\int_0^1 n\,dn = \tfrac{1}{2},$$

et le travail dépensé à produire le mouvement est équivalent à l'énergie cinétique. Donc

$$\mathrm{T}_{p\dot{q}} = \tfrac{1}{2}(p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + \ldots), \tag{13}$$

où $\mathrm{T}_{p\dot{q}}$ désigne l'énergie cinétique exprimée en fonction des quantités de mouvement et des vitesses, les variables q_1, q_2 n'entrant pas dans cette expression.

L'énergie cinétique est donc la demi-somme des produits des quantités de mouvement par les vitesses correspondantes.

Nous désignerons par la notation $\mathrm{T}_{p\dot{q}}$ l'énergie cinétique exprimée de cette manière. C'est une fonction des quantités de mouvement et des vitesses, qui ne renferme pas les variables elles-mêmes.

563. Il y a, pour exprimer l'énergie cinétique, une troisième méthode que d'habitude on regarde même comme la méthode fonda-

mentale. En résolvant les équations (3), nous pouvons exprimer les quantités de mouvement en fonction des vitesses, et, introduisant ces valeurs dans (13), nous aurons une expression de T qui ne comprendra que les variables et les vitesses. Nous désignerons par la notation $T_{\dot{q}}$ cette expression de T. C'est sous cette forme que l'énergie cinétique est exprimée dans les équations de Lagrange.

564. Il est clair que, puisque T_p, T_q et $T_{p\dot{q}}$ sont trois expressions d'une même chose,

$$T_p + T_{\dot{q}} - 2T_{p\dot{q}} = 0$$

ou bien

$$T_p + T_{\dot{q}} - p_1 q_1 - p_2 q_2 - \ldots = 0. \tag{14}$$

Donc, si l'on fait varier toutes les quantités p, q et $\dot{q}$, on a

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dT_p}{dp_1} - q_1\right)\ \delta p_1 + \left(\frac{dT_p}{dp_2} - q_2\right)\ \delta p_2 + \ldots \\ &+ \left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} - p_1\right)\ \delta\dot{q}_1 + \left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2} - p_2\right)\ \delta\dot{q}_2 + \ldots \\ &+ \left(\frac{dT_p}{dq_1} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}\right)\delta q_1 + \left(\frac{dT_p}{dq_2} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_2}\right)\delta q_2 + \ldots = 0. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Les variations de δp ne sont pas indépendantes de celles de δq et de $\delta\dot{q}$, de sorte que nous ne pouvons pas affirmer d'emblée que le coefficient de chacune de ces variations est nul. Mais nous savons, par les équations (3), que

$$\frac{dT_p}{dp_1} - q_1 = 0, \quad \ldots, \tag{16}$$

de sorte que les termes qui renferment les variations δp sont nuls identiquement.

Quant aux variations restantes δq et $\delta\dot{q}$, elles sont toutes indépendantes; nous trouvons donc, en égalant à zéro les coefficients de $\delta\dot{q}_1, \ldots$,

$$p_1 = \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1}, \qquad p_2 = \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2}, \qquad \ldots, \tag{17}$$

c'est-à-dire que *les composantes de la quantité de mouvement sont les dérivées de* $T_{\dot{q}}$ *par rapport aux vitesses correspondantes.*

En égalant à zéro les coefficients de $\delta q, \ldots$, on a

$$\frac{dT_p}{dq_1} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1} = 0, \tag{18}$$

c'est-à-dire que *la dérivée de* T *par rapport à une variable quelconque conserve la même valeur, mais change de signe suivant que l'on exprime* T *en fonction des vitesses ou en fonction des quantités du mouvement.*

En vertu des équations (18), les équations du mouvement (9) peuvent s'écrire

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} - \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1} \tag{19}$$

ou

$$F_1 = \frac{d}{dt}\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} - \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}, \tag{20}$$

ce qui est la forme sous laquelle les équations du mouvement ont été données par Lagrange.

565. Dans l'étude qui précède, nous avons évité de considérer la forme de la fonction qui exprime l'énergie cinétique en fonction des vitesses ou des quantités de mouvement. La seule forme explicite que nous ayons énoncée de l'énergie cinétique est

$$T_{p\dot{q}} = \tfrac{1}{2}(p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + \ldots), \tag{21}$$

dans laquelle elle est exprimée par la demi-somme des produits des quantités de mouvement par les vitesses correspondantes.

Nous pouvons exprimer les vitesses en fonction de la dérivée de T_p par rapport aux quantités de mouvement, comme dans l'équation (3).

$$T_p = \tfrac{1}{2}\left(p_1\frac{dT_p}{dp_1} + p_2\frac{dT_p}{dp_2} + \ldots\right). \tag{22}$$

Ceci nous montre que T_p est une fonction homogène et du second degré des quantités de mouvement $p_1, p_2, \ldots$.

Nous pouvons aussi exprimer les quantités de mouvement en fonction de $T_{\dot{q}}$, et nous trouvons

$$T_{\dot{q}} = \tfrac{1}{2}\left(\dot{q}_1\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1} + \dot{q}_2\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_2} + \ldots\right), \tag{23}$$

ce qui montre que $T_{\dot{q}}$ est une fonction homogène et du second degré des vitesses $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots$.

Si nous posons

$$P_{11} = \frac{d^2T_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1^2}, \qquad P_{12} = \frac{d^2T_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1 d\dot{q}_2}, \qquad \ldots,$$

et

$$Q_{11} = \frac{d^2 T_p}{dp_1^2}, \qquad Q_{12} = \frac{d^2 T_p}{dp_1 dp_2}, \quad \ldots,$$

comme T_q et T_p sont des fonctions du second degré, l'une des q, l'autre des p, les P et les Q seront des fonctions des variables q seulement et seront indépendantes des vitesses et des quantités de mouvement. Nous obtenons ainsi les expressions de T

$$2T_q = P_{11} q_1^2 + 2 P_{12} q_1 q_2 + \ldots, \tag{24}$$

$$2T_p = Q_{11} p_1^2 + 2 Q_{12} p_1 p_2 + \ldots. \tag{25}$$

Les quantités de mouvement sont exprimées en fonction des vitesses par les équations linéaires

$$p_1 = P_{11} q_1 + P_{12} q_2 + \ldots. \tag{26}$$

et les vitesses sont exprimées en fonction des quantités de mouvement par les équations linéaires

$$q_1 = Q_{11} p_1 + Q_{12} p_2 + \ldots. \tag{27}$$

Dans les Traités sur la dynamique des corps solides, on appelle *moments d'inertie* les coefficients tels que P_{11}, pour lesquels les deux indices sont les mêmes, et *produits d'inertie* les coefficients tels que P_{12} pour lesquels les deux indices sont différents. Nous pouvons étendre ces noms au cas plus général qui nous occupe en ce moment, où ces quantités ne sont plus absolument constantes, comme dans le cas d'un corps solide, mais où elles sont des fonctions des variables $q_1, q_2, \ldots$.

De même, nous pouvons appeler *moments de mobilité* les produits de la forme Q_{11} et *produits de mobilité* ceux de la forme Q_{12}. Mais nous n'aurons pas souvent occasion de parler des coefficients de mobilité.

566. L'énergie cinétique du système est une quantité nulle ou essentiellement positive. Donc, qu'elle soit exprimée en fonction des vitesses ou en fonction des quantités de mouvement, les coefficients doivent être tels qu'aucune valeur réelle des variables ne puisse rendre T négatif.

De ce fait, il y a une série de conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire les coefficients P. Ces conditions sont les suivantes :

Les quantités $P_{11}, P_{22}, \ldots$ doivent être toutes positives.

Les $(n-1)$ déterminants formés successivement avec le déterminant

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2n} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & P_{n3} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix},$$

en supprimant les termes ayant l'indice 1, puis ayant les indices 1 ou 2, et ainsi de suite, doivent être tous positifs.

Donc le nombre des conditions pour n variables sera $(2n-1)$.

Les coefficients Q sont soumis à des conditions de même nature.

567. Dans cet exposé des principes fondamentaux de la Dynamique d'un système à liaisons, nous avons laissé de côté le mécanisme par lequel sont reliées les parties du système; nous n'avons pas même posé d'équations indiquant comment le mouvement d'une partie quelconque du système dépend des variations des variables. Nous n'avons porté notre attention que sur les variables, leurs vitesses, leurs quantités de mouvement et les forces qui sont appliquées aux pièces qui représentent les variables. Nos seules hypothèses sont que les liaisons soient telles que le temps ne figure pas explicitement dans les équations de conditions, et que le principe de la conservation de l'énergie soit applicable au système.

Cet exposé des méthodes de la Dynamique pure n'est pas inutile: car Lagrange et la plupart de ses successeurs, auxquels nous devons ces méthodes, se sont généralement bornés à les démontrer, et, pour porter toute leur attention sur les symboles figurant dans leurs équations, ils se sont efforcés de bannir toute autre idée que celle de quantité, non seulement se dispensant des représentations figurées, mais encore éliminant les idées de vitesse, de quantité de mouvement et d'énergie, remplacées une fois pour toutes par des symboles dans les équations primitives. C'est pour avoir le moyen de nous reporter aux résultats de cette analyse en employant le langage ordinaire de la Dynamique, que nous nous sommes efforcé de traduire les principaux résultats de cette méthode en des termes intelligibles sans l'usage de symboles.

C'est le développement des idées et des méthodes des Mathématiques pures qui a permis de former une théorie mathématique de la Dynamique et de mettre ainsi en lumière bien des vérités que l'on n'aurait pu découvrir sans cette éducation mathématique; et si nous

voulons former des théories dynamiques des autres sciences, il faut que notre esprit soit imbu de ces vérités dynamiques aussi bien que de méthodes mathématiques.

Quand nous créons les idées et le langage d'une science qui, comme l'Électricité, s'occupe de forces et des effets de ces forces, nous devons avoir constamment présentes à l'esprit les notions de la science fondamentale de la Dynamique, de manière à éviter, pendant le premier développement de la Science, ce qui serait en désaccord avec les principes déjà établis; de manière aussi que, nos idées devenant plus claires, le langage adopté nous soit un secours et non une gêne.

NOTE

Relative aux équations de Lagrange.

PAR M. A. POTIER.

Maxwell fait suffisamment ressortir, dans les §§ 554 et 567, les motifs qui l'ont guidé dans le choix de sa méthode d'exposition, pour qu'il soit utile d'en faire remarquer les avantages. Cette méthode oblige à passer par les équations d'Hamilton pour arriver à celles de Lagrange, les seules dont il soit fait usage dans le développement ultérieur de la théorie; elle exige, de plus, de la part du lecteur, un effort profitable, il est vrai, mais pénible. L'exposé de la méthode de Lagrange, qui déduit directement ces équations du principe de d'Alembert, rendra ce travail plus facile. Maxwell reconnaît, d'ailleurs, « qu'il est important que le lecteur sache suivre la relation qui existe entre le mouvement de chaque partie du système et le mouvement des coordonnées ».

L'équation fondamentale de la Dynamique est

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right),$$

dans laquelle δx, δy, δz représentent les composantes d'un déplacement virtuel, compatible avec les liaisons du système. Si les points matériels du système ne sont pas complètement libres, il existe des relations nécessaires entre leurs coordonnées, et celles-ci peuvent s'exprimer en fonction d'un nombre moindre de variables indépendantes $q_1, q_2, \ldots$, dont le nombre est le degré de liberté du système. On supposera ces relations indépendantes du temps, et, les x, y, z étant ainsi exprimés, les composantes d'un déplacement quelconque possible seront

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots;$$

dans ces équations, les δq sont entièrement arbitraires.

Si l'on substitue les valeurs de $\delta x, \ldots$ dans l'équation fondamentale, celle-ci devient une relation linéaire entre les δq, qui doit être satisfaite quels que soient ceux-ci; leurs coefficients doivent donc être nuls, ce qui donne autant d'équations que de variables indépendantes. En égalant à zéro le coefficient de δq, par exemple, on aura

$$\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right),$$

équation où les coordonnées doivent être exprimées en fonction des q, lesquels sont des fonctions du temps. Le premier nombre qu'on désignera par F_1 est supposé connu en fonction des variables q; quant au second, Lagrange remarque qu'on peut l'écrire

$$\Sigma \frac{d}{dt} m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)$$
$$-\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)$$

et calcule chacun de ces termes; or le second est

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right];$$

de sorte que si T est la demi-force vive, ou énergie cinétique du système, qu'on l'exprime en fonction des $\frac{dq}{dt}=\dot{q}$, en substituant à $\frac{dx}{dt}$ sa valeur

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2+\ldots,$$

ainsi que les valeurs correspondantes de $\frac{dy}{dt}$ et de $\frac{dz}{dt}$, de manière à mettre T sous la forme d'un polynôme du second degré en $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots$, dont les coefficients sont fonctions des q, on pourra écrire

$$\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial T_q}{\partial q_1},$$

en désignant par T_q cette forme donnée à la valeur de T.

Le premier terme de ce second membre s'exprime aussi simplement au moyen de l'expression T_q; en effet, la dérivée $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$ de ce polynôme, par rapport à $\dot{q}$, est la somme des dérivées des termes $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \ldots$, qui, pour chacun, est le produit de $m\frac{dx}{dt}$ par le coefficient de $\dot{q}$, dans le développement de $\frac{dx}{dt}$ en fonction des $\dot{q}$; par suite,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right),$$

et l'on aura

$$F_1=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial T}{\partial q_1}$$

ou l'équation de Lagrange.

Maxwell, après Thomson et Tait, donne le nom de *force* correspondant à la variable q_1 à F_1. On peut la définir ainsi : $F_1\delta q_1$ est le travail des forces appliquées au système quand q_1 varie de δq_1; les autres variables ne changeant pas. Il donne le nom de *quantité de mouvement* (ou *momentum*) à $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$, qu'il représente, avec Hamilton, par p_1; généralisation justifiée, car, si la composante $\frac{dx}{dt}=\dot{x}$ de la vitesse d'un des points d'un système libre augmente de $d\dot{x}$, l'énergie

cinétique augmente de $m\dot{x}d\dot{x}$, et la quantité de mouvement suivant la direction x est $\frac{dT}{d\dot{x}}$, expression semblable à la précédente. Il faut noter que, si le système est parti du repos, $\int_0^t F_1 dt$ diffère de p_1 ou $\frac{dT}{dq_1}$ de la quantité $\int_0^t \frac{\partial T}{\partial q_1} dt$, qui diminue indéfiniment avec le temps t; de sorte que p_1 représente l'impulsion *instantanée* correspondant à la variable q_1 et qu'il faudrait associer aux impulsions $p_2, p_3, \ldots$, pour amener le système de l'état de repos à son état actuel, et non l'impulsion réelle.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DYNAMIQUE DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME.

568. Nous avons montré, au § 552, que quand un courant électrique existe dans un circuit conducteur, il est susceptible d'effectuer une certaine quantité de travail mécanique, et cela, indépendamment de toute force électromotrice extérieure entretenant le courant. Or la capacité d'effectuer du travail, d'où qu'elle vienne, n'est autre que de l'énergie, et toutes les énergies sont de même espèce, quoiqu'elles puissent différer par la forme. L'énergie du courant électrique est ou bien de la forme qui consiste dans le mouvement actuel de la matière, ou bien de cette autre qui réside en la faculté de pouvoir être mis en mouvement sous l'influence de forces agissant entre des corps placés dans de certaines positions relatives.

La première sorte d'énergie, celle du mouvement, est appelée *énergie cinétique,* et, dès qu'on l'a une fois comprise, elle semble un fait si primordial dans la nature, que l'on a peine à concevoir la possibilité de la réduire à quelque autre. La seconde sorte d'énergie, celle qui dépend de la position, est appelée *énergie potentielle;* elle est due à l'action de ce que nous appelons des *forces,* c'est-à-dire à des tendances à un changement de position relative. Pour ce qui est de ces forces, nous pouvons admettre leur existence comme un fait démontré; mais il nous faut toujours convenir que toute explication du mécanisme, par lequel les corps sont mis en mouvement, constitue un réel accroissement de nos connaissances.

569. On ne peut concevoir le courant électrique que comme un phénomène cinétique. Faraday même, qui s'efforça toujours de soustraire son esprit à l'influence des idées auxquelles on n'est que trop entraîné par l'emploi des mots tels que *courant électrique, fluide électrique,* parle du courant électrique comme de « quelque chose de progressif qui ne consiste pas seulement en un arrangement » (1).

Les effets du courant, tels que l'électrolyse et le transport de l'élec-

(1) *Exp. Res.*, 283.

trisation d'un corps à un autre, sont tous des actions progressives qui demandent du temps pour s'accomplir et qui, par suite, sont de la nature des mouvements.

Quant à la vitesse du courant, nous avons montré que nous n'en savons rien, pas plus si elle est de $\frac{1}{10}$ de pouce par heure que de cent mille milles par seconde (1). Tant s'en faut que nous connaissions sa valeur absolue en un cas quelconque, que nous ignorons même si ce que nous appelons *direction positive* est, en réalité, la direction du mouvement ou si c'est la direction contraire.

Tout ce que nous admettons ici, c'est que le courant électrique implique un mouvement de quelque nature. La cause des mouvements électriques, nous l'avons appelée *force électromotrice :* depuis longtemps ce mot est employé avec avantage, et jamais il n'a conduit à aucune contradiction dans le langage scientifique. On doit toujours entendre que la force électromotrice agit sur l'électricité seulement, et non sur les corps dans lesquels cette électricité réside; on ne doit jamais la confondre avec la force mécanique ordinaire qui agit sur les corps, et non sur l'électricité qu'ils renferment. Si jamais nous parvenons à connaître la nature de la relation qui existe entre l'électricité et la matière ordinaire, nous connaîtrons probablement aussi la relation de la force électromotrice et de la force ordinaire.

570. Quand une force ordinaire agit sur un corps et que ce corps cède à son action, le travail effectué par la force a pour mesure le produit de la force par la grandeur du déplacement du corps. Ainsi, si l'on refoule de l'eau à travers un tuyau, le travail effectué dans une section quelconque a pour mesure le produit de la pression du liquide en cette section par la quantité d'eau qui traverse la section.

De même, le travail d'une force électromotrice a pour mesure le produit de la force électromotrice par la quantité d'électricité qui traverse une section du conducteur sous l'action de cette force électromotrice.

Le travail effectué par une force électromotrice est exactement de la même nature que celui d'une force ordinaire, et se mesure avec les mêmes étalons ou unités.

Une partie du travail que fait une force électromotrice agissant dans un circuit conducteur est dépensée à vaincre la résistance du circuit, et cette partie du travail se convertit en chaleur. Une autre

(1) *Exp. Res.*, 1618.

partie est dépensée à produire les phénomènes électromagnétiques observés par Ampère, dans lesquels des conducteurs se meuvent sous l'influence de forces électromagnétiques. Le reste du travail est dépensé à accroître l'énergie cinétique du courant, et les effets de cette dernière partie s'aperçoivent dans les phénomènes des courants induits observés par Faraday.

Nous en savons donc assez sur le courant électrique pour reconnaître dans un système de conducteurs matériels traversés par des courants un système dynamique qui est le siège d'énergie, en partie cinétique, et en partie potentielle.

Nous ne connaissons pas la nature des liaisons qui existent entre les parties de ce système; mais nous avons en dynamique des méthodes de recherche qui n'exigent pas la connaissance du mécanisme du système, et nous allons les appliquer à ce cas.

Nous examinerons d'abord quelles conséquences résulteraient de l'hypothèse que la fonction qui exprime l'énergie cinétique du système a la forme la plus générale.

571. Soit un système consistant en un certain nombre de circuits conducteurs, dont la forme et la position sont déterminées par les valeurs d'un système de variables $x_1, x_2, \ldots$, dont le nombre est égal au nombre des degrés de liberté du système.

Si toute l'énergie cinétique du système était due au mouvement de ces conducteurs, elle serait exprimée par

$$T = \tfrac{1}{2}(x_1x_1)\dot{x}_1^2 + \ldots + (x_1x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2 + \ldots,$$

où les symboles $(x_1x_1)\ldots$ représentent les quantités que nous avons appelées *moments d'inertie,* et les symboles $(x_1x_2)\ldots$ les quantités dites *produits d'inertie.*

Si X′ est la force motrice tendant à accroître la coordonnée x, qui est nécessaire pour produire le mouvement actuel, d'après l'équation de Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = X'.$$

Quand T désignera l'énergie due au mouvement visible seulement, nous l'indiquerons par l'indice $m = T_m$.

Mais une partie de l'énergie cinétique d'un système de conducteurs traversés par des courants électriques est due à l'existence de ces courants. Soit une autre série de coordonnées $y_1, y_2, \ldots$ déterminant le mouvement de l'électricité et tous les autres mouvements qui

dépendent de celui de l'électricité; T sera une fonction homogène des carrés et des produits de toutes les vitesses des deux séries de coordonnées. Nous pouvons donc diviser T en trois parties : dans la première, T_m, ne figureront que les vitesses des coordonnées x; dans la seconde, T_e, les vitesses des coordonnées y seulement; dans la troisième, T_{me}, chaque terme est formé du produit des vitesses d'une coordonnée x et d'une coordonnée y.

Nous avons donc

$$T = T_m + T_e + T_{me},$$

où

$$\begin{aligned} T_m &= \tfrac{1}{2}(x_1x_1)\dot{x}_1^2 + \ldots + (x_1x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2 + \ldots, \\ T_e &= \tfrac{1}{2}(y_1y_1)\dot{y}_1^2 + \ldots + (y_1y_2)\dot{y}_1\dot{y}_2 + \ldots, \\ T_{me} &= (x_1y_1)\dot{x}_1\dot{y}_1 + \ldots. \end{aligned}$$

572. Dans la théorie dynamique générale, les coefficients de tous les termes peuvent être des fonctions de toutes les coordonnées x et y. Dans le cas des courants électriques, il est aisé de voir que les coordonnées de l'espèce y ne figurent pas dans les coefficients.

En effet, si l'on maintient tous les courants électriques constants et tous les conducteurs en repos, l'état total du champ reste constant : or, dans ce cas, les coordonnées y sont variables, quoique les vitesses $\dot{y}$ soient constantes; donc ces coordonnées y ne peuvent intervenir ni dans l'expression de T, ni dans aucune autre expression de l'état actuel du système.

En outre, en vertu de l'équation de continuité, si tous les conducteurs sont des circuits linéaires, il ne faut qu'une seule variable pour exprimer l'intensité du courant dans chacun d'eux. Supposons que les vitesses $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots$ représentent les intensités des courants dans les divers conducteurs.

Tout cela serait vrai si, au lieu de courants électriques, nous avions des courants d'un fluide incompressible, circulant dans des tubes flexibles : les vitesses des courants interviendraient dans l'expression de T, mais les coefficients ne dépendraient que des variables x qui déterminent la forme et la position des tubes.

Mais, dans ce cas, le mouvement du fluide dans un tube n'a d'action directe sur le mouvement ni d'un autre tube ni du fluide qui s'y trouve renfermé. Donc, dans la valeur de T_e ne figurent que les carrés des vitesses $\dot{y}$ et non leurs produits, et dans T_{me} une vitesse $\dot{y}$ ne se trouve associée qu'aux vitesses de forme $\dot{x}$ qui sont relatives au même tube.

Nous savons que, dans le cas des courants électriques, il n'y a plus

lieu de faire ces restrictions, puisque les courants des divers circuits réagissent les uns sur les autres. Nous devons donc admettre l'existence de termes de la forme $\dot{y}_1 \dot{y}_2$, ce qui implique l'existence d'une certaine chose en mouvement, dont le mouvement dépend de l'intensité des deux courants électriques $\dot{y}_1$ et $\dot{y}_2$. Cette matière mobile, quelle qu'elle soit, n'est pas renfermée à l'intérieur des conducteurs où circulent les deux courants, mais s'étend probablement dans tout l'espace qui les entoure.

573. Considérons maintenant la forme que prennent, dans ce cas, les équations de Lagrange. Soit X' la force motrice correspondant à l'une des variables x qui déterminent la forme et la position des circuits conducteurs. C'est là une force, au sens ordinaire du mot, une tendance à un changement de position. Elle est donnée par l'équation

$$X' = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Nous pouvons regarder cette force comme formée de trois parties correspondant à chacune des trois parties en lesquelles on peut partager l'énergie cinétique du système et que nous désignerons par les mêmes indices.

$$X' = X'_m + X'_e + X'_{me}.$$

La partie X'_m est celle qui dépend de considérations dynamiques ordinaires, et nous n'avons pas besoin de nous y arrêter.

Puisque T_e ne renferme pas $\dot{x}$, le premier terme de X'_e est nul et sa valeur se réduit à

$$X'_e = -\frac{\partial T_e}{\partial x}.$$

Telle est l'expression de la force mécanique qui doit être appliquée à un conducteur pour faire équilibre à la force électromagnétique : nous voyons qu'elle a pour mesure la *diminution* de l'énergie purement électrocinétique par unité de variation de la variable x. La force électromagnétique X_e, qui met en jeu cette force mécanique extérieure, est égale et opposée à X'_e et, par suite, a pour mesure l'accroissement d'énergie électrocinétique par unité de variation de la variable x. Puisque la valeur de X_e dépend des carrés et des produits de courants, elle reste la même si l'on renverse le sens de tous les courants.

La troisième partie de X′ est

$$X'_{me} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T_{me}}{\partial x}.$$

La quantité T_{me} ne renferme que des produits de la forme $\dot{x}\dot{y}$, de sorte que $\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{x}}$ est une fonction linéaire des intensités des courants $\dot{y}$. Le premier terme dépend donc de la variation de l'intensité des courants dans l'unité de temps, et indique une force mécanique agissant sur le conducteur, laquelle est nulle quand le courant est constant, et positive ou négative suivant que le courant augmente ou diminue d'intensité.

Le second terme dépend, non de la variation des courants, mais de leur intensité actuelle. Puisque c'est une fonction linéaire de ces courants, il change de signe quand les courants changent de signe; et, puisque chaque terme renferme une vitesse $\dot{x}$, il est nul quand les conducteurs sont en repos. Il y a aussi des termes dus à la variation dans le temps des coefficients de $\dot{y}$ dans $\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{x}}$: ces remarques s'appliquent aussi à eux.

Nous pouvons donc étudier ces termes séparément : si les conducteurs sont en repos, nous n'avons affaire qu'au premier terme; si les courants sont constants, nous n'avons que le second.

574. Comme il est très important de déterminer si une partie de l'énergie cinétique est de la forme T_{me}, qui consiste en produits des vitesses proprement dites des conducteurs par les intensités des courants électriques, il est à désirer que les expériences soient faites, à ce sujet, avec le plus grand soin.

Il est difficile de déterminer les forces qui agissent sur un corps animé d'un mouvement rapide. Examinons donc le premier terme, qui dépend de la variation d'intensité du courant.

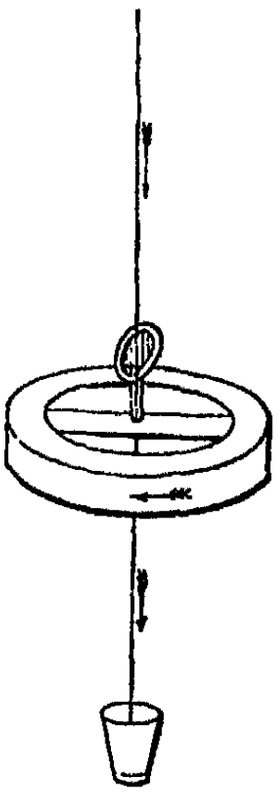
Si une partie quelconque de l'énergie cinétique dépend du produit d'une vitesse ordinaire par l'intensité d'un courant, il sera, sans doute, plus aisé de l'observer lorsque la vitesse et le courant seront de même sens ou de sens contraire. Prenons donc une bobine d'un grand nombre de tours, suspendons-la par un fil vertical fin, de façon que ses spires soient horizontales et que la bobine puisse tourner autour d'un axe vertical, soit dans le sens du courant, soit en sens contraire.

Supposons que le courant pénètre dans la bobine par le fil de suspension et que, après avoir suivi les spires, il complète son circuit en

s'échappant de haut en bas le long d'un fil placé sur le prolongement du fil de suspension et plongeant dans un godet de mercure.

Quand le courant traverse cette bobine, la composante horizontale du magnétisme terrestre tendrait à la faire tourner autour d'un axe horizontal; nous supposerons donc que cette composante horizontale

Fig. 33.



ait été exactement compensée au moyen d'aimants fixes ou que l'expérience se fasse au pôle magnétique. Un miroir vertical est fixé à la bobine, afin de signaler tout mouvement en azimut.

Faisons maintenant passer un courant dans la bobine dans le sens nord-est-sud-ouest. Si l'électricité était un fluide semblable à de l'eau, coulant le long du fil, au moment de l'émission du courant et pendant que sa vitesse augmente, il faudrait l'action d'une force pour communiquer sa quantité de mouvement angulaire au fluide qui circule autour de la bobine, et, comme elle doit forcément être fournie par l'élasticité du fil de suspension, la bobine devrait tourner d'abord en sens inverse, soit ouest-sud-est-nord, ce que l'on observera au moyen du miroir. A l'arrêt du courant, il y aurait un autre mouvement du miroir, dans le sens du courant, cette fois.

On n'a, jusqu'à ce jour, observé aucun phénomène de ce genre. Si

une pareille action existait, on la distinguerait aisément des autres actions déjà connues du courant par les particularités suivantes :

1° Elle ne se manifesterait que quand la force de courant varie, et quand on établit ou que l'on rompt le contact, mais non quand le courant est constant.

Toutes les actions *mécaniques* connues du courant dépendent de son intensité, et non des variations de cette intensité; et quant à l'action électromotrice, dans le cas des courants induits, elle ne saurait être confondue avec cette action électromagnétique.

2° Le sens de cette action changerait quand on renverserait le sens de tous les courants du champ.

Toutes les actions mécaniques connues des courants restent les mêmes lorsque l'on renverse le sens de tous les courants, puisqu'elles ne dépendent que des carrés ou des produits de ces courants.

Si l'on découvrait une action de cette nature, nous pourrions considérer comme une véritable substance l'une de ces deux choses que nous appelons *espèces d'électricité*, la positive ou la négative, et nous pourrions définir le courant électrique comme un véritable mouvement de cette substance dans une direction déterminée. En fait, si les mouvements électriques étaient, à un degré quelconque, comparables à ceux de la matière ordinaire, il y aurait des termes de la forme T_{me}, et leur existence serait manifestée par la force mécanique X_{me}.

Avec l'hypothèse de Fechner, suivant lequel le courant électrique consiste en deux courants égaux d'électricité positive et négative circulant en sens contraires dans le même conducteur, les termes de la seconde classe T_{me} disparaîtraient, chaque terme relatif à un courant positif correspondant à un terme égal et de signe contraire relatif au courant négatif, et les phénomènes dus à l'existence des termes T_{me} ne se manifesteraient pas.

Il me semble toutefois que si la connaissance des nombreuses analogies qui existent entre le courant électrique et un courant d'un fluide matériel doit nous être d'un grand avantage, nous devons surtout éviter avec soin de faire aucune hypothèse qui ne soit confirmée par des preuves expérimentales. Or, nous n'avons, jusqu'à ce jour, aucune preuve expérimentale qui nous montre si le courant électrique est réellement un courant de substance matérielle, ou si c'est un courant double, ou si sa vitesse mesurée en pieds par seconde est grande ou petite.

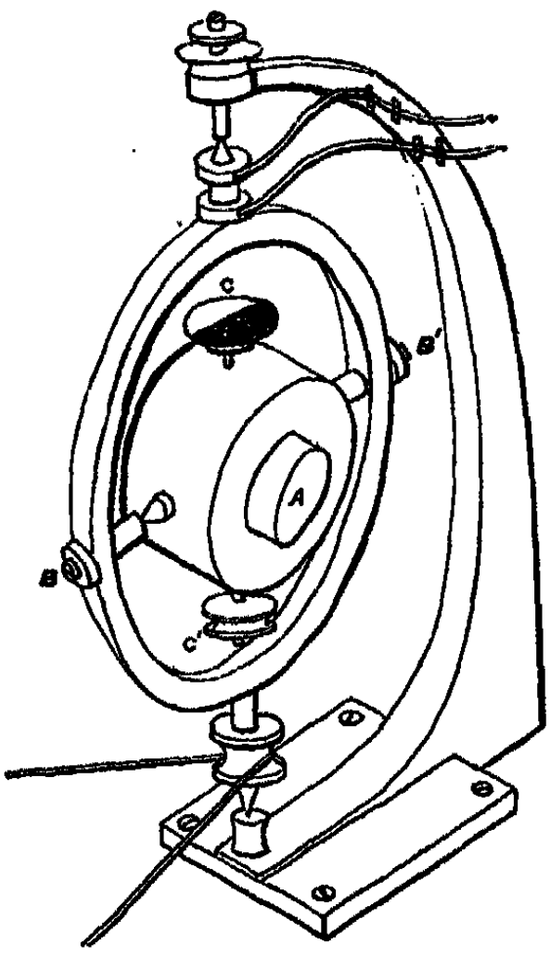
Connaître ces choses, ce serait tout au moins commencer de créer

une théorie dynamique complète de l'électricité, où l'action électrique ne serait plus considérée, comme dans ce Traité, comme un phénomène dû à une cause inconnue et soumis seulement aux lois générales de la Dynamique, mais comme le résultat des mouvements connus de masses matérielles connues, et où l'on étudierait non plus seulement l'effet total et les résultats finaux, mais encore tout le mécanisme intermédiaire et tous les détails du mouvement.

575. L'étude expérimentale du second terme de X_{me}, à savoir $\frac{dT_{me}}{dx}$, est plus difficile, car elle implique l'observation des effets de forces agissant sur un corps animé d'un mouvement rapide.

L'appareil représenté à la *fig.* 34, que j'ai fait construire en 1861,

Fig. 34.



est destiné à vérifier s'il existe une force de ce genre.

L'électro-aimant A peut tourner autour d'un axe horizontal BB', à l'intérieur d'une bague tournant elle-même autour d'un axe vertical.

Soient A, B, C les moments d'inertie de l'électro-aimant autour de l'axe de la bobine, de l'axe horizontal BB′ et d'un troisième axe perpendiculaire aux deux premiers CC′.

Soient θ l'angle que fait CC′ avec la verticale, φ l'azimut de l'axe BB′, et ψ une variable de laquelle dépend le mouvement de l'électricité dans la bobine.

L'énergie cinétique de l'électro-aimant peut s'écrire

$$2T = A\phi^2 \sin^2\theta + B\dot{\theta}^2 + C\phi^2 \cos^2\theta + E(\phi \sin\theta + \dot{\psi})^2,$$

où E est une quantité que l'on peut appeler le *moment d'inertie* de l'électricité dans la bobine.

Si Θ est le moment des forces motrices qui tendent à accroître θ, nous avons, par les équations de la Dynamique,

$$\Theta = B\frac{d^2\theta}{dt^2} - [(A - C)\phi^2 \cos\theta \sin\theta + E\phi \cos\theta(\phi \sin\theta + \dot{\psi})].$$

En égalant à o la force motrice Ψ qui tend à accroître ψ, nous avons

$$\phi \sin\theta + \dot{\psi} = \gamma,$$

γ étant une constante que l'on peut considérer comme représentant l'intensité du courant dans la bobine.

Si C est un peu plus grand que A, Θ sera nul, et l'équilibre autour de l'axe BB′ sera stable si

$$\sin\theta = \frac{E\gamma}{(C - A)\phi}.$$

Cette valeur de θ dépend de celle de γ, l'intensité du courant; elle est positive ou négative, suivant le sens du courant.

Le courant est envoyé dans la bobine par l'intermédiaire des pivots B et B′, qui sont reliés à la pile par des ressorts frottant sur des bagues métalliques montées sur l'axe vertical.

Pour déterminer la valeur de θ, on place en C un morceau de papier divisé, suivant un diamètre, en deux parties qui sont peintes, l'une en rouge et l'autre en vert. Quand l'instrument est en mouvement, si θ est positif, on voit en C un cercle rouge dont le rayon indique grossièrement la valeur de θ; si θ est négatif, on voit en C un cercle vert.

Au moyen d'écrous mobiles sur des vis fixées à l'électro-aimant, on obtient un réglage tel que l'axe CC′ soit un axe principal, relativement

auquel le moment d'inertie est à peine supérieur au moment d'inertie relatif à l'axe A. De la sorte, on rend l'instrument très sensible à l'action de la force, si elle existe.

La plus grande difficulté dans ces expériences tient à l'action perturbatrice de la force magnétique terrestre, qui fait fonctionner l'électro-aimant comme une aiguille d'inclinaison. C'est pourquoi les résultats obtenus ont été très grossiers; toutefois, on ne peut obtenir aucun indice d'une variation de θ, même en plaçant dans la bobine un noyau de fer, de manière à en faire un électro-aimant puissant.

Si donc un aimant contient de la matière animée d'une rotation rapide, la quantité de mouvement angulaire de cette matière doit être bien faible relativement à toutes les quantités que nous pouvons mesurer; et, jusqu'à présent, nous n'avons obtenu aucun indice de l'existence des termes T_{mc} au moyen de leur effet mécanique.

576. Considérons maintenant les forces qui agissent sur les courants électriques, c'est-à-dire les forces électromotrices.

Soit Y la force électromotrice effective due à l'induction : la force électromotrice extérieure qui doit agir sur le circuit pour lui faire équilibre est $Y' = -Y$ et, par l'équation de Lagrange,

$$Y = -Y' = -\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{y}} + \frac{dT}{dy}.$$

Puisque dans T il n'y a point de terme qui renferme la coordonnée y, le second terme est nul et Y se réduit à son premier terme. Donc il ne peut exister de force électromotrice dans un système en repos et traversé par des courants constants.

Divisons, comme plus haut, Y en trois parties : Y_m, Y_e et Y_{mc} correspondant aux trois parties de T; puisque T_m ne renferme pas $\dot{y}$, Y_m doit être nul.

Nous trouvons ainsi

$$Y_e = -\frac{d}{dt}\frac{dT_e}{d\dot{y}},$$

Ici $\frac{dT_e}{d\dot{y}}$ est une fonction linéaire des intensités, et cette partie de la force électromotrice est égale à la variation de cette fonction par unité de temps. C'est là la force électromotrice d'induction, découverte par Faraday, que nous examinerons plus loin en détail.

577. De la partie de T qui dépend des produits des vitesses et des

intensités, nous tirons

$$Y_{me} = -\frac{d}{dt}\frac{dT_{me}}{dy}.$$

Or $\frac{dT_{me}}{dy}$ est une fonction linéaire des vitesses des conducteurs. Si donc les termes de T_{me} avaient une existence réelle, il serait possible de déterminer une force électromotrice, indépendamment de tout courant existant, simplement en faisant varier la vitesse des conducteurs. Par exemple, dans le cas de la bobine suspendue du § 559, la bobine, d'abord en repos, étant soudainement mise en mouvement autour de l'axe vertical, une force électromotrice entrerait en jeu, qui serait proportionnelle à l'accélération du mouvement, s'annulerait si le mouvement devenait uniforme, et changerait de signe si le mouvement était ralenti.

Or, il y a peu d'observations scientifiques qui puissent être faites avec plus de précision que celles où l'on constate, au moyen du galvanomètre, l'existence ou la non-existence d'un courant. La sensibilité de cette méthode dépasse de beaucoup celle de la plupart des procédés que l'on peut employer pour mesurer la force mécanique qui agit sur un corps. Si donc on pouvait produire des courants de cette manière, ils seraient mis en évidence, lors même qu'ils seraient très faibles. Ils se distingueraient des courants d'induction ordinaire par les caractères suivants :

1° Ils dépendraient uniquement du mouvement des conducteurs, et non pas du tout de l'intensité des courants ou des forces magnétiques existant déjà dans le champ.

2° Ils dépendraient non pas des vitesses absolues des conducteurs, mais de leurs accélérations, ainsi que des produits et des carrés de leurs vitesses, et changeraient de sens si l'accélération devenait un ralentissement, la vitesse absolue restant la même.

Or, dans tous les cas observés jusqu'à ce jour, les courants induits dépendent et de la force et de la variation des courants du champ; ils ne peuvent être excités dans un champ où n'existent ni forces magnétiques ni courants; et, pour ce qui est de la relation qui existe entre ces courants et les mouvements des conducteurs, ils dépendent de la vitesse absolue et non des changements de vitesse de ces mouvements.

Nous avons donc trois méthodes pour découvrir l'existence des termes de la forme T_{me}; aucune n'a donné, jusqu'à présent, de résultat positif. Je les ai signalées avec un soin tout particulier, parce qu'il me semble très important d'atteindre le plus haut degré de certitude

possible en une question qui touche de si près la véritable théorie de l'électricité.

Puisque jusqu'à présent on n'a pu surprendre aucun indice de l'existence de ces termes, je vais passer outre, et supposer que ces termes n'existent pas ou, du moins, qu'ils ne produisent pas d'effet sensible : cette hypothèse simplifie considérablement notre théorie dynamique. Mais, en discutant les relations du magnétisme et de la lumière, nous aurons l'occasion de montrer que le mouvement qui constitue la lumière peut entrer comme facteur dans des termes comprenant le mouvement qui constitue le Magnétisme.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES.

578. Nous pouvons maintenant limiter notre attention à cette partie de l'énergie cinétique du système qui dépend des carrés et des produits des intensités des courants électriques : c'est ce que nous pouvons appeler l'*énergie électrocinétique* du système. La partie qui dépend du mouvement des conducteurs appartient à la Dynamique ordinaire, et nous avons montré que la partie qui dépendrait des produits des vitesses et des intensités n'existe pas.

Soient $A_1, A_2, \ldots$ les différents circuits conducteurs. Exprimons leurs formes et leurs positions au moyen des variables $x_1, x_2, \ldots$, dont le nombre est égal au nombre des degrés de liberté du système mécanique. Nous appellerons ces variables *variables géométriques*.

Désignons par y_1 la quantité d'électricité qui a traversé une section donnée du conducteur A_1 depuis l'origine du temps t. L'intensité du courant est représentée par la dérivée $\dot{y}_1$ de cette quantité.

Nous appellerons $\dot{y}$ l'intensité actuelle et y_1 l'intensité intégrale. Il y a une variable de cette espèce pour chacun des circuits du système.

Désignons par T l'énergie électrocinétique du système : c'est une fonction homogène du second degré des intensités des courants, de la forme

$$(1) \qquad T = \tfrac{1}{2} L_1 \dot{y}_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 \dot{y}_2^2 + \ldots + M_{12} \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \ldots,$$

où les coefficients L, M, ... sont des fonctions des variables géométriques. Les variables électriques $y_1, y_2, \ldots$ n'interviennent pas dans cette expression.

Nous pouvons appeler $L_1, L_2, \ldots$ les moments d'inertie électrique des circuits $A_1, A_2, \ldots$, et M_{12} le produit d'inertie électrique des deux circuits A_1 et $A_2, \ldots$.

Si nous voulons éviter le langage de la théorie dynamique, nous appellerons L_1 le *coefficient de self-induction* du circuit A_1, et M_{12} le *coefficient d'induction mutuelle* des circuits A_1 et A_2; M_{12} est aussi appelé le *potentiel* du circuit A_1 par rapport au circuit A_2. Ces quantités ne dépendent que de la forme et de la position relative des circuits. Nous verrons que, dans le système de mesure électromagné-

tique, ces quantités sont de la dimension d'une ligne. (*Voir* § 627.)

En différentiant T par rapport à $\dot{y}_1$, nous obtenons la quantité p_1, que, dans la théorie dynamique, on peut appeler la *quantité de mouvement* correspondant à y_1. Dans la théorie électrique, nous appellerons p_1 la *quantité de mouvement électrocinétique* du circuit A_1. Sa valeur est

$$p_1 = L_1 \dot{y}_1 + M_{12} \dot{y}_2 + \ldots.$$

Ainsi, la quantité de mouvement électrocinétique du circuit A_1 se compose du produit de l'intensité dans ce circuit par son coefficient de self-induction, et de la somme des intensités dans les autres circuits, multipliées chacune par le coefficient d'induction mutuelle de A_1 et du circuit considéré.

Force électromotrice.

579. Soit E la force électromotrice appliquée au circuit A_1, due à une pile voltaïque ou thermo-électrique ou à toute autre cause capable de produire un courant indépendamment de toute induction magnéto-électrique.

Soit R la résistance du circuit. D'après la loi de Ohm, il faut une force électromotrice $R\dot{y}$ pour surmonter cette résistance, ce qui laisse une force électromotrice $E - R\dot{y}$ disponible pour changer la quantité de mouvement dans le circuit. Appelant Y′ cette force, nous avons, par les équations générales,

$$Y' = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial T}{\partial y};$$

mais, puisque T ne renferme pas y, le dernier terme disparaît.

L'équation de la force électromotrice est donc

$$E - R\dot{y} = Y' = \frac{dp}{dt}$$

ou

$$E = R\dot{y} + \frac{dp}{dt}.$$

La force électromotrice appliquée E comprend donc deux parties : la première, $R\dot{y}$, nécessaire pour entretenir l'intensité $\dot{y}$ malgré la résistance R; la seconde, nécessaire pour accroître la quantité de mouvement électromagnétique p. Telle est la force électromotrice qui doit être fournie par des sources indépendantes de l'induction magnéto-électrique. La force électromotrice due à l'induction magnéto-

électrique seule est évidemment $-\frac{dp}{dt}$, c'est-à-dire *la diminution par unité de temps de la quantité de mouvement électrocinétique du circuit.*

Force électromagnétique.

580. Soit X′ la force motrice mécanique, due à des causes extérieures, qui tend à accroître la variable x. Par les équations générales,

$$X' = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Puisque l'expression de l'énergie électrocinétique ne contient pas la vitesse ($\dot{x}$), le premier terme du second membre disparaît, et nous trouvons

$$X' = -\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Ici X′ est la force extérieure nécessaire pour faire équilibre aux forces dues aux causes électriques; on a l'habitude de la considérer comme la réaction contre la force électromagnétique que nous appellerons X et qui est égale et contraire à X′.

On a donc

$$X = \frac{\partial T}{\partial x};$$

c'est-à-dire que *la force électromagnétique qui tend à augmenter une variable est égale à l'accroissement de l'énergie électrocinétique pour l'unité d'accroissement de la variable, les courants restant constants.*

Si les courants sont maintenus constants par une pile pendant un déplacement où la force électromotrice effectue une quantité W de travail, l'énergie électrocinétique du système croîtra de W dans le même temps. Donc la pile aura dû fournir une quantité double d'énergie, 2W, outre l'énergie dépensée sous forme de chaleur dans le circuit. Ce résultat a été signalé par Sir W. Thomson (1). Comparer ce résultat à la propriété électrostatique indiquée § 93.

---

(1) Nichols, *Cyclopædia of physical Science*, ed. 1860. Article *Magnetism, Dynamical relations.*

Cas de deux circuits.

581. Appelons A_1 le circuit primaire et A_2 le circuit secondaire. L'énergie électrocinétique du système peut s'écrire

$$T = \tfrac{1}{2} L\dot{y}_1^2 + M\dot{y}_1\dot{y}_2 + \tfrac{1}{2} N\dot{y}_2^2,$$

où L et N sont les coefficients de self-induction des circuits primaire et secondaire, et M leur coefficient d'induction mutuelle.

Supposons que le circuit secondaire ne soit soumis à aucune autre force électromotrice qu'à celle qui est due à l'induction du circuit primaire. Nous avons ainsi

$$E_2 = R_2\dot{y}_2 + \frac{d}{dt}(M\dot{y}_1 + N\dot{y}_2) = 0.$$

Intégrant cette équation par rapport à t, nous avons

$$R_2 y_2 + M\dot{y}_1 + N\dot{y}_2 = \text{const.},$$

où y_2 est le courant total dans le circuit secondaire.

On décrira au § 748 la façon de mesurer un courant total de courte durée, et, dans la plupart des cas, il est aisé de faire en sorte que le courant secondaire ait une très courte durée.

Désignons par un accent les valeurs des variables de cette équation à la fin du temps t : si y_2 est le courant total, ou la quantité totale d'électricité qui traverse une section du circuit secondaire pendant le temps t,

$$R_2 y_2 = M\dot{y}_1 + N\dot{y}_2 - (M'\dot{y}'_1 + N'\dot{y}'_2).$$

Mais si le courant secondaire est entièrement dû à l'induction, sa valeur initiale $\dot{y}_2$ est nulle si, avant le commencement du temps t, le courant primaire était constant et les conducteurs au repos.

Et si le temps t est suffisant pour permettre au courant secondaire de s'éteindre, la valeur finale est aussi zéro, de sorte que l'équation devient

$$R_2 y_2 = M\dot{y}_1 - M'\dot{y}'_1.$$

Dans ce cas, le courant intégral dans le circuit secondaire dépend des valeurs initiales et finales de $M\dot{y}_1$.

Courants induits.

582. Supposons d'abord que le circuit primaire soit rompu, ou que $\dot{y}_1 = 0$, et soit un courant $\dot{y}'_1$ qui s'y établit quand on ferme le contact.

L'équation qui détermine le courant intégral secondaire est

$$R_2 y_2 = -M\dot{y}_1.$$

Si les circuits sont placés l'un à côté de l'autre et pris dans le même sens, M est une quantité positive. Donc, quand on établit le contact dans le circuit primaire, un courant négatif est induit dans le circuit secondaire.

Quand le contact est rompu dans le circuit primaire le courant primaire cesse, et le courant induit est y_2, où

$$R_2 y_2 = M\dot{y}_1.$$

Dans ce cas, le courant secondaire est positif.

Si l'on maintient constant le courant primaire, et que l'on change la forme ou la position relative des circuits, de façon que M devienne M', le courant secondaire total est y_2, où

$$R_2 y_2 = (M - M')\dot{y}_1.$$

Dans le cas de deux circuits placés côte à côte et de même sens, M diminue quand la distance des circuits augmente. Donc le courant induit est positif quand cette distance croît, et négatif quand elle décroît.

Ce sont là les cas élémentaires d'induction décrits au § 530.

Action mécanique entre les deux circuits.

583. Soit x une des variables géométriques qui définissent la forme et la position relative des circuits; la force électromagnétique qui tend à accroître x est

$$X = \tfrac{1}{2}\dot{y}_1^2 \frac{\partial L}{\partial x} + y_1 y_2 \frac{\partial M}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\dot{y}_2^2 \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Si le mouvement du système qui correspond à la variation de la variable x est tel que chaque circuit se meut comme un corps invariable, L et N sont indépendants de x, et l'équation se réduit à la forme

$$X = \dot{y}_1 \dot{y}_2 \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Donc, si les courants primaire et secondaire sont de même signe, la force X qui agit entre les circuits tendra à les mouvoir de manière à accroître M.

Or si les circuits sont placés côte à côte et que le courant y circule

dans le même sens, M croît quand les circuits se rapprochent. Donc, dans ce cas, la force X est une attraction.

584. L'ensemble des phénomènes d'action mutuelle de deux circuits, induction de courants ou force mécanique exercée entre les circuits, dépend de la quantité M que nous avons appelée *coefficient d'induction mutuelle*.

On a déjà donné, au § 524, la manière de calculer cette quantité d'après les relations géométriques des deux circuits; mais, dans les recherches exposées au Chapitre suivant, nous ne supposerons pas que l'on connaisse la forme mathématique de cette quantité; nous la considérerons comme déduite d'expériences sur l'induction, telle, par exemple, que l'observation du courant total obtenu quand on déplace brusquement le circuit secondaire d'une position donnée, jusqu'à une distance infinie ou jusqu'à une position où nous savons que $M = 0$.

CHAPITRE VIII.

EXPLORATION DU CHAMP AU MOYEN DU CIRCUIT SECONDAIRE.

585. Nous avons démontré, aux §§ 582, 583, 584, que l'action électromagnétique entre le circuit primaire et le circuit secondaire dépend de la quantité désignée par M, qui est une fonction de la forme et de la position relative des deux circuits.

Quoique, en réalité, cette quantité M ne soit autre chose que le potentiel des deux circuits dont nous avons déduit (§§ 423, 492, 521, 539) la forme mathématique et les propriétés des phénomènes magnétiques et électromagnétiques, nous ne nous reporterons pas ici à ces résultats; mais nous commencerons sur une base nouvelle, sans faire d'autres hypothèses que celles de la théorie dynamique exposée au Chapitre VII.

La quantité de mouvement électrocinétique du circuit secondaire comprend deux parties (§ 578) : l'une, $M i_1$, dépend du courant primaire i_1, et l'autre, $N i_2$, du courant secondaire i_2. Nous allons étudier la première de ces parties, que nous désignerons par p :

$$p = M i_1. \tag{1}$$

Nous supposerons aussi le circuit primaire fixe et le courant primaire constant. La quantité p, quantité de mouvement électrocinétique du circuit secondaire, ne dépendra, dans ce cas, que de la forme et de la position du circuit secondaire; en sorte que, si l'on prend pour circuit secondaire une courbe fermée quelconque, et si l'on choisit sur cette courbe la direction que l'on comptera positive, la valeur de p est déterminée pour cette courbe fermée. Si l'on avait pris la direction contraire pour direction positive sur la courbe, le signe de p aurait été renversé.

586. Puisque la quantité p dépend de la forme et de la position du circuit, nous pouvons supposer que chaque partie du circuit contribue pour une certaine part à la valeur de p, et que la part due à chacune des parties du circuit ne dépende que de la forme et de la

position de cette partie seulement, et non de la position des autres parties du circuit.

Cette supposition est légitime; car nous ne considérons pas ici un *courant*, dont les différentes parties peuvent réagir, et réagissent effectivement les unes sur les autres, mais seulement un *circuit*, c'est-à-dire une courbe fermée le long de laquelle un courant électrique *peut* circuler, mais qui n'est en somme qu'une figure géométrique, dont on ne saurait concevoir que les parties puissent avoir une action physique les unes sur les autres.

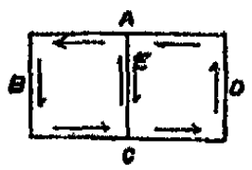
Nous pouvons donc admettre que la part due à l'élément *ds* du circuit soit $J\,ds$, J étant une fonction dépendant de la position et de la direction de l'élément *ds*. La valeur de *p* peut alors s'exprimer par une intégrale prise le long du circuit,

$$p = \int J\,ds, \tag{2}$$

l'intégration étant effectuée une seule fois tout le long du circuit.

587. Il s'agit maintenant de déterminer la forme de la quantité J. En premier lieu, si *ds* change de sens, J change de signe. Donc, si

Fig. 35.



deux circuits ABCE et AECD ont l'arc AEC commun, mais pris en sens contraires dans les deux circuits, la somme des valeurs de *p* pour les deux circuits sera égale à la valeur de *p* pour le circuit ABCD formé des deux circuits.

En effet, les parties de l'intégrale qui dépendent de l'arc AEC sont égales et de signes contraires pour les deux circuits partiels, de sorte qu'elles se détruisent l'une l'autre quand on fait la somme, ne laissant que les parties de l'intégrale qui dépendent de la limite extérieure de ABCD.

De même, on peut montrer que si l'on divise en un nombre quelconque de parties une surface limitée par une courbe fermée, et si l'on considère comme un circuit le périmètre de chacune des parties, la direction positive étant la même sur chacun des circuits et sur la courbe fermée extérieure, la valeur de *p* pour cette courbe exté-

rieure est égale à la somme des valeurs de p pour chacun des circuits. (*Voir* § 483.)

588. Considérons maintenant une portion de surface, dont les dimensions soient assez petites relativement aux rayons de courbure principaux en cette partie de la surface, pour que l'on y puisse négliger les variations de direction de la normale. Supposons aussi que, si un très petit circuit se transporte parallèlement à lui-même d'un point à un autre de cette surface, la valeur de p pour ce petit circuit ne change pas sensiblement. C'est évidemment le cas si les dimensions de la portion de surface sont suffisamment petites relativement à la distance au circuit primaire.

Si l'on trace sur cette partie de surface une courbe fermée quelconque, la valeur de p pour cette courbe est proportionnelle à l'aire qu'elle comprend. En effet, les aires de deux circuits quelconques peuvent être partagées en petits éléments, tous de même grandeur et ayant même valeur de p. Les aires de ces deux circuits sont entre elles comme les nombres des éléments qu'elles renferment, et les valeurs de p pour ces deux circuits sont aussi dans le même rapport.

Donc, la valeur de p pour le circuit qui limite un élément de surface dS est de la forme

$$\mathrm{I}\,d\mathrm{S},$$

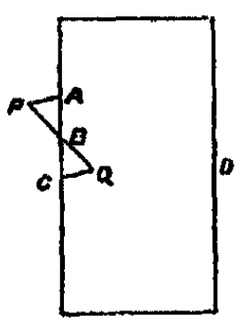
où I est une quantité qui dépend de la position de dS et de la direction de sa normale. Nous avons donc une nouvelle expression de p,

$$p = \int\int \mathrm{I}\,d\mathrm{S}, \tag{3}$$

où l'intégrale double s'étend à une surface quelconque limitée par le circuit.

589. Soient ABCD un circuit et AC un élément de ce circuit assez

Fig. 36.



petit pour qu'on puisse le considérer comme rectiligne. Soient APB et

CQB, de petites aires égales situées dans le même plan; la valeur de p est la même pour les petits circuits APB et CQB ou

$$p(\mathrm{APB}) = p(\mathrm{CQB});$$

d'où

$$\begin{aligned} p(\mathrm{APBQCD}) &= p(\mathrm{ABQCD}) + p(\mathrm{APB}) \\ &= p(\mathrm{ABQCD}) + p(\mathrm{CQB}) \\ &= p(\mathrm{ABCD}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la valeur de p n'est pas sensiblement changée si l'on substitue la ligne brisée APQC à la ligne droite AC, pourvu que l'aire du circuit ne soit pas sensiblement changée. En fait, c'est le principe établi par la seconde expérience d'Ampère (§ 506), où il montre qu'une partie de circuit sinueux est équivalente à une portion de circuit rectiligne, pourvu qu'en aucun point la partie sinueuse ne soit à une distance sensible de la partie rectiligne.

Si donc nous substituons à l'élément ds trois petits éléments dx, dy, dz, tracés à la suite l'un de l'autre, de manière à former une ligne continue du commencement à la fin de l'élément ds, et si $\mathrm{F}\,dx$, $\mathrm{H}\,dy$, $\mathrm{G}\,dz$ désignent les éléments de l'intégrale prise le long de dx, dy et dz,

$$\mathrm{J}\,ds = \mathrm{F}\,dx + \mathrm{G}\,dy + \mathrm{H}\,dz. \tag{4}$$

590. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer de quelle manière la quantité J dépend de la direction de l'élément ds; car, d'après (4),

$$\mathrm{J} = \mathrm{F}\frac{dx}{ds} + \mathrm{G}\frac{dy}{ds} + \mathrm{H}\frac{dz}{ds}. \tag{5}$$

Or c'est là l'expression de la composante suivant ds d'un vecteur dont les composantes, suivant les axes des x, des y et des z, seraient F, G et H.

Si l'on désigne ce vecteur par $\mathfrak{A}$ et par ρ le vecteur mené de l'origine à un point quelconque du circuit, l'élément de circuit sera $d\rho$, et l'expression de $\mathrm{J}\,ds$ en quaternions sera

$$-\mathrm{S}\mathfrak{A}\,d\rho.$$

Nous pouvons maintenant écrire l'équation (2) sous la forme

$$p = \int\left(\mathrm{F}\frac{dx}{ds} + \mathrm{G}\frac{dy}{ds} + \mathrm{H}\frac{dz}{ds}\right)ds \tag{6}$$

ou

$$p = -\int \mathfrak{S}\mathfrak{A}\,d\varrho. \tag{7}$$

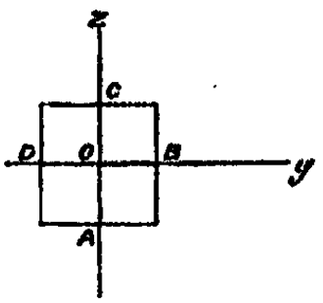
Le vecteur $\mathfrak{A}$ et ses composantes F, G, H dépendent de la position de ds dans le champ, et non de la direction dans laquelle est tracé cet élément. Ce sont donc des fonctions des coordonnées x, y, z de ds, et non de ses cosinus directeurs l, m, n.

Le vecteur $\mathfrak{A}$ représente en grandeur et direction l'intégrale de temps de la force électromotrice à laquelle serait soumis un point placé en (x, y, z), si le courant primaire venait à être brusquement interrompu. Nous l'appellerons donc la *quantité* de mouvement électrocinétique *au point* (x, y, z). Il est identique à la quantité que nous avons étudiée, au § 405, sous le nom de *potentiel vecteur* de l'induction magnétique.

La quantité de mouvement électrocinétique d'une ligne ou d'un circuit fini est l'intégrale, prise le long de cette ligne ou de ce circuit, de la composante de la quantité de mouvement électrocinétique en chaque point de ce circuit.

591. Déterminons maintenant la valeur de p pour un rectangle

Fig. 37.



élémentaire ABCD dont les côtés sont dy et dz, la direction positive étant dans le sens de l'axe des y vers celui des z.

Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du centre de gravité O de l'élément; G_0 et H_0 les valeurs de G et H en ce point.

Les coordonnées du milieu A du premier côté du rectangle sont y_0 et $z_0 - \frac{1}{2}dz$. La valeur correspondante de G est

$$G = G_0 - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}\,dz + \ldots, \tag{8}$$

et la partie de la valeur de p, qui est due au côté A, est à peu près

$$G_0\,dy - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}\,dy\,dz. \tag{9}$$

De même pour B,

$$H_0\,dz + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial y}\,dy\,dz;$$

pour C,

$$-G_0\,dy - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}\,dy\,dz;$$

pour D,

$$-H_0\,dz + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial y}\,dy\,dz.$$

Ajoutant ces quatre quantités, nous trouvons la valeur de p pour le rectangle

$$p = \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) dy\,dz. \tag{10}$$

Si nous introduisons trois nouvelles quantités a, b, c, telles que

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z}, \\ b = \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ c = \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$$

et si nous les considérons comme les composantes d'un nouveau vecteur $\mathfrak{B}$, nous pouvons, au moyen du théorème IV, art. 24, exprimer l'intégrale $\mathfrak{A}$ prise le long du circuit au moyen de l'intégrale $\mathfrak{B}$ prise sur une surface limitée par le circuit; on a

$$p = \int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right) ds = \int\int (la + mb + nc)\,dS \tag{11}$$

ou bien

$$p = \int T\mathfrak{A}\cos\varepsilon\,ds = \int\int T\mathfrak{B}\cos\eta\,dS, \tag{12}$$

où ε est l'angle compris entre $\mathfrak{A}$ et ds, et η est l'angle compris entre $\mathfrak{B}$ et la normale à dS dont les cosinus directeurs sont l, m, n, et où $T\mathfrak{A}$ et $T\mathfrak{B}$ désignent les valeurs numériques de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

Comparant ces résultats à l'équation (3), il est évident que la quantité I de cette équation est égale à $\mathfrak{B}\cos\eta$ ou à la composante de $\mathfrak{B}$, suivant la normale à dS.

592. Nous avons déjà vu (§ 490, 511) que, suivant la théorie de Faraday, les phénomènes de force électromagnétique et d'induction

dans un circuit dépendent de la variation du nombre des lignes d'induction magnétique qui passent dans le circuit. Or l'expression mathématique du nombre de ces lignes est l'intégrale de surface de l'induction magnétique à travers une surface quelconque limitée par le circuit. Nous devons donc considérer le vecteur $\mathfrak{B}$ et ses composantes a, b, c comme représentant ce que nous connaissions déjà sous le nom d'*induction magnétique* et de ses composantes.

Dans l'étude actuelle, nous nous proposons de déduire les propriétés de ce vecteur des principes dynamiques exposés dans le Chapitre précédent, en faisant aussi peu que possible appel à l'expérience.

Nous ne nous écartons pas de cette méthode quand nous identifions ce vecteur, qui se présente à nous comme résultat d'une étude mathématique, avec l'induction magnétique, dont nous avons appris les propriétés par des expériences faites sur les aimants; car nous n'introduisons point de faits nouveaux dans la théorie, nous ne faisons que donner un nom à une quantité mathématique, et l'on jugera de la convenance de ce nom par l'accord entre les relations de la quantité mathématique et celles de la quantité physique indiquée par ce nom.

Le vecteur $\mathfrak{B}$, qui paraît dans une intégrale de surface, appartient évidemment à la catégorie des flux décrits au § 13; au contraire, le vecteur $\mathfrak{A}$, qui paraît dans une intégrale de ligne, appartient à la catégorie des forces.

593. Nous devons ici rappeler les conventions faites sur les quantités et les directions positives et négatives, dont quelques-unes ont été énoncées au § 23. Nous adoptons le système d'axes à droite, en sorte qu'une vis à droite étant placée le long de l'axe, un écrou placé sur cette vis et tourné dans le sens de la rotation positive, c'est-à-dire dans le sens des y vers les z, se déplace sur la vis dans le sens des x positifs.

Nous considérons aussi comme positifs l'électricité vitrée et le magnétisme austral. La direction positive pour un courant électrique ou pour une ligne d'induction électrique est la direction dans laquelle l'électricité positive se meut ou tend à se mouvoir, et la direction positive d'une ligne d'induction magnétique est la direction vers laquelle une aiguille de boussole tourne son extrémité qui marque habituellement le nord. (Voir *fig.* 24, § 498, et *fig.* 25, § 501.)

On recommande au lecteur d'employer telle méthode qui lui paraîtra préférable, pour fixer ces conventions dans sa mémoire; car il

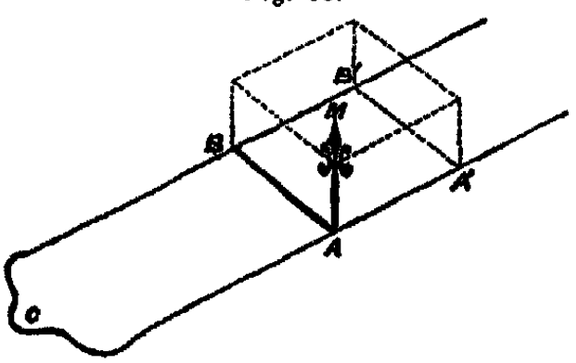
est bien plus difficile de se rappeler une règle déterminant entre deux formes, également acceptables en elles-mêmes, celle que l'on doit prendre pour énoncer quelque chose, qu'une règle faisant choix d'une forme entre beaucoup d'autres.

594. Nous devons maintenant déduire des principes dynamiques les expressions de la force électromagnétique qui agit sur un conducteur traversé par un courant et mobile dans un champ magnétique, et de la force électromotrice qui agit sur l'électricité d'un corps mobile dans un champ magnétique. La méthode mathématique que nous allons employer peut être comparée à la méthode expérimentale de Faraday (1), consistant à explorer le champ au moyen d'un fil et à ce que nous avons déjà fait au § 490 par une méthode fondée sur l'expérience. Nous devons déterminer maintenant l'effet produit sur la valeur du moment électrocinétique p du circuit secondaire par un changement donné de la forme de ce circuit.

Soient AA′, BB′ deux conducteurs rectilignes parallèles, reliés par un arc conducteur C et par un conducteur rectiligne AB, susceptible de glisser parallèlement à lui-même sur les rails AA′ et BB′.

Prenons pour circuit secondaire le circuit ainsi formé, et pour di-

Fig. 38.



rection positive sur ce circuit la direction ABC.

Faisons mouvoir la pièce glissante, parallèlement à elle-même, de sa position AB à sa position A′B′. Nous avons à déterminer la variation du moment électrocinétique p du circuit due à ce déplacement de la pièce glissante.

Le circuit secondaire ABC devient A′B′C; donc, par le § 587,

$$p(A'B'C) - p(ABC) = p(AA'B'B). \tag{13}$$

Nous avons donc à déterminer la valeur de p pour le parallélogramme

(1) *Exp. Res.*, p. 3092, 3087, 3113.

AA′B′B. Si ce parallélogramme est assez petit pour que l'on puisse négliger les variations de direction et de grandeur de l'induction magnétique aux différents points de son plan, la valeur de p est, d'après le § 591, $\mathfrak{B}\cos\eta . AA'B'B$, où $\mathfrak{B}$ est l'induction magnétique et η l'angle qu'elle fait avec la direction positive de la normale au parallélogramme AA′B′B.

Nous pouvons représenter géométriquement ce résultat par le volume du parallélépipède dont la base est le parallélogramme AA′B′B et dont l'arête est la ligne AM, qui représente en grandeur et direction l'induction magnétique $\mathfrak{B}$. Si le parallélogramme est dans le plan du papier et que la normale soit menée de bas en haut, à partir du papier, le volume du parallélépipède doit être compté positivement; plus généralement, il doit être pris positivement si les directions du circuit AB, de l'induction AM et du déplacement AA′, pris dans l'ordre cyclique, forment un système à droite.

Le volume de ce parallélépipède représente l'accroissement de la valeur de p du second circuit correspondant au déplacement de la pièce glissante de AB à A′B′.

Force électromotrice agissant sur la pièce glissante.

595. La force électromotrice produite dans le circuit secondaire par le mouvement de la pièce glissante est, d'après le § 579,

$$E = -\frac{dp}{dt}. \tag{14}$$

Si nous supposons que AA′ soit le déplacement effectué dans l'unité de temps, AA′ représente la vitesse, le parallélépipède représente $\frac{dp}{dt}$; donc, d'après l'équation (14), la force électromotrice est dans la direction négative BA.

Donc, la force électromotrice qui agit sur la pièce glissante AB, en raison de son mouvement à travers le champ magnétique, est figurée par le parallélépipède dont les arêtes représentent en grandeur et direction la vitesse, l'induction magnétique et la pièce glissante elle-même; et elle est positive si ces trois directions se suivent dans un ordre cyclique à droite.

Force électromagnétique agissant sur la pièce glissante.

596. Désignons par i_2 le courant qui traverse le circuit secondaire dans la direction positive ABC; le travail de la force électromagné-

tique qui agit sur AB pendant que cette pièce glisse de la position AB à la position A'B', est $(M' - M) i_1 i_2$, M et M' étant les valeurs de M_{12} pour les positions initiale et finale de AB. Mais $(M' - M) i_1$ est égal à $p' - p$ et se trouve représenté par le volume du parallélépipède construit sur AB, AM et AA'. Si donc nous menons une ligne parallèle à AB, pour représenter la quantité $AB . i_2$, le parallélépipède construit sur cette ligne, l'induction magnétique AM et le déplacement AA' représente le travail effectué pendant ce déplacement.

Pour un déplacement de grandeur donnée, ce travail est maximum quand le déplacement est perpendiculaire au parallélogramme dont les côtés sont AB et AM. La force électromagnétique est donc représentée par l'aire du parallélogramme construit sur AB et AM multiplié par i_2, et elle est dirigée suivant la normale à ce parallélogramme, menée dans un sens tel, que AB, AM et la normale soient dans un ordre cyclique à droite.

Quatre définitions d'une ligne d'induction magnétique.

507. Si la direction AA', suivant laquelle s'effectue le mouvement de la pièce glissante, coïncide avec la direction AM de l'induction magnétique, le mouvement de la pièce glissante ne met plus en jeu de force électromotrice, quelle que soit la direction de AB; et si AB est traversé par un courant, il n'y a plus tendance à un glissement le long de AA'.

De même, si la pièce glissante AB coïncide en direction avec l'induction magnétique AM, il n'y a plus de force électromotrice mise en jeu par aucun mouvement de AB, et un courant traversant AB ne donne plus lieu à une force mécanique agissant sur AB.

Nous pouvons donc définir une ligne d'induction magnétique de quatre manières différentes. C'est une ligne telle que :

1° Un conducteur déplacé parallèlement à lui-même suivant cette ligne n'est soumis à aucune force électromotrice;

2° Un conducteur traversé par un courant et libre de se mouvoir suivant une ligne d'induction magnétique n'éprouve aucune tendance à prendre ce mouvement;

3° Un conducteur linéaire dont la direction coïncide avec celle d'une ligne d'induction magnétique, étant déplacé parallèlement à lui-même dans une direction quelconque, n'est soumis à aucune force électromotrice dans le sens de sa longueur;

4° Un circuit linéaire traversé par un courant électrique dont la

direction coïncide avec celle d'une ligne d'induction magnétique n'est soumis à aucune force mécanique.

Équations générales de la force électromotrice.

598. Nous avons vu que la force électromotrice E, due à l'induction exercée sur un circuit secondaire, est égale à $-\frac{dp}{dt}$, où

$$p = \int \left(\mathrm{F}\frac{dx}{ds} + \mathrm{G}\frac{dy}{ds} + \mathrm{H}\frac{dz}{ds} \right) ds. \tag{1}$$

Pour déterminer la valeur de E, différentions par rapport à t la quantité sous le signe $\int$, en nous souvenant que si le circuit est en mouvement, x, y et z sont des fonctions du temps. Nous avons

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{E} = &-\int \left(\frac{d\mathrm{F}}{dt}\frac{dx}{ds} + \frac{d\mathrm{G}}{dt}\frac{dy}{ds} + \frac{d\mathrm{H}}{dt}\frac{dz}{ds} \right) ds \\ &-\int \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\frac{dz}{ds} \right) \frac{dx}{dt}\, ds \\ &-\int \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\frac{dz}{ds} \right) \frac{dy}{dt}\, ds \\ &-\int \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\frac{dz}{ds} \right) \frac{dz}{dt}\, ds \\ &-\int \left(\mathrm{F}\frac{d^2x}{ds\,dt} + \mathrm{G}\frac{d^2y}{ds\,dt} + \mathrm{H}\frac{d^2z}{ds\,dt} \right) ds. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Considérons le second terme de l'intégrale et substituons-y les valeurs de $\frac{d\mathrm{G}}{dx}$ et $\frac{d\mathrm{H}}{dx}$, tirées des équations (A), § 591; ce terme devient alors

$$-\int \left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{dz}{ds} \right) \frac{dx}{dt}\, ds,$$

ce qu'on peut écrire

$$-\int \left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds} + \frac{d\mathrm{F}}{ds} \right) \frac{dx}{dt}\, ds.$$

Traitant de même le troisième et le quatrième terme, réunissant les termes en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et nous souvenant que

$$\int \left(\frac{d\mathrm{F}}{ds}\frac{dx}{dt} + \mathrm{F}\frac{d^2x}{ds\,dt} \right) ds = \mathrm{F}\frac{dx}{dt}, \tag{3}$$

et que, par suite, l'intégrale prise le long d'une courbe fermée s'an-

nule,

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{E} = \displaystyle\int\left(c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{d\mathrm{F}}{dt}\right)\frac{dx}{ds}\,ds \\ \qquad + \displaystyle\int\left(a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{d\mathrm{G}}{dt}\right)\frac{dy}{ds}\,ds \\ \qquad + \displaystyle\int\left(b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{d\mathrm{H}}{dt}\right)\frac{dz}{ds}\,ds. \end{cases}$$

Nous pouvons mettre cette expression sous la forme

$$(5)\qquad \mathrm{E} = \int\left(\mathrm{P}\frac{dx}{ds} + \mathrm{Q}\frac{dy}{ds} + \mathrm{R}\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

où

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Équation de la}\\ \text{force électromotrice.}\end{array}\right. \begin{cases} \mathrm{P} = c\dfrac{dy}{dt} - b\dfrac{dz}{dt} - \dfrac{d\mathrm{F}}{dt} - \dfrac{d\Psi}{dx}, \\ \mathrm{Q} = a\dfrac{dz}{dt} - c\dfrac{dz}{dt} - \dfrac{d\mathrm{G}}{dt} - \dfrac{d\Psi}{dy}, \\ \mathrm{R} = b\dfrac{dx}{dt} - a\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{d\mathrm{H}}{dt} - \dfrac{d\Psi}{dz}. \end{cases}$$

Les termes comprenant la nouvelle quantité Ψ ont été introduits pour donner de la généralité aux expressions de P, Q, R. Ils disparaissent quand l'intégrale est prise tout le long d'un circuit fermé. La quantité Ψ est donc indéterminée, du moins en ce qui concerne le problème actuel, où nous nous proposons d'obtenir la force électromotrice totale qui agit le long du circuit. Mais nous verrons que, quand on connaît toutes les conditions du problème, on peut assigner à Ψ une valeur déterminée qui est le potentiel électrique au point (x, y, z).

La quantité sous le signe $\int$, dans l'équation (5), représente la force électromotrice qui agit sur l'élément *ds* du circuit, rapportée à l'unité de longueur.

Si nous désignons par $\mathrm{T}\mathfrak{E}$ la résultante de P, Q, R et par ε l'angle de cette résultante et de l'élément *ds*, on peut écrire l'équation (5) sous la forme

$$(6)\qquad \mathrm{E} = \int \mathrm{T}\mathfrak{E}\cos\varepsilon\,ds.$$

Le vecteur $\mathfrak{E}$ est la force électromotrice au point où se trouve l'élément mobile *ds*. Sa direction et sa grandeur dépendent de la position et du mouvement de *ds* et de la variation du champ magnétique, mais non de la direction de *ds*. Nous pouvons donc ne plus tenir compte de ce fait que *ds* fait partie d'un circuit, et nous pouvons le considérer

simplement comme une partie d'un corps mobile soumise à l'action d'une force électromotrice $\mathfrak{E}$. La force électromotrice en un point a déjà été définie au § 68. On l'a aussi appelée la *force électrique résultante*, puisque c'est la force à laquelle serait soumise une unité d'électricité positive placée en ce point. Nous avons maintenant obtenu la forme la plus générale de cette quantité, dans le cas d'un corps mobile au milieu du champ magnétique dû à un système électrique variable.

Si le corps est conducteur, la force électromotrice produit un courant; si le corps est un diélectrique, la force électromotrice ne produit qu'un déplacement électrique.

La force électromotrice en un point doit être distinguée avec soin de la force électromotrice qui agit suivant un arc de courbe : cette dernière quantité est l'intégrale de la première le long de la courbe. (*Voir* § 69.)

599. La force électromotrice, dont les composantes sont définies par les équations (B), dépend de trois circonstances. La première est le mouvement du point dans le champ magnétique. La partie de la force qui dépend de ce mouvement est exprimée par les deux premiers termes du second membre de chaque équation : elle dépend de la vitesse de ce point transversalement aux lignes d'induction magnétiques. Si $\mathfrak{G}$ est un vecteur représentant la vitesse et $\mathfrak{B}$ un autre vecteur représentant l'induction magnétique, et si $\mathfrak{E}_1$ est la partie de la force électromotrice qui dépend de ce mouvement,

$$\mathfrak{E}_1 = V\,\mathfrak{G}\mathfrak{B}, \tag{7}$$

c'est-à-dire que la force électromotrice est la partie vectorielle du produit de l'induction magnétique et de la vitesse; en d'autres termes, la force électromotrice est figurée par l'aire du parallélogramme dont les côtés représentent la vitesse et l'induction magnétique, et sa direction est celle d'une normale à ce parallélogramme menée de façon que la vitesse, l'induction magnétique et la force électromotrice se suivent dans un ordre cyclique à droite.

Le troisième terme de chacune des équations (B) dépend de la variation dans le temps du champ magnétique. Cette variation peut être due à une variation dans le temps de l'intensité du courant dans le circuit primaire ou à un mouvement de ce circuit. Soit $\mathfrak{E}_2$ la partie de la force électromotrice qui dépend de ces termes. Les composantes sont

$$-\frac{dF}{dt}, \quad -\frac{dG}{dt}, \quad \text{et} \quad -\frac{dH}{dt},$$

c'est-à-dire les composantes du vecteur $= \frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ ou $= \dot{\mathfrak{A}}$. Donc

$$\mathfrak{E}_2 = -\dot{\mathfrak{A}}. \tag{8}$$

Le dernier terme de chaque équation (B) est dû à la variation de la fonction Ψ aux différents points du champ. Nous pouvons écrire la troisième partie de la force électromotrice dérivant de cette cause,

$$\mathfrak{E}_3 = -\nabla\Psi. \tag{9}$$

Ainsi, dans la notation des quaternions, la force électromotrice définie par les équations (B) peut s'écrire

$$\mathfrak{E} = \mathrm{V}\,\mathfrak{v}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi. \tag{10}$$

Modification des équations de la force électromotrice, lorsque les axes auxquels elles sont rapportées sont mobiles dans l'espace.

600. Soient x', y', z' les coordonnées d'un point relatives à un système d'axes mobiles dans l'espace; x, y, z les coordonnées du même point relativement à un système d'axes fixes.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse de l'origine des axes mobiles; ω_1, ω_2, ω_3 les composantes de sa vitesse angulaire relativement au système d'axes fixes, et choisissons ces axes fixes de façon qu'ils coïncident avec les axes mobiles à l'instant considéré. Les seules quantités qui diffèrent, relativement aux deux systèmes d'axes, sont celles où il y a différentiation par rapport au temps. Si $\frac{\delta x}{\delta t}$ désigne une composante de la vitesse d'un point invariablement lié aux axes mobiles, et si $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$ sont les composantes de la vitesse d'un point quelconque occupant la même position instantanée, relativement aux axes fixes et aux axes mobiles, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{dx'}{dt}, \tag{1}$$

avec des équations semblables pour les autres composantes.

D'après la théorie du mouvement des solides invariables,

$$\begin{cases} \dfrac{\delta x}{\delta t} = u + \omega_2 z - \omega_3 y, \\ \dfrac{\delta y}{\delta t} = v + \omega_3 x - \omega_1 z, \\ \dfrac{\delta z}{\delta t} = w + \omega_1 y - \omega_2 x. \end{cases} \tag{2}$$

F est la composante parallèle aux x d'une quantité dirigée. Si donc $\frac{dF'}{dt}$ est la valeur de $\frac{dF}{dt}$ relative aux axes mobiles, on peut faire voir que

$$(3) \qquad \frac{dF'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t} + G\omega_3 - H\omega_2 + \frac{dF}{dt}.$$

Substituant à $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z}$ leurs valeurs tirées des équations (A) de l'induction magnétique et nous souvenant que, d'après (2),

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta y}{\delta t} = \omega_3, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta z}{\delta t} = -\omega_2,$$

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dF'}{dt} = {} & \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + F\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\delta y}{\delta t} + G\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} \\ & + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\delta z}{\delta t} + H\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta z}{\delta t} - c\frac{\delta y}{\delta t} + b\frac{\delta z}{\delta t} + \frac{dF}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant nous posons

$$(6) \qquad -\Psi' = F\frac{\delta x}{\delta t} + G\frac{\delta y}{\delta t} + H\frac{\delta z}{\delta t},$$

$$(7) \qquad \frac{dF'}{dt} = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x} - c\frac{\delta y}{\delta t} + b\frac{\delta z}{\delta t} + \frac{dF}{dt}.$$

L'équation de P, composante parallèle aux x de la force électromotrice, est, d'après (B),

$$(8) \qquad P = c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

relativement aux axes fixes. Substituant les valeurs des quantités relatives aux axes mobiles, nous avons

$$(9) \qquad P' = c\frac{dy'}{dt} - b\frac{dz'}{dt} - \frac{dF'}{dt} - \frac{\partial(\Psi + \Psi')}{\partial x}$$

pour valeurs de P relatives aux axes mobiles.

601. Il résulte de là que la force électromotrice est exprimée par une formule de même forme, que les mouvements des conducteurs soient rapportés à des axes fixes ou à des axes mobiles dans l'espace : la seule différence entre les formules est que, dans le cas des axes mobiles, le potentiel électrique Ψ doit être changé en $\Psi + \Psi'$.

Dans tous les cas où un courant est produit dans un circuit con-

ducteur, la force électromotrice est l'intégrale

$$(10) \qquad E = \int \left(P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} + R \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

prise le long de la courbe. La valeur de Ψ disparaît de cette intégrale, de sorte que l'introduction de Ψ' n'a pas d'influence. Donc, dans tous les phénomènes relatifs aux circuits fermés et aux courants qui les traversent, il est indifférent que les axes auxquels nous rapportons le système soient en repos ou en mouvement. (*Voir* § 668.)

Force électromagnétique agissant sur un conducteur traversé par un courant et mobile dans un champ magnétique.

602. Nous avons vu dans l'étude générale (§ 583) que si x_1 est une des variables qui définissent la forme et la position du circuit secondaire, et si X_1 est la force dont l'action sur ce circuit tend à accroître cette variable,

$$(1) \qquad X_1 = \frac{dM}{dx_1} i_1 i_2.$$

Puisque i_1 est indépendant de x_1, nous pouvons écrire

$$(2) \qquad M i_1 = p = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

et nous avons, pour valeur de X_1,

$$(3) \qquad X_1 = i_2 \frac{d}{dx_1} \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Supposons que le déplacement consiste à déplacer chacun des points du circuit parallèlement à x d'une longueur δx, δx étant une fonction continue de s quelconque, en sorte que les différentes parties du circuit se meuvent indépendamment les unes des autres, le circuit lui-même restant continu et fermé.

Soit X la force totale qui agit parallèlement aux x sur la partie du circuit comprise entre $s = 0$ et $s = s$: la partie qui correspond à l'élément ds est $\frac{dX}{ds} ds$. Nous aurons alors l'expression suivante du travail effectué par la force pendant le déplacement

$$(4) \qquad \int \frac{dX}{ds} \delta x \, ds = i_2 \int \frac{d}{d\delta x} \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) \delta x \, ds,$$

où l'intégration doit être étendue tout le long de la courbe fermée, en se rappelant que δx est une fonction arbitraire de s. Nous pouvons

donc effectuer la différentiation, par rapport à δx, de la même manière que celle relative à t, au § 598, nous souvenant que

$$(5) \qquad \frac{dx}{d\delta x} = 1, \qquad \frac{dy}{d\delta x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dz}{d\delta x} = 0.$$

Nous trouverons ainsi

$$(6) \qquad \int \frac{dX}{ds}\,\delta x\,ds = i_2 \int \left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds} \right) \delta x\,ds + i_2 \int \frac{d}{ds}(F\,\delta x)\,ds.$$

Le dernier terme s'annule quand l'intégrale est étendue tout le long d'une courbe fermée, et, puisque l'équation doit subsister pour toutes les formes de la fonction δx, nous devons avoir

$$(7) \qquad \frac{dX}{ds} = i_2 \left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds} \right),$$

équation qui donne la composante parallèle aux x de la force qui agit sur un élément quelconque du circuit. Les forces parallèles à y et z sont

$$(8) \qquad \frac{dY}{ds} = i_2 \left(a\frac{dz}{ds} - c\frac{dx}{ds} \right),$$

$$(9) \qquad \frac{dZ}{ds} = i_2 \left(b\frac{dx}{ds} - a\frac{dy}{ds} \right).$$

La force résultante agissant sur chaque élément est donnée en grandeur et direction par l'expression (en symboles de quaternions) $i_2 . V d\rho \mathfrak{B}$, où i_2 est la mesure numérique du courant, et où $d\rho$ et $\mathfrak{g}$ sont des vecteurs représentant l'élément de circuit et l'induction magnétique, et où l'on doit entendre la multiplication dans le même sens que Hamilton.

603. Si le conducteur doit être traité, non comme une ligne, mais comme un corps, nous devons exprimer la force qui agit sur un élément de longueur et le courant qui passe à travers la section complète en fonction de symboles représentant la force rapportée à l'unité de volume et le courant rapporté à l'unité d'aire.

Soient X, Y, Z les composantes de la force rapportée à l'unité de volume; u, v, w celles du courant rapporté à l'unité d'aire. Si S représente la section du conducteur (que nous supposerons petite), le volume de l'élément ds est $S ds$ et $u = \frac{i_2}{S}\frac{dx}{ds}$. Donc l'équation (7) devient

$$(10) \qquad \frac{XS\,ds}{ds} = S(vc - wb)$$

ou de même

$$(G)\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Équation de la force}\\ \text{électromagnétique....}\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}X = vc - wb,\\ Y = wa - uc,\\ Z = ub - va,\end{array}\right.$$

Ici X, Y, Z sont les composantes de la force électromagnétique qui agit sur un élément de conducteur, divisées par le volume de cet élément; u, v, w sont les composantes du courant électrique qui passe par cet élément, rapportées à l'unité d'aire; a, b, c sont les composantes de l'induction magnétique en cet élément, rapportées aussi à l'unité d'aire.

Si le vecteur $\mathcal{F}$ représente en grandeur et en direction la force qui agit sur l'unité de volume du conducteur, et si $\mathfrak{C}$ représente le courant électrique qui le traverse,

$$(11)\qquad \mathcal{F} = V.\mathfrak{C}\mathfrak{B}.$$

[Les équations (B) du § 598 peuvent être établies par la méthode suivante, tirée d'un Mémoire du professeur Maxwell *Sur une Théorie dynamique du champ électromagnétique* (*Phil. Trans.*, 1864).

La variation dans le temps de $-p$ peut être partagée en deux parties, dont l'une dépend, et dont l'autre ne dépend pas du mouvement du circuit. La dernière est évidemment

$$-\int\left(\frac{dF}{dt}\,dx + \frac{dG}{dt}\,dy + \frac{dH}{dt}\,dz\right).$$

Pour trouver la première, considérons un arc δs faisant partie d'un circuit, et supposons qu'il se meuve sur des rails que l'on peut prendre parallèles avec une vitesse v, dont les composantes sont $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, le reste du circuit étant supposé en repos pendant ce temps. Nous pouvons supposer que l'arc mobile engendre un petit parallélogramme : les cosinus directeurs de la normale à ce parallélogramme sont

$$\lambda,\ \mu,\ \nu = \frac{n\dot{y} - m\dot{z}}{v\sin\theta},\quad \frac{l\dot{z} - n\dot{x}}{v\sin\theta},\quad \frac{m\dot{x} - l\dot{y}}{v\sin\theta},$$

où l, m, n, sont les cosinus directeurs de δs, et où θ est l'angle de v et de δs.

Pour vérifier les signes λ, μ, ν, nous pouvons faire $m = -1$, $\dot{x} = v$; ils deviennent alors 0, 0 et -1, ainsi qu'il doit être dans un système d'axes à droite.

Soient a, b, c les composantes de l'induction magnétique qui se produit alors par suite du mouvement de δs pendant le temps δt,

$$\delta p = (a\lambda + b\mu + c\nu)\,v\,\delta t\,\delta s\sin\theta.$$

Si nous supposons que chaque partie du circuit se meut d'une manière semblable, l'effet total sera le mouvement d'ensemble du circuit, les courants des rails se compensant chaque fois qu'il y a deux arcs adjacents. La variation dans le temps de $-p$, due au mouvement du circuit, est donc

$$-\int[a(n\dot{y} - m\dot{z}) + \text{deux autres termes semblables}]\,ds$$

qui doit être prise le long du circuit, ou

$$\int (c\dot{y} - b\dot{z})\, dx + \text{deux autres termes semblables.}$$

Les résultats du § 602, relatifs aux composantes de la force électromotrice, peuvent se déduire de l'expression qui précède de δp. Supposons, en effet, que l'arc δs se déplace d'une distance $\delta s'$ dans la direction l', m', n', on a alors

$$\delta p = [l'(cm - bn) + \text{deux termes semblables}]\, \delta s\, \delta s'.$$

Or, soit X la composante suivant les x de la force qui agit sur l'arc s; pour l'unité de courant nous avons, d'après le § 590,

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dp}{dx} = cm - bn. \]$$

CHAPITRE IX.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU CHAMP MAGNÉTIQUE.

604. Dans notre discussion théorique de l'Électrodynamique, nous avons commencé par admettre qu'un système de circuits traversés par des courants est un système dynamique, où les intensités peuvent être regardées comme des vitesses, et où les coordonnées qui correspondent à ces vitesses ne paraissent pas par elles-mêmes dans les équations. Il résulte de là que l'énergie cinétique du système, en tant qu'elle dépend des courants, est une fonction homogène du deuxième degré des intensités, dont les coefficients ne dépendent que de la forme et de la position relative des circuits. Supposant ces coefficients connus, par expérience ou autrement, nous avons déduit par un raisonnement purement dynamique les lois de l'induction des courants et de l'attraction électromagnétique. Dans cette étude, nous avons introduit la conception de l'énergie électrocinétique d'un système de courants, de la quantité de mouvement électromagnétique d'un circuit et du potentiel mutuel de deux circuits.

Nous nous sommes ensuite occupés d'explorer le champ en donnant différentes formes au circuit secondaire, et nous avons ainsi été conduits à concevoir un vecteur $\mathfrak{A}$ ayant en chaque point du champ une grandeur et une direction déterminées. Nous avons appelé ce vecteur quantité de mouvement électromagnétique au point considéré. Cette quantité peut être considérée comme l'intégrale de temps de la force électromotrice qui serait produite au point donné, si l'on supprimait brusquement tous les courants du champ. Elle est identique avec la quantité déjà étudiée, au § 405, sous le nom de *potentiel vecteur* de l'induction magnétique. Ses composantes parallèles à x, y, z sont F, G, H. Le moment électromagnétique du circuit est l'intégrale de $\mathfrak{A}$ prise le long du circuit.

Alors, nous servant du théorème IV, § 24, nous avons transformé l'intégrale de $\mathfrak{A}$ suivant une ligne en une intégrale sur une surface d'un autre vecteur $\mathfrak{B}$, dont les composantes sont a, b, c, et nous avons trouvé que les phénomènes d'induction dus au mouvement d'un conducteur et ceux de force électromagnétique peuvent s'exprimer en fonction de $\mathfrak{B}$. Nous avons donné à $\mathfrak{B}$ le nom d'*induction magné-*

tique, puisque ses propriétés sont identiques à celles des lignes d'induction magnétique étudiées par Faraday.

Nous avons aussi établi trois séries d'équations : la première, (A), exprime l'induction magnétique en fonction de la quantité de mouvement électromagnétique; la seconde, (B), exprime la force électromotrice en fonction du mouvement du conducteur à travers les lignes d'induction magnétique, et du taux de variation de la quantité de mouvement électromagnétique; la troisième série, (C), comprend les équations de la force électromagnétique exprimées en fonction de l'intensité et de l'induction magnétique.

Dans tous ces cas, on doit entendre par intensité l'intensité effective qui comprend non seulement le courant de conduction, mais aussi celui qui est dû à la variation de déplacement électrique.

L'induction magnétique $\mathfrak{B}$ est la quantité que nous avons déjà considérée au § 400. Dans un corps non aimanté, elle est identique à la force qui agirait sur l'unité de pôle magnétique; mais, si le corps est aimanté, d'une manière permanente ou par induction, c'est la force qui agirait sur l'unité de pôle magnétique placée dans une fente étroite dont les parois seraient perpendiculaires à la direction de l'aimantation. Les composantes de $\mathfrak{B}$ sont a, b, c.

Il résulte des équations (A), qui définissent a, b, c, que

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

On a montré, au § 403, que c'est là une propriété de l'induction magnétique.

603. Nous avons défini la force magnétique à l'intérieur d'un aimant, par distinction avec l'induction magnétique, comme étant la force exercée sur l'unité de pôle placée dans une fente étroite ouverte parallèlement à la direction d'aimantation. Cette quantité est désignée par $\mathfrak{H}$ et ses composantes sont α, β, γ. (*Voir* § 398.)

Si $\mathfrak{I}$ est l'intensité d'aimantation et A, B, C ses composantes, on a, d'après le § 400,

(D) Équations d'aimantation.
$$\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A, \\ b = \beta + 4\pi B, \\ c = \gamma + 4\pi C. \end{cases}$$

Nous pouvons appeler ces équations *équations d'aimantation :* elles indiquent que, dans le système électromagnétique, l'induction magnétique $\mathfrak{B}$, considérée comme un vecteur, est la somme (au sens géo-

métrique du mot) de deux vecteurs, la force magnétique $\mathfrak{H}$ et l'aimantation $\mathfrak{J}$ multipliée par

$$4\pi \quad \text{ou} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}.$$

Dans certaines substances, l'aimantation dépend de la force magnétique : c'est ce qu'exprime le système des équations de magnétisme induit, données aux §§ 426 et 436.

606. Jusqu'ici, dans cette étude, nous avons tout déduit de considérations purement dynamiques, sans nous reporter en rien aux résultats quantitatifs obtenus dans des expériences d'électricité ou de magnétisme. Nous ne nous sommes servis des connaissances que nous devons à l'expérience que pour reconnaître dans les quantités abstraites déduites de notre théorie les quantités concrètes découvertes par l'expérience, et pour leur donner des noms rappelant plutôt leurs relations physiques que leur origine mathématique.

Ainsi nous avons montré que la quantité de mouvement électromagnétique $\mathfrak{A}$ est un vecteur dont la grandeur et la direction varient d'un point à l'autre de l'espace, et nous en avons déduit comme vecteur dérivé par une opération mathématique l'induction magnétique $\mathfrak{B}$; mais nous n'avons point obtenu de données qui permettent de déterminer $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ d'après la distribution des courants dans le champ. Pour cela, il nous faut trouver la relation mathématique entre ces quantités et les courants.

Nous admettrons d'abord qu'il existe des aimants permanents dont l'action mutuelle satisfait au principe de la conservation de l'énergie. Nous ne ferons sur les lois de la force magnétique d'autres hypothèses que celles qui résultent de ce principe, à savoir, que la force qui agit sur un pôle magnétique doit pouvoir se déduire d'un potentiel.

Observant alors l'action des courants et des aimants, nous trouvons que l'action d'un courant sur un aimant semble identique à celle d'un autre aimant de force, de forme et de position convenables, et que l'aimant agit sur le courant de la même manière qu'un autre courant. Il n'est pas nécessaire de supposer que ces observations aient été accompagnées de mesures de forces proprement dites. On ne doit donc pas les considérer comme nous fournissant des données numériques, mais seulement comme étant fort utiles en signalant des points à examiner.

La question que nous suggèrent ces observations est celle-ci : le champ magnétique produit par les courants électriques, semblable

à tant d'égards au champ produit par des aimants permanents, lui ressemble-t-il aussi par le fait d'être lié à un potentiel?

On a établi, aux §§ 482, 485, ce fait, qu'un circuit électrique produit dans l'espace avoisinant précisément les mêmes effets que produirait un feuillet magnétique limité par ce circuit.

Nous savons que, dans le cas d'un feuillet magnétique, il existe un potentiel qui a une valeur déterminée pour tous les points extérieurs à la substance de ce feuillet, mais dont les valeurs en deux points voisins situés de part et d'autre du feuillet diffèrent d'une quantité finie.

Si le champ magnétique au voisinage d'un courant électrique ressemble à celui qui existe au voisinage d'un feuillet magnétique, le potentiel magnétique obtenu en intégrant la force magnétique le long d'une ligne doit être le même pour deux contours d'intégration quelconques, pourvu qu'un de ces contours puisse se transformer en l'autre par un mouvement continu, sans couper le courant électrique.

Mais, si une des lignes d'intégration ne peut être ramenée à l'autre sans couper le courant, l'intégrale de la force magnétique prise le long d'une des lignes doit différer de l'intégrale prise le long de l'autre ligne d'une quantité dépendant de l'intensité du courant. Le potentiel magnétique dû à un courant électrique est donc une fonction qui a une série infinie de valeurs différant les unes des autres d'une même quantité, chaque valeur particulière dépendant de la forme de la ligne d'intégration. A l'intérieur de la masse d'un conducteur, il n'y a rien qui ressemble au potentiel magnétique.

607. Admettant que l'action magnétique d'un courant ait un potentiel de la nature que l'on vient d'indiquer, nous allons exprimer mathématiquement ce résultat.

En premier lieu, l'intégrale de la force magnétique suivant une courbe fermée quelconque est nulle, pourvu que la courbe fermée n'entoure pas le courant électrique.

En second lieu, si le courant traverse une fois, et une seule, la courbe fermée dans le sens positif, l'intégrale prise le long de la courbe a une valeur déterminée, que l'on peut prendre comme mesure de l'intensité du courant; car, si la courbe fermée change de forme d'une manière continue quelconque sans couper le courant, l'intégrale reste la même.

En mesure électromagnétique, l'intégrale de la force magnétique le long d'une courbe fermée est numériquement égale à l'intensité du courant qui traverse la courbe fermée, multipliée par 4π.

Si nous prenons pour courbe fermée le parallélogramme dont les côtés sont dy et dz, l'intégrale de la force magnétique prise le long des côtés de ce parallélogramme est

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) dy\, dz;$$

si, d'autre part, u, v, w sont les composantes du flux d'électricité, le courant qui passe à travers le parallélogramme est

$$u\, dy\, dz.$$

Multipliant par 4π, et égalant le résultat à l'intégrale, nous avons l'équation

$$(E) \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Équations des intensités}\\ \text{électriques.....}\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 4\pi u = \dfrac{\partial\gamma}{\partial y} - \dfrac{\partial\beta}{\partial z} \\ \text{et, de même,} \\ 4\pi v = \dfrac{\partial\alpha}{\partial z} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial x}, \\ 4\pi w = \dfrac{\partial\beta}{\partial x} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}, \end{array}\right.$$

qui déterminent la grandeur et la direction des courants électriques quand on donne en chaque point la force magnétique.

Quand il n'y a point de courant, ces équations équivalent à la condition que

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = -\mathrm{D}\Omega,$$

c'est-à-dire que la force magnétique peut se déduire d'un potentiel magnétique en tous les points du champ où il n'y a pas de courant.

En différentiant les équations (E) par rapport à x, y et z et ajoutant les résultats, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

qui indique que le courant, dont les composantes sont u, v et w, est soumis à la condition du mouvement des fluides incompressibles, et qu'il doit nécessairement circuler dans des circuits fermés.

Cette équation n'est vraie que si nous considérons u, v et w comme les composantes du flux électrique comprenant la variation de déplacement électrique aussi bien que la conduction proprement dite.

Nous n'avons guère de preuves expérimentales d'une action électromagnétique directe des courants dus à la variation du déplacement électrique dans les diélectriques; mais l'extrême difficulté d'ac-

corder les lois de l'électromagnétisme avec l'existence de courants électriques non fermés est une raison, parmi bien d'autres, pour nous faire admettre l'existence de courants instantanés dus à la variation de déplacement. On en verra l'importance quand nous viendrons à la théorie électromagnétique de la lumière.

608. Nous avons maintenant déterminé les relations des diverses quantités qui interviennent dans les phénomènes découverts par Œrsted, Ampère et Faraday. Pour les relier aux phénomènes décrits dans les premières Parties de cet Ouvrage, il faut quelques relations supplémentaires.

Quand une force électromotrice agit sur un corps matériel, elle produit deux effets que Faraday a appelés *induction* et *conduction;* le premier plus apparent dans les diélectriques, l'autre dans les conducteurs.

Dans ce Traité, nous avons mesuré l'électricité statique au moyen de ce que nous avons appelé le *déplacement électrique :* c'est une quantité dirigée ou vectorielle, que nous avons désignée par $\mathfrak{D}$ et dont les composantes ont été représentées par f, g, h.

Dans les substances isotropes, le déplacement s'effectue dans le sens de la force électromotrice qui le produit, et il lui est proportionnel, au moins pour de petites valeurs de cette force. C'est ce que l'on peut exprimer par l'équation

(F) Équation de déplacement électrique, $\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E}$,

où K est la capacité diélectrique de la substance. (*Voir* § 69.)

Dans les substances non isotropes, les composantes f, g, h du déplacement électrique $\mathfrak{D}$ sont des fonctions linéaires des composantes P, Q, R de la force électromotrice.

La forme des équations du déplacement électrique est semblable à celle des équations de la conduction données au § 298.

On peut exprimer ces relations en disant que, dans les substances isotropes, K est une quantité scalaire, et que, dans les autres corps, c'est une fonction linéaire et vectorielle opérant sur le vecteur $\mathfrak{E}$.

609. L'autre effet de la force électromotrice est la conduction. Les lois de la conduction, considérée comme résultat de la force électromotrice, ont été données par Ohm et sont exposées dans la seconde Partie de ce Traité (§ 241). On peut les résumer dans l'équation

(G) Équation de conduction, $\mathfrak{A} = C \mathfrak{E}$,

où $\mathfrak{E}$ est la grandeur de la force électromotrice au point considéré; $\mathfrak{A}$ est la densité du courant de conduction dont les composantes sont p, q, r; et C est la conductibilité de la substance, laquelle est une quantité scalaire dans le cas des substances isotropes, et, dans le cas des autres substances, une quantité linéaire et vectorielle opérant sur le vecteur $\mathfrak{E}$. La forme de cette fonction en coordonnées cartésiennes est donnée au § 298.

610. Une des particularités les plus importantes de ce Traité consiste dans cette théorie que le courant électrique vrai $\mathfrak{C}$ duquel dépendent les phénomènes électromagnétiques n'est pas identique au courant de conduction $\mathfrak{A}$, et que, pour évaluer le mouvement total d'électricité, on doit tenir compte de la variation dans le temps du déplacement électrique $\mathfrak{D}$, en sorte que nous devons écrire

(H) Équation du courant vrai, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \dot{\mathfrak{D}}$,

ou, en fonction des composantes,

$$(H') \qquad \begin{cases} u = p + \dfrac{df}{dt}, \\ v = q + \dfrac{dg}{dt}, \\ w = r + \dfrac{dh}{dt}. \end{cases}$$

611. Puisque $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{D}$ dépendent de la force électromotrice $\mathfrak{E}$, nous pouvons exprimer le courant vrai $\mathfrak{C}$ en fonction de la force électromotrice; on a

$$(I) \qquad \mathfrak{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt}\right) \mathfrak{E}$$

ou, dans le cas où C et K sont constants,

$$(I') \qquad \begin{cases} u = CP + \dfrac{1}{4\pi} K \dfrac{dP}{dt}, \\ v = CQ + \dfrac{1}{4\pi} K \dfrac{dQ}{dt}, \\ w = CR + \dfrac{1}{4\pi} K \dfrac{dR}{dt}. \end{cases}$$

612. La densité de volume de l'électricité libre en un point quelconque s'obtient au moyen des composantes du déplacement élec-

trique par l'équation

$$\rho = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}. \tag{J}$$

613. La densité superficielle de l'électricité est

$$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h', \tag{K}$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à la surface dirigée vers le milieu où les composantes du déplacement sont f, g, h, et l', m', n' sont celles de la normale à la surface dirigée vers le milieu où les composantes sont f', g', h'.

614. Si l'aimantation du milieu est due en entier à l'induction d'une force magnétique agissant sur ce milieu, on peut écrire l'équation du magnétisme induit

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \tag{L}$$

où μ est le coefficient de perméabilité magnétique, que l'on peut regarder comme une quantité scalaire ou comme une fonction linéaire et vectorielle opérant sur $\mathfrak{H}$, suivant que le milieu est ou non isotrope.

615. Ces relations peuvent être regardées comme les principales qui existent entre les quantités que nous avons considérées. On peut les combiner de manière à éliminer quelques-unes de ces quantités : mais notre objet présent n'est pas d'obtenir des formules mathématiques condensées, mais bien d'exprimer toutes les relations dont nous avons connaissance. En l'état de notre étude, éliminer une quantité qui exprime une idée utile serait une perte plutôt qu'un avantage.

Toutefois il y a un résultat de grande importance que nous pouvons obtenir en combinant les équations (A) et (E).

Supposons qu'il n'existe point d'aimants dans le champ, si ce n'est sous forme de circuits électriques : la distinction que nous avons maintenue jusqu'ici entre la force magnétique et l'induction magnétique disparaît, puisque c'est seulement à l'intérieur des substances aimantées que ces quantités diffèrent l'une de l'autre.

Suivant la théorie d'Ampère, qui sera exposée au § 833, les propriétés de ce que nous appelons la *matière aimantée* sont dues à des circuits électriques moléculaires. C'est donc seulement quand nous considérons la matière aimantée sous forme de grandes masses que notre théorie de l'aimantation peut s'appliquer; et, si l'on supposait

nos méthodes mathématiques capables de rendre compte de ce qui se passe dans chaque molécule séparément, elles n'y découvriraient rien que des circuits électriques, et nous trouverions la force magnétique et l'induction magnétique identiques dans tout l'espace. Pour pouvoir employer à volonté le système des mesures électrostatiques ou celui des mesures électromagnétiques, nous conserverons le coefficient μ, nous souvenant que sa valeur est l'unité dans le système électromagnétique.

616. D'après les équations (A), les composantes de l'induction magnétique sont

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

D'après les équations (E), § 607, les composantes du courant électrique sont données par

$$4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$4\pi v = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$4\pi w = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Suivant notre hypothèse, a, b, c sont respectivement identiques à $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$. Nous avons donc

$$(1) \qquad 4\pi\mu u = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial x}.$$

Si nous posons

$$(2) \qquad J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}$$

et (1)

$$(3) \qquad \nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

---

(1) On emploie ici le signe — pour mettre nos équations en accord avec celles où l'on emploie les quaternions.

nous pouvons écrire l'équation (1)

$$(4)\qquad \begin{cases} 4\pi\mu u = \dfrac{\partial J}{\partial x} + \nabla^2 F, \\ \text{de même,} \\ 4\pi\mu v = \dfrac{\partial J}{\partial y} + \nabla^2 G, \\ 4\pi\mu w = \dfrac{\partial J}{\partial z} + \nabla^2 H. \end{cases}$$

Si nous posons

$$(5)\qquad \begin{cases} F' = \mu \iiint \dfrac{u}{r}\, dx\, dy\, dz, \\ G' = \mu \iiint \dfrac{v}{r}\, dx\, dy\, dz, \\ H' = \mu \iiint \dfrac{w}{r}\, dx\, dy\, dz; \end{cases}$$

$$(6)\qquad \chi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{J}{r}\, dx\, dy\, dz,$$

où r est la distance du point donné à l'élément (x, y, z), et où les intégrations sont étendues à tout l'espace, on a

$$(7)\qquad \begin{cases} F = F' - \dfrac{d\chi}{dx}, \\ G = G' - \dfrac{d\chi}{dy}, \\ H = H' - \dfrac{d\chi}{dz}. \end{cases}$$

La quantité χ disparaît des équations (A) et n'a rapport à aucun phénomène physique. Si nous supposons qu'elle soit nulle en tout point, J est aussi nul en tous points, et les équations (5) donnent en supprimant les accents les vraies valeurs des composantes de $\mathfrak{A}$.

617. Nous pouvons donc adopter la définition suivante de $\mathfrak{A}$: c'est le potentiel vecteur du courant électrique, et il est lié à ce courant par la même relation qui existe entre le potentiel scalaire et la matière à laquelle est relatif ce potentiel ; il s'obtient par la même opération d'intégration que l'on peut décrire comme il suit :

D'un point donné, menons un vecteur qui représente en grandeur et direction un élément de courant électrique divisé par la distance de cet élément au point donné, et faisons de même pour tous les éléments du courant : la résultante de tous les vecteurs ainsi obtenus est

le potentiel du courant entier. Puisque le courant est une quantité vectorielle, son potentiel est aussi un vecteur. (*Voir* § 422.)

— Quand la distribution des courants électriques est donnée, il y a une et une seule distribution des valeurs de $\mathfrak{A}$, telle qu'en tous les points $\mathfrak{A}$ soit fini, continu, satisfasse aux équations

$$\nabla^2\mathfrak{A} = 4\pi\mu\mathfrak{C}, \qquad S.\nabla\mathfrak{A} = 0$$

et s'annule à une distance infinie du système électrique. Cette valeur est celle que donnent les équations (5) et qui peut s'écrire

$$\mathfrak{A} = \mu\iiint\frac{\mathfrak{C}}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

Expressions en quaternions des équations électromagnétiques.

618. Nous nous sommes efforcé, dans cet Ouvrage, d'éviter toute opération qui exige du lecteur la connaissance du calcul des quaternions. En même temps, nous n'avons pas hésité à introduire la notion du vecteur, là où il a été nécessaire de le faire. Quand nous avons eu l'occasion de désigner un vecteur par un symbole, nous avons employé une lettre gothique, le nombre des différents vecteurs étant si grand que les symboles favoris de Hamilton auraient été épuisés tout de suite. Donc, toutes les fois qu'une lettre gothique est employée, elle désigne un vecteur, au sens que Hamilton donnait à ce mot, et indique non seulement sa grandeur, mais aussi sa direction. Les composantes d'un vecteur sont désignées par des lettres latines ou grecques.

Les principaux vecteurs que nous avons à considérer sont :

	Symbole du vecteur.	Composantes.
Le rayon vecteur d'un point.....	ρ	$x\,y\,z$
La quantité de mouvement électromagnétique en un point.....	$\mathfrak{A}$	F G H
L'induction magnétique.....	$\mathfrak{B}$	$a\,b\,c$
Le courant électrique total.....	$\mathfrak{C}$	$u\,v\,w$
Le déplacement électrique.....	$\mathfrak{D}$	$f\,g\,h$
La force électromotrice.....	$\mathfrak{E}$	P Q R
La force mécanique.....	$\mathfrak{F}$	X Y Z
La vitesse d'un point.....	$\mathfrak{G}$ ou $\dot{\rho}$	$\dot{x}\,\dot{y}\,\dot{z}$
La force magnétique.....	$\mathfrak{H}$	$\alpha\,\beta\,\gamma$
L'intensité d'aimantation.....	$\mathfrak{I}$	A B C
Le courant de conduction.....	$\mathfrak{K}$	$p\,q\,r$

Nous avons aussi les fonctions scalaires suivantes :

Ψ, le potentiel électrique;
$\mathfrak{U}$, le potentiel magnétique (là où il existe);
e, la densité électrique;
m, la densité de la « matière magnétique ».

Enfin, nous avons les quantités suivantes qui indiquent des propriétés du milieu en chacun de ses points :

C, la conductibilité pour les courants électriques;
K, le pouvoir inducteur diélectrique;
μ, le pouvoir inducteur magnétique.

Dans les milieux isotropes, ces quantités ne sont que des fonctions scalaires de ρ; mais, en général, ce sont des fonctions linéaires et vectorielles, opérant sur les fonctions vectorielles auxquelles elles sont appliquées. Il est certain que K et μ sont toujours autoconjuguées (1), et il est probable que C l'est aussi (2).

619. Les équations (A) de l'induction magnétique, dont la première est

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$

peuvent alors s'écrire

$$\mathfrak{B} = V.\nabla\mathfrak{A},$$

où ∇ est le symbole d'opérations

$$i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

et où $V.$ indique que l'on prend la partie vectorielle du résultat de cette opération.

Puisque $\mathfrak{A}$ est soumis à la condition $S\nabla\mathfrak{A} = 0$, $\nabla\mathfrak{A}$ est un vecteur simple, et le symbole $V.$ est inutile.

Les équations (B) de la force électromotrice, dont la première est

$$P = c\dot{y} - b\dot{z} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx},$$

devient

$$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi.$$

---

(1) *Voir* § 101.*e*.

(2) Sauf dans le milieu soumis à l'action des forces magnétiques (expériences de Hall). P.

Les équations (C) de la force mécanique, dont la première est

$$X = \rho\varphi - bw - e\frac{\partial\Psi}{\partial x} - m\frac{\partial\Omega}{\partial x},$$

deviennent

$$\mathfrak{f} = V.\mathfrak{C}\mathfrak{B} - e\nabla\Psi - m\nabla\Omega.$$

Les équations (D) de l'aimantation, dont la première est

$$\alpha = \alpha + 4\pi A,$$

deviennent

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}.$$

Les équations (E) des courants électriques, dont la première est

$$4\pi u = \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z},$$

deviennent

$$4\pi\mathfrak{C} = V.\nabla\mathfrak{H}.$$

L'équation du courant de conduction est, d'après la loi de Ohm,

$$\mathfrak{K} = C\mathfrak{C}.$$

Celle du déplacement électrique est

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}K\mathfrak{C}.$$

L'équation du courant électrique total, dû tant à la variation de déplacement électrique qu'à la conduction, est

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}.$$

Quand l'aimantation est due à l'induction magnétique,

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}.$$

Nous avons aussi, pour déterminer la densité de volume,

$$e = S.\nabla\mathfrak{D}.$$

Pour déterminer la densité de volume magnétique,

$$m = S.\nabla\mathfrak{J}.$$

Quand la force magnétique peut se déduire d'un potentiel,

$$\mathfrak{H} = -\nabla\Omega.$$

CHAPITRE X.

DIMENSIONS DES UNITÉS ÉLECTRIQUES.

620. Toute quantité électromagnétique peut se définir au moyen des unités fondamentales de longueur, de masse et de temps. Si nous partons de la définition de l'unité d'électricité donnée au § 65, nous obtenons des définitions des unités de toutes les autres quantités électromagnétiques, en vertu des équations où ces quantités figurent avec des quantités d'électricité. Le système d'unités ainsi obtenu est appelé *système électrostatique*.

Si, au contraire, nous partons de la définition de l'unité de pôle magnétique, donnée au § 374, on obtient un autre système d'unités pour la même série de quantités. Ce système d'unités, qui n'est point d'accord avec le premier, est appelé *système électromagnétique*.

Nous commencerons par énoncer les relations entre les différentes unités qui sont communes aux deux systèmes, et nous formerons ensuite un Tableau des dimensions des unités dans les deux systèmes.

621. Nous disposerons par couples les quantités fondamentales que nous devons considérer. Dans les trois premiers couples, le produit des deux éléments du couple est une quantité d'énergie ou de travail. Dans les trois seconds couples, le produit des deux éléments est une quantité d'énergie par unité de volume.

TROIS PREMIERS COUPLES.

Couple électrostatique.

	Symbole.
(1) Quantité d'électricité.....	e
(2) Intégrale de la force électromotrice le long d'une ligne ou potentiel électrique.....	E

Couple magnétique.

(3) Quantité de magnétisme libre, ou force d'un pôle.....	m
(4) Potentiel magnétique.....	Ω

Couple électrocinétique.

	Symbole.
(5) Quantité de mouvement électrocinétique d'un circuit....	p
(6) Courant électrique.....	C

TROIS SECONDS COUPLES.

Couple électrostatique.

(7) Déplacement électrique (mesuré par la densité superficielle).....	$\mathfrak{D}$
(8) Force électromotrice en un point.....	$\mathfrak{E}$

Couple magnétique.

(9) Induction magnétique.....	$\mathfrak{B}$
(10) Force magnétique.....	$\mathfrak{H}$

Couple électrocinétique.

(11) Intensité du courant électrique en un point.....	$\mathfrak{C}$
(12) Potentiel vecteur des courants électriques.....	$\mathfrak{A}$

622. Entre ces quantités existent les relations suivantes : en premier lieu, puisque les dimensions de l'énergie sont $\left[\frac{L^2M}{T^2}\right]$ et celle de l'énergie rapportée à l'unité de volume $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$, nous avons les équations de dimensions qui suivent :

$$(1) \qquad [e\mathrm{E}] = [m\Omega] = [p\mathrm{C}] = \left[\frac{L^2M}{T^2}\right],$$

$$(2) \qquad [\mathfrak{D}\mathfrak{E}] = [\mathfrak{B}\mathfrak{H}] = [\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \left[\frac{M}{LT^2}\right].$$

En second lieu, e, p et $\mathfrak{A}$ sont les intégrales de temps de C, E et $\mathfrak{E}$:

$$(3) \qquad \left[\frac{e}{\mathrm{C}}\right] = \left[\frac{p}{\mathrm{E}}\right] = \left[\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\right] = [\mathrm{T}].$$

Troisièmement, E, Ω et p étant les intégrales de ligne de $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{A}$, on a

$$(4) \qquad \left[\frac{\mathrm{E}}{\mathfrak{E}}\right] = \left[\frac{\Omega}{\mathfrak{H}}\right] = \left[\frac{p}{\mathfrak{A}}\right] = [\mathrm{L}]\ (^1).$$

(1) Nous avons aussi $\left[\frac{\lambda}{\mathfrak{H}}\right] = [\mathrm{L}]$.

Enfin, puisque e, C et m sont les intégrales de surface de $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{B}$, on a

$$(5) \qquad \left[\frac{e}{\mathfrak{D}}\right] = \left[\frac{C}{\mathfrak{C}}\right] = \left[\frac{m}{\mathfrak{B}}\right] = [L^2].$$

623. Ces quinze équations ne sont pas indépendantes, et, pour en déduire les dimensions des douze unités qu'elles renferment, nous avons besoin d'une équation supplémentaire. Mais, si nous prenons e ou m comme unité indépendante, nous pouvons déduire les dimensions de toutes les autres en fonction de l'une ou l'autre de ces deux unités.

$$(1) \qquad [e] = [e] = \left[\frac{L^2 M}{m T}\right],$$

$$(2) \qquad [E] = \left[\frac{L^2 M}{e T^2}\right] = \left[\frac{m}{T}\right],$$

$$(3) \text{ et } (5) \qquad [p] = [m] = \left[\frac{L^2 M}{e T}\right] = [m],$$

$$(4) \text{ et } (6) \qquad [C] = [\Omega] = \left[\frac{e}{T}\right] = \left[\frac{L^2 M}{m T^2}\right],$$

$$(7) \qquad [\mathfrak{D}] = \left[\frac{e}{L^2}\right] = \left[\frac{M}{m T}\right],$$

$$(8) \qquad [\mathfrak{C}] = \left[\frac{LM}{e T^2}\right] = \left[\frac{m}{LT}\right],$$

$$(9) \qquad [\mathfrak{B}] = \left[\frac{M}{e T}\right] = \left[\frac{m}{L^2}\right],$$

$$(10) \qquad [\mathfrak{H}] = \left[\frac{e}{LT}\right] = \left[\frac{LM}{m T^2}\right],$$

$$(11) \qquad [\mathfrak{E}] = \left[\frac{e}{L^2 T}\right] = \left[\frac{m T^2}{M}\right],$$

$$(12) \qquad [\mathfrak{A}] = \left[\frac{LM}{e T}\right] = \left[\frac{m}{L}\right].$$

624. Les relations qui existent entre les dix premières de ces quantités peuvent être mises en évidence par la disposition suivante :

e, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, C et Ω.	E, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, m et p.
m et p, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$, E.	C et Ω, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, e.

Les quantités inscrites sur la première ligne se dérivent de e par

les mêmes opérations que les quantités inscrites sur la seconde ligne se dérivent de m. On verra que l'ordre des quantités sur la première ligne est exactement inverse de leur ordre sur la seconde. Les quatre premiers sur chaque ligne ont le symbole fondamental en numérateur; les quatre derniers l'ont en dénominateur.

Toutes les relations que l'on vient de donner sont vraies, quel que soit le système d'unités adopté.

625. Les seuls systèmes ayant une valeur scientifique sont les systèmes électrostatique et électromagnétique. Le système électrostatique est fondé sur la définition de l'unité d'électricité (§ 41 et 42) et peut se déduire de l'équation

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{L^2},$$

qui exprime que la force résultante en un point $\mathfrak{E}$, due à l'action d'une quantité e d'électricité située à une distance L, s'obtient en divisant e par L^2. Substituant dans les équations de dimensions (1) et (8), nous trouvons

$$\left[\frac{LM}{eT^2}\right] = \left[\frac{e}{L^2}\right], \qquad \left[\frac{m}{LT}\right] = \left[\frac{M}{mT}\right],$$

d'où

$$[e] = \left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right], \qquad [m] = \left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}\right],$$

dans le système électrostatique.

Le système électromagnétique est fondé sur une définition absolument semblable de l'unité de force pour un pôle magnétique (§ 374) qui conduit à l'équation

$$\mathfrak{H} = \frac{m}{L^2};$$

d'où

$$\left[\frac{e}{LT}\right] = \left[\frac{M}{eT}\right], \qquad \left[\frac{LM}{mT^2}\right] = \left[\frac{m}{L^2}\right]$$

et

$$[e] = \left[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}\right], \qquad [m] = \left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right],$$

dans le système électromagnétique. De ces résultats, nous tirons les dimensions des autres quantités :

626. *Tableau de dimensions.*

	Symbole.	Dimensions dans le système électrostatique.	Dimensions dans le système électromagnétique.
Quantité d'électricité.....	e	$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$
Intégrale de la force électromotrice le long d'une ligne de...	E	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$	$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$
Quantité de magnétisme.....	m	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Quantité de mouvement électrocinétique d'un circuit.....	p		
Courant électrique.....	C	$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Potentiel magnétique.....	Ω		
Déplacement électrique.....	$\mathfrak{D}$	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$	$[L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$
Densité superficielle.....			
Force électromotrice en un point.	$\mathfrak{E}$	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$
Induction magnétique.....	$\mathfrak{B}$	$[L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Force magnétique.....	$\mathfrak{H}$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Intensité d'un courant en un point.	$\mathfrak{C}$	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Potentiel vecteur.....	$\mathfrak{A}$	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$

627. Nous avons déjà considéré les produits des couples de ces quantités dans l'ordre où elles sont données. Leurs rapports ont, dans certains cas, une importance scientifique. Ainsi :

	Symbole.	Systèmes électrostatique.	Systèmes électromagnétique.
$\frac{e}{E}$ = capacité d'un condensateur.	q	$[L]$	$\left[\frac{T^2}{L}\right]$
$\frac{p}{C}$ = coefficient de self-induction d'un circuit, ou capacité électromagnétique.....	L	$\left[\frac{T^2}{L}\right]$	$[L]$
$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}}$ = pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique.....	K	$[o]$	$\left[\frac{T^2}{L^2}\right]$

	Symbole.	Systèmes électrostatique.	Systèmes électromagnétique.
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$ = pouvoir inducteur magnétique.....	μ	$\left[\frac{T^2}{L^2}\right]$	[o]
$\frac{E}{C}$ = résistance d'un conducteur.	R	$\left[\frac{T}{L}\right]$	$\left[\frac{L}{T}\right]$
$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{C}}$ = résistance spécifique d'une substance.....	r	[T]	$\left[\frac{L^2}{T}\right]$

628. Si les unités de longueur, de masse et de temps sont les mêmes dans les deux systèmes, le nombre des unités électrostatiques d'électricité contenues dans une unité électromagnétique est numériquement égal à une certaine vitesse, dont la grandeur absolue ne dépend point de la grandeur des unités fondamentales employées. Cette vitesse est une quantité physique importante, que nous désignerons par le symbole v.

Nombre d'unités électrostatiques contenues dans une unité électromagnétique.

Pour e, C, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{C}$.... v;

Pour m, p, E, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{A}$,... $\frac{1}{v}$;

Pour la capacité électrostatique, le pouvoir inducteur diélectrique et la conductibilité, ... v^2;

Pour la capacité électromagnétique, le pouvoir inducteur magnétique et la résistance, ..., $\frac{1}{v^2}$.

On donnera, aux §§ 768, 780, différentes méthodes pour déterminer la vitesse v.

Dans le système électrostatique, on admet que le pouvoir inducteur spécifique diélectrique de l'air est égal à l'unité. Cette quantité est donc représentée par $\frac{1}{v^2}$ dans le système électromagnétique.

Dans le système électromagnétique, on admet que le pouvoir inducteur spécifique magnétique de l'air est égal à l'unité. Cette quantité est donc représentée par $\frac{1}{v^2}$ dans le système électrostatique.

Système pratique d'unités électriques.

629. De ces deux systèmes, le système électromagnétique est celui qu'emploient le plus volontiers les électriciens pratiques qui s'occupent des télégraphes électromagnétiques. Mais, si les unités de longueur, de temps et de masse sont celles qui sont ordinairement employées dans les autres Ouvrages scientifiques, à savoir le mètre ou le centimètre, la seconde et le gramme, les unités de résistance et de force électromotrice sont si petites que, pour représenter les quantités que l'on rencontre dans la pratique, il faut des nombres énormes; et les unités de quantité et de capacité sont si grandes qu'on n'en rencontrerait jamais dans la pratique, que des fractions extrêmement petites. Aussi les électriciens pratiques ont-ils adopté une série d'unités électriques se déduisant par le système électromagnétique d'une unité de longueur très grande et d'une unité de masse très petite.

L'unité de longueur employée à cet effet est de dix millions de mètres, ou environ la longueur d'un quart de méridien terrestre.

L'unité de temps est, comme auparavant, la seconde.

L'unité de masse est 10^{-11} d'un gramme ou la cent-millionième partie d'un milligramme.

Les unités électriques déduites de ces unités fondamentales ont reçu les noms d'hommes ayant fait d'importantes découvertes en électricité. Ainsi, l'unité pratique de résistance est appelée *ohm*, et elle est représentée par la bobine construite par l'Association britannique, que nous avons décrite au § 310. Elle est exprimée dans le système électromagnétique par une vitesse de 10000000 de mètres par seconde.

L'unité pratique de force électromotrice est appelée le *volt* et ne diffère pas beaucoup de la force électromotrice d'un élément Daniell. M. Latimer Clark a imaginé récemment une pile très constante dont la force électromotrice est presque exactement 1,457 volts.

L'unité pratique de capacité est appelée *farad*. La quantité d'électricité qui, dans l'intervalle d'une seconde, traverse une résistance de 1 ohm sous l'action d'une force électromotrice de 1 volt, est égale à la charge donnée par une force électromotrice de 1 volt à un condensateur dont la capacité est de 1 farad.

On a trouvé plus commode pour la pratique d'employer ces noms que de répéter constamment les mots « unités électromagnétiques », et d'avoir encore à mentionner des unités fondamentales particulières sur lesquelles est établi le système.

Quand on doit mesurer de très grandes quantités, on forme une grande unité en multipliant l'unité originale par un million, et en faisant précéder son nom de la désignation *mega*.

De même, le préfixe *micro* désigne une petite unité, formée en prenant la millionième partie de l'unité originale.

Le Tableau suivant donne les valeurs de ces unités pratiques dans les divers systèmes qui ont été employés à différentes époques :

UNITÉS FONDAMENTALES.	SYSTÈME PRATIQUE.	ASSOCIATION BRITANNIQUE 1863.	THOMSON.	WEBER.
Longueur. Temps. Masse.	Quart de méridien. Seconde. 10^{-11} gramme.	Mètre. Seconde. Gramme.	Centimètre. Seconde. Gramme.	Millimètre. Seconde. Milligramme.
Résistance.....	Ohm.	10^{7}	10^{9}	10^{10}
Force électromotrice	Volt.	10^{8}	10^{8}	10^{11}
Capacité.....	Farad.	10^{-7}	10^{-9}	10^{-10}
Quantité..	Farad chargé à un Volt.	10^{-1}	10^{-1}	10

Note. — [Le congrès international des Électriciens, réuni à Paris en 1881, a donné le nom de Coulomb à l'unité pratique de quantité définie ci-dessus, et celui d'Ampère à l'unité pratique de courant correspondant, soit 10^{-1} C.G.S. P.]

CHAPITRE XI.

ÉNERGIE ET TENSIONS DANS LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

Énergie électrostatique.

630. L'énergie du système peut se partager en énergie potentielle et énergie cinétique.

On a déjà considéré, au § 85, l'énergie potentielle due à l'électrisation. On peut la représenter par

$$W = \frac{1}{2}\sum(e\Psi), \tag{1}$$

e étant la charge d'électricité au point où le potentiel électrique est Ψ, et la sommation étant étendue à tous les points où il y a de l'électricité.

Si f, g, h sont les composantes du déplacement électrique, la quantité d'électricité qui se trouve dans l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ est

$$e = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \tag{2}$$

et

$$W = \frac{1}{2}\int\int\int\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)\Psi\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

l'intégration étant étendue à tout l'espace.

631. Intégrons cette expression par parties en nous souvenant que, quand la distance r à un point donné d'un système électrique fini devient infinie, le potentiel Ψ devient une quantité infiniment petite d'ordre r^{-1}, et les quantités f, g, h des quantités infiniment petites d'ordre r^{-2}, l'expression se réduit à

$$W = -\frac{1}{2}\int\int\int\left(f\frac{\partial\Psi}{\partial x} + g\frac{\partial\Psi}{\partial y} + h\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

l'intégration étant étendue à tout l'espace.

Si, maintenant, nous posons P, Q, R pour les composantes de la force

électromotrice, au lieu de $-\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, $-\frac{\partial\Psi}{\partial y}$ et $-\frac{\partial\Psi}{\partial z}$, nous trouvons

$$W = \frac{1}{2}\int\int\int (Pf + Qg + Rh)\,dx\,dy\,dz. \tag{5}$$

Ainsi, l'énergie électrostatique du champ tout entier reste la même, si nous supposons qu'elle réside en tous les points du champ où l'on observe une force et un déplacement électriques, au lieu de la supposer concentrée aux endroits où l'on observe de l'électricité libre.

L'énergie rapportée à l'unité de volume est le demi-produit de la force électromotrice par le déplacement électrique, et par le cosinus de l'angle compris entre ces deux vecteurs.

Dans le langage des quaternions, c'est $-\frac{1}{2}S.\mathfrak{CD}$.

Énergie magnétique.

632 (1). Nous pouvons traiter l'énergie due à l'aimantation par la même méthode que nous avons employée dans le cas de l'électrisation (§ 85). Si A, B, C sont les composantes de l'aimantation, α, β, γ les composantes de la force magnétique, l'énergie potentielle du système d'aimants est, d'après le § 389,

$$-\frac{1}{2}\int\int\int (A\alpha + B\beta + C\gamma)\,dx\,dy\,dz, \tag{6}$$

l'intégration étant étendue à tout l'espace occupé par la matière magnétique. Mais cette partie de l'énergie sera comprise dans l'énergie cinétique sous la forme que nous allons lui donner.

633. Quand il n'y a pas de courants électriques, nous pouvons transformer cette équation par la méthode suivante :

Nous savons que

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Donc, par le § 97, si

$$\alpha = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \qquad \beta = -\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \qquad \gamma = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}, \tag{8}$$

ce qui est toujours le cas dans les phénomènes magnétiques où n'in-

(1) *Voir* Appendice I, à la fin du Chapitre.

terviennent point de courants,

$$(9) \qquad \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace, ou encore

$$(10) \qquad \iiint [(\alpha + 4\pi A)\alpha + (\beta + 4\pi B)\beta + (\gamma + 4\pi C)\gamma]\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Donc, l'énergie due à un système magnétique est

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{2}\iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, dx\, dy\, dz \\ &= \frac{1}{8\pi}\iiint (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{H}^2\, dx\, dy\, dz. \end{aligned} \right.$$

Énergie électrocinétique.

634. Nous avons déjà exprimé (§ 578) l'énergie cinétique d'un système de courants sous la forme

$$(12) \qquad T = \frac{1}{2}\sum (pi),$$

où p est le moment électromagnétique du circuit, et i l'intensité du courant qui circule dans ce circuit, et où la sommation s'étend à tous les circuits.

Nous avons montré, au § 590, que p peut s'exprimer par une intégrale de ligne de la forme

$$(13) \qquad p = \int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds} \right) ds.$$

où F, G, H sont les composantes de la quantité de mouvement électromagnétique $\mathfrak{A}$ au point (x, y, z), et où l'intégration doit être étendue tout le long du circuit fermé s. Nous trouvons donc

$$(14) \qquad T = \frac{1}{2}\sum i \int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Si u, v, w sont les composantes de la densité du courant en un point quelconque du circuit conducteur, et si S est la section transversale du circuit, nous pouvons écrire

$$(15) \qquad i\frac{dx}{ds} = uS, \qquad i\frac{dy}{ds} = vS, \qquad i\frac{dz}{ds} = wS,$$

et nous pouvons aussi écrire le volume $dx\,dy\,dz$

$$S\,ds = dx\,dy\,dz;$$

nous trouvons ainsi

$$(16) \qquad T = \frac{1}{2}\int\int\int (F u + G v + H w)\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégration étant étendue à tous les points de l'espace où il y a des courants électriques.

635. Substituons maintenant à u, v, w les valeurs tirées des équations des courants électriques (E), § 607, en fonction des composantes α, β, γ de la force magnétique. Nous avons alors

$$(17) \quad \left\{ T = \frac{1}{8\pi}\int\int\int \left[F\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + H\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right] dx\,dy\,dz, \right.$$

l'intégration s'étendant à une région de l'espace comprenant tous les courants.

Intégrons par partie, et remarquons qu'à une grande distance r du système α, β, γ sont de l'ordre de grandeur r^{-3} : nous trouvons qu'en étendant l'intégration à tout l'espace, l'expression se réduit à

$$(18) \quad \left\{ T = \frac{1}{8\pi}\int\int\int \left[\alpha\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\right] dx\,dy\,dz. \right.$$

D'après les équations (A) de l'induction magnétique, § 591, nous pouvons substituer aux quantités comprises dans les petites parenthèses les composantes a, b, c de l'induction magnétique, de sorte que l'énergie cinétique peut s'écrire

$$(19) \qquad T = \frac{1}{8\pi}\int\int\int (a\alpha + b\beta + c\gamma)\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégration étant étendue à toutes les parties de l'espace où la force magnétique et l'induction magnétique ont des valeurs différentes de zéro.

Dans cette expression, la quantité entre parenthèses est le produit de l'induction magnétique par les composantes de la force magnétique suivant la direction de l'induction.

C'est ce que l'on peut écrire, dans le langage des quaternions,

$$-S.\mathfrak{B}\mathfrak{H},$$

où $\mathfrak{B}$ est l'induction magnétique, dont les composantes sont a, b et c, et $\mathfrak{H}$ la force magnétique dont les composantes sont α, β, γ.

636. On peut donc exprimer l'énergie électrocinétique du système, soit sous forme d'une intégrale prise pour tous les points où il y a des courants électriques, soit sous forme d'intégrale étendue à tous les points du champ où existe une force magnétique.

La première intégrale est l'expression naturelle de la théorie qui veut que les courants exercent les uns sur les autres une action directe à distance; la seconde convient à la théorie qui essaye d'expliquer l'action des courants par quelque action intermédiaire s'exerçant dans le milieu compris entre les circuits. Comme c'est cette dernière méthode de recherche que nous avons adoptée dans ce Traité, il sera naturel d'employer la seconde expression, comme étant la forme la plus significative que l'on puisse donner à l'énergie cinétique.

Dans notre hypothèse, nous admettons que l'énergie cinétique existe partout où il y a force magnétique, c'est-à-dire en tous les points du champ en général. La grandeur de cette énergie, par unité de volume, est

$$-\frac{1}{8\pi}S.\mathfrak{B}\mathfrak{H},$$

et cette énergie existe en tous points de l'espace sous forme d'un certain mouvement de la matière.

Quand nous en viendrons à étudier l'effet découvert par Faraday du magnétisme sur la lumière polarisée, nous exposerons les raisons que nous avons de croire que là où il y a des lignes de force magnétique, il y a un mouvement de rotation de la matière autour de ces lignes. *Voir* § 821.

Comparaison des énergies magnétique et électrocinétique.

637. Nous avons trouvé (§ 423) que l'énergie potentielle mutuelle de deux feuillets magnétiques de puissances φ et φ', limités par les courbes fermées s et s', est

$$-\varphi\varphi'\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds',$$

ε étant l'angle des directions de ds et ds', et r la distance de ces points.

Nous avons aussi trouvé, au § 521, que l'énergie mutuelle de deux circuits s et s', traversés par deux courants i et i', est

$$ii' \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds'.$$

Si i et i' sont respectivement égaux à φ et à φ', l'action mécanique exercée entre les feuillets magnétiques est égale à celle qui agit entre les circuits électriques correspondants, et de même sens. Dans le cas des feuillets, la force tend à diminuer leur énergie potentielle mutuelle; dans le cas des courants, elle tend à accroître leur énergie mutuelle, parce que cette énergie est cinétique.

Il n'est pas possible, par aucun arrangement de matière magnétique, de produire un système correspondant à tous égards à un circuit électrique; car le potentiel du système magnétique n'a qu'une valeur en chaque point de l'espace, tandis que celui du système électrique en a un nombre quelconque.

Mais il est toujours possible de disposer des circuits électriques infiniment petits, de manière à former un système correspondant à tous égards à un système magnétique donné, pourvu que l'on ne fasse pas passer à travers un de ces petits circuits la ligne d'intégration suivie pour calculer le potentiel. C'est ce que l'on expliquera plus au long au § 833.

L'action des aimants à distance est parfaitement semblable à celle des courants électriques. Nous essayerons donc d'expliquer les deux par la même cause, et, puisque nous ne pouvons expliquer les courants électriques au moyen d'aimants, nous devons adopter l'autre hypothèse et essayer d'expliquer les aimants au moyen de courants électriques moléculaires.

638. Dans l'étude que nous avons faite des phénomènes magnétiques, à la IIIe Partie de ce Traité, nous n'avons point essayé de donner une explication de l'action magnétique à distance : nous avons considéré cette action comme un fait fondamental résultant de l'expérience. Nous avons donc admis que l'énergie d'un système magnétique est de l'énergie potentielle, et que cette énergie *diminue* quand les parties du système cèdent à l'action des forces magnétiques qui agissent sur elles.

Mais, si nous considérons les aimants comme devant leurs propriétés à des courants électriques circulant à l'intérieur de leurs molécules,

leur énergie est cinétique, et la force qui agit entre eux tend à les mouvoir dans une direction telle que, si les intensités des courants étaient maintenues constantes, l'énergie cinétique serait augmentée.

Cette façon d'expliquer le magnétisme exige aussi que nous abandonnions la méthode suivie à la IIIe Partie, où nous considérions l'aimant comme un corps continu et homogène, dont la plus minime partie a des propriétés magnétiques semblables à celles du tout.

Nous devons maintenant considérer un aimant comme un nombre très considérable de circuits électriques, de sorte que sa structure est essentiellement moléculaire, et toute différente d'une structure continue.

Si nous supposons notre instrument mathématique si grossier, que notre ligne d'intégration ne puisse traverser un de ces circuits moléculaires, et que notre élément du volume renferme toujours un nombre immense de molécules magnétiques, nous arriverons encore à des résultats semblables à ceux de la IIIe Partie; mais, si nous supposons notre instrument plus parfait et capable d'étudier tout ce qui se passe à l'intérieur des molécules, nous devons abandonner l'ancienne théorie du magnétisme et adopter la théorie d'Ampère, qui n'admet pas d'autres aimants que ceux que forment les courants électriques.

Nous devons aussi considérer l'énergie magnétique et l'énergie électromagnétique comme étant de l'énergie cinétique, et leur attribuer un signe en conséquence, ainsi que cela a été fait au § 635.

Par la suite, nous pourrons à l'occasion (§ 639 et suiv.) essayer de développer l'ancienne théorie du magnétisme; mais nous reconnaîtrons que nous ne pouvons obtenir de système parfaitement coordonné, qu'en abandonnant cette théorie pour celle des courants moléculaires d'Ampère, telle qu'elle est donnée au § 644.

Dès lors, l'énergie du champ ne comprend que deux parties : l'énergie électrostatique ou potentielle,

$$W = \frac{1}{2}\int\int\int (Pf + Qg + Rh)\,dx\,dy\,dz,$$

et l'énergie électromagnétique ou cinétique

$$T = \frac{1}{8\pi}\int\int\int (a\alpha + b\beta + c\gamma)\,dx\,dy\,dz.$$

Des forces qui agissent sur un élément d'un corps placé dans le champ électromagnétique.

Forces agissant sur un élément magnétique.

639 (1). Soit $dx\,dy\,dz$ un élément d'un corps aimanté avec une intensité dont les composantes sont A, B et C; et soient α, β, γ les composantes du champ magnétique où il est placé; son énergie potentielle est

$$-(A\alpha + B\beta + C\gamma)\,dx\,dy\,dz.$$

Si donc $X_1\,dx\,dy\,dz$ est la force qui pousse le corps à se mouvoir sans rotation dans la direction des x

$$X_1 = A\frac{\partial\alpha}{\partial x} + B\frac{\partial\beta}{\partial y} + C\frac{\partial\gamma}{\partial z}; \tag{1}$$

et si $L\,dx\,dy\,dz$ est le moment du couple, qui tend à faire tourner le corps autour de l'axe des x de y vers z,

$$L = B\gamma - C\beta. \tag{2}$$

La force et le moment correspondant aux directions des y et des z se déduiront de ces expressions par les permutations convenables.

640. Si le corps aimanté est traversé par un courant électrique dont les composantes sont u, v et w, il en résulte, d'après les équations (C), § 603, une force électromagnétique additionnelle, dont les composantes sont X_2, Y_2, Z_2, X_2 étant égal à

$$X_2 = vc - wb. \tag{3}$$

Donc, la force totale X, due à l'aimantation de la molécule et au courant qui la traverse, est

$$X = A\frac{\partial\alpha}{\partial x} + B\frac{\partial\beta}{\partial y} + C\frac{\partial\gamma}{\partial z} + vc - wb. \tag{4}$$

Les quantités a, b, c sont les composantes de l'induction magnétique, et sont liées aux composantes α, β, γ de la force magnétique

---

(1) *Voir* Appendice II, à la fin du Chapitre.

par les équations données au § 400,

$$(5)\qquad \begin{cases} a = \alpha + 4\pi A, \\ b = \beta + 4\pi B, \\ c = \gamma + 4\pi C. \end{cases}$$

Les composantes u, v, w de l'intensité peuvent s'exprimer en fonction de α, β, γ par les équations du § 607,

$$(6)\qquad \begin{cases} 4\pi u = \dfrac{d\gamma}{dy} - \dfrac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v = \dfrac{d\alpha}{dz} - \dfrac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w = \dfrac{d\beta}{dx} - \dfrac{d\alpha}{dy}; \end{cases}$$

d'où

$$(7)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{1}{4\pi}\left[(a-\alpha)\dfrac{d\alpha}{dx} + (b-\beta)\dfrac{d\beta}{dy} + (c-\gamma)\dfrac{d\gamma}{dz}\right. \\ \qquad\qquad \left. + b\left(\dfrac{d\alpha}{dy} - \dfrac{d\beta}{dx}\right) + c\left(\dfrac{d\alpha}{dz} - \dfrac{d\gamma}{dx}\right)\right] \\ \quad = \dfrac{1}{4\pi}\left[a\dfrac{d\alpha}{dx} + b\dfrac{d\alpha}{dy} + c\dfrac{d\alpha}{dz} - \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right]. \end{cases}$$

Par le § 403,

$$(8)\qquad \frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0.$$

Multipliant cette équation (8) par α et divisant par 4π, nous pouvons ajouter le résultat à (7), ce qui donne

$$(9)\qquad X = \frac{1}{4\pi}\left\{[a\alpha - \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)] + \frac{d}{dy}(b\alpha) + \frac{d}{dz}(c\alpha)\right\}.$$

Nous avons aussi, par (2),

$$(10)\qquad L = \frac{1}{4\pi}[(b-\beta)\gamma - (c-\gamma)\beta],$$

$$(11)\qquad = \frac{1}{4\pi}(b\gamma - c\beta),$$

X étant la force qui agit sur l'unité de volume dans la direction des x, et où L est le moment des forces autour de cet axe.

Explication de ces forces par l'hypothèse d'un milieu soumis à un état de déformation.

641. Désignons par un symbole de la forme P_{hk} une déformation d'espèce quelconque, rapportée à l'unité de surface : le premier indice h indiquant que la normale à la surface à laquelle on suppose appliquée la déformation est parallèle à l'axe des h; et le deuxième indice k signifiant que l'axe des k est parallèle à la direction de la pression que la partie du corps située du côté positif de la surface exerce sur la partie située du côté négatif.

Les directions de h et de k peuvent être les mêmes, auquel cas la pression est une pression normale. Elles peuvent être obliques l'une à l'autre, auquel cas la pression est une pression oblique; ou peuvent être perpendiculaires l'une à l'autre, auquel cas la pression est une pression tangentielle.

La condition pour que les pressions ne tendent point à produire de rotations dans les parties élémentaires du corps est

$$P_{hk} = P_{kh}.$$

Dans le cas d'un corps aimanté, il y a tendance à une telle rotation ; par suite, cette condition, qui est satisfaite dans la théorie ordinaire des déformations, n'est plus remplie.

Considérons l'effet des pressions sur les six faces de l'élément $dx\,dy\,dz$ du corps, l'origine des coordonnées étant prise à son centre de gravité.

Sur la face positive $dy\,dz$, pour laquelle la valeur de x est $\frac{1}{2}dx$, les forces sont

$$(12)\quad \begin{cases} \text{Parallèlement aux } x\ldots & \left(P_{xx} + \frac{1}{2}\frac{dP_{xx}}{dx}\,dx\right) dy\,dz = X_{+x}, \\ \text{Parallèlement aux } y\ldots & \left(P_{xy} + \frac{1}{2}\frac{dP_{xy}}{dy}\,dx\right) dy\,dz = Y_{+x}, \\ \text{Parallèlement aux } z\ldots & \left(P_{xz} + \frac{1}{2}\frac{dP_{xz}}{dx}\,dx\right) dy\,dz = Z_{+x}. \end{cases}$$

Les forces qui agissent sur la face opposée, $-X_{-x}$, $-Y_{-y}$, $-Z_{-z}$ peuvent se déduire de ces formules en changeant le signe de dx. Nous pouvons exprimer de même les systèmes de trois forces qui agissent sur chacune des autres faces de l'élément, la direction de la force étant indiquée par la lettre majuscule et la face sur laquelle elle agit par l'indice.

Si $X\,dx\,dy\,dz$ est la force totale qui agit sur l'élément parallèlement aux x,

$$\begin{aligned} X\,dx\,dy\,dz &= X_{+x} + X_{+y} + X_{+z} + X_{-x} + X_{-y} + X_{-z} \\ &= \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz; \end{aligned}$$

d'où

$$X = \frac{\partial}{\partial x} P_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} P_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} P_{zx}. \tag{13}$$

Si $L\,dx\,dy\,dz$ est le moment des forces qui tendent à faire tourner l'élément de y vers z autour de l'axe des x,

$$\begin{aligned} L\,dx\,dy\,dz &= \tfrac{1}{2}\,dy(Z_{+y} - Z_{-y}) - \tfrac{1}{2}\,dz(Y_{+z} - Y_{-z}) \\ &= (P_{yz} - P_{zy})\,dx\,dy\,dz; \end{aligned}$$

d'où

$$L = P_{yz} - P_{zy}. \tag{14}$$

Comparons les valeurs de X et de L, données par les équations (9) et (11), à celles données par les équations (13) et (14). Si nous faisons

$$\left\{\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{4\pi}\left[a\alpha - \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\right], \\ P_{yy} &= \frac{1}{4\pi}\left[b\beta - \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\right], \\ P_{zz} &= \frac{1}{4\pi}\left[c\gamma - \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\right]; \\ P_{yz} &= \frac{1}{4\pi}\,b\gamma, \qquad P_{zy} = \frac{1}{4\pi}\,c\beta, \\ P_{zx} &= \frac{1}{4\pi}\,c\alpha, \qquad P_{xz} = \frac{1}{4\pi}\,a\gamma, \\ P_{xy} &= \frac{1}{4\pi}\,a\beta, \qquad P_{yx} = \frac{1}{4\pi}\,b\alpha, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

nous voyons qu'au point de vue statique une force due au système de pressions ayant ces composantes serait équivalente, quant aux effets produits sur chaque élément du corps, aux forces dues à l'aimantation et aux courants électriques.

642. Il est aisé de trouver la nature de la pression qui a ces composantes. Prenons pour axe des x la bissectrice de l'angle que forment les directions de la force magnétique et de l'induction magnétique, et prenons l'axe des y dans le plan de ces deux directions, et compté du côté de la force magnétique.

Désignons par $\mathfrak{H}$ la valeur numérique de la force magnétique, par $\mathfrak{B}$ celle de l'induction magnétique, et par ε l'angle de leurs directions :

$$(16)\qquad \begin{cases} \alpha = \mathfrak{H}\cos\varepsilon, & \beta = \mathfrak{H}\sin\varepsilon, & \gamma = 0, \\ a = \mathfrak{B}\cos\varepsilon, & b = \mathfrak{B}\sin\varepsilon, & c = 0; \end{cases}$$

$$(17)\qquad \begin{cases} P_{xx} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon - \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \\ P_{yy} = \frac{1}{4\pi}\left(-\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon - \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \\ P_{zz} = -\frac{1}{4\pi}\left(-\tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \\ P_{yz} = P_{zx} = P_{xy} = P_{xz} = 0, \\ P_{xy} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon, \\ P_{yx} = -\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon. \end{cases}$$

Donc, on peut considérer l'état de déformation comme dû à :

1° Une compression égale dans toutes les directions, et égale à $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$;

2° Une tension suivant la bissectrice de l'angle compris entre les directions de la force magnétique et de l'induction magnétique, égale à $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon$;

3° Une compression suivant la bissectrice extérieure de l'angle de ces deux directions, égale à $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon$;

4° Un couple tendant à faire tourner chaque élément du corps dans le plan des deux directions de l'induction magnétique et de la force magnétique, de la première vers la seconde, et égale à $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin 2\varepsilon$.

Si l'induction magnétique est dans le même sens que la force magnétique, ce qui est toujours le cas dans les solides non aimantés et les fluides, $\varepsilon = 0$, et faisant coïncider l'axe des x avec la direction de la force magnétique,

$$(18)\qquad \begin{cases} P_{xx} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{B}\mathfrak{H} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \\ P_{yy} = P_{zz} = -\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2, \end{cases}$$

et les pressions tangentielles disparaissent.

Dans ce cas, la pression consiste en une pression hydrostatique

égale à $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$, combinée avec une tension longitudinale dirigée suivant les lignes de force et égale à $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}$.

613. Quand il n'y a point d'aimantation, $\mathfrak{B}=\mathfrak{H}$, et la pression se simplifie encore : elle consiste en une tension égale à $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$, suivant les lignes de force, et une pression aussi égale à $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$, suivant toutes les directions perpendiculaires à la direction des lignes de force. Dans ce cas important, les composantes des tensions sont

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{8\pi}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2),\\ P_{yy} &= \frac{1}{8\pi}(\beta^2-\alpha^2-\gamma^2),\\ P_{zz} &= \frac{1}{8\pi}(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2);\\ P_{yz} &= P_{zy} = \frac{1}{4\pi}\beta\gamma,\\ P_{zx} &= P_{xz} = \frac{1}{4\pi}\gamma\alpha,\\ P_{xy} &= P_{yx} = \frac{1}{4\pi}\alpha\beta. \end{aligned}\right.$$

La composante suivant les x de la force développée par ces pressions sur un élément du milieu est, par unité de volume,

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x}P_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}P_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}P_{zx}\\ &= \frac{1}{4\pi}\left(a\frac{\partial\alpha}{\partial x} - b\frac{\partial\beta}{\partial y} - c\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y} + \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\\ &\qquad + \frac{1}{4\pi}\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\\ &= \frac{1}{4\pi}\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) + \frac{1}{4\pi}\gamma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) - \frac{1}{4\pi}\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} &= 4\pi m,\\ \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} &= 4\pi v,\\ \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} &= 4\pi w, \end{aligned}$$

où m est la densité de la matière magnétique australe, par unité de volume, et où v et w sont les composantes des courants électriques, par unité d'aire comptée perpendiculairement à y ou à z.

D'où

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Équations de la force}\\ \text{électromagnétique.....}\end{array}\right. \quad \begin{cases} X = \alpha m + v\gamma - w\beta, \\ Y = \beta m + w\alpha - u\gamma, \\ Z = \gamma m + u\beta - v\alpha. \end{cases}$$

644. Si nous adoptons les vues d'Ampère et de Weber, sur la nature des corps magnétiques et diamagnétiques, et si nous admettons que la polarité magnétique ou diamagnétique est due à des courants électriques moléculaires, nous faisons disparaître cette matière magnétique idéale, ce qui revient à écrire, pour tous les points de l'espace,

$$m = 0$$

et

$$(21)\qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0;$$

de sorte que les équations de la force électromagnétique deviennent

$$(22)\qquad \begin{cases} X = v\gamma - w\beta, \\ Y = w\alpha - u\gamma, \\ Z = u\beta - v\alpha. \end{cases}$$

Telles sont les composantes de la force mécanique par unité de volume de la substance. Les composantes de la force magnétique sont α, β, γ; celles des courants électriques sont u, v, w. Ces équations sont identiques à celles qui ont déjà été établies [équation (C), § 603].

645. En expliquant la force électromagnétique au moyen d'un état de tension du milieu, nous ne faisons que poursuivre la conception de Faraday (1), suivant laquelle les lignes de force tendent à se raccourcir, et se repoussent les unes les autres quand elles sont placées côte à côte.

Nous n'avons rien fait qu'exprimer en un langage mathématique, la grandeur de la tension qui s'exerce le long de ces lignes et de la pression qui agit suivant les directions perpendiculaires; que prouver que l'état de tension, tel que nous l'avons supposé exister dans le mi-

(1) *Exp. Res.*, 3266, 3267, 3268.

lieu, produirait effectivement les forces dont on observe l'effet sur les conducteurs traversés par des courants électriques.

Nous n'avons rien affirmé, jusqu'à présent, sur la façon dont cet état de déformation prend naissance et se maintient dans le milieu. Nous avons seulement montré qu'il est possible de concevoir l'action réciproque des courants électriques comme dépendant d'un état particulier de déformation du milieu ambiant, au lieu d'y voir une action à distance directe et immédiate.

Tout nouveau développement sur cet état de déformation, l'expliquant par le mouvement du milieu ou autrement, doit être considéré comme une partie distincte et indépendante de la théorie présente; sa confirmation ou sa ruine n'affecterait en rien les résultats acquis jusqu'ici. (*Voir* § 832.)

Dans la première Partie de ce Traité (§ 108), nous avons montré que l'on peut concevoir l'action des forces électrostatiques comme s'exerçant par l'intermédiaire du milieu environnant soumis à certaines déformations. Nous venons de faire la même chose pour les forces électromagnétiques; maintenant, il reste à voir si cette conception d'un milieu susceptible de supporter ces déformations peut s'accorder avec les autres phénomènes connus, ou bien s'il faut l'abandonner comme étant sans avantages.

Dans un champ où il s'exerce à la fois des tensions électrostatiques et des tensions électromagnétiques, nous devons supposer que la déformation électrostatique, décrite dans la première Partie, se superpose à la déformation électromagnétique que nous venons de considérer.

646. Si nous admettons que la force totale due au magnétisme terrestre soit de 10 unités britanniques (pied, grain, seconde), ce qu'elle est à peu près en Angleterre, la tension suivant les lignes de force est de 0,128 grain par pied carré. La plus forte tension magnétique obtenue par Joule (1), au moyen d'électro-aimants, était d'environ 140 pounds par inch carré (9800 grammes par centimètre carré).

(1) *Annales d'électricité*, de Sturgeon, t. V, p. 187, 1840; ou *Philosophical Magazine*, déc. 1851.

APPENDICE I.

[La Note suivante, tirée d'une lettre écrite par le professeur Clerk Maxwell au professeur Chrystal a une grande importance par rapport aux §§ 389 et 632.]

Au § 389, l'énergie due à la présence d'un aimant dont les composantes d'aimantation sont A_1, B_1, C_1, placé dans un champ où les composantes de la force magnétique sont α_2, β_2, γ_2, est

$$-\iiint (A_1\alpha_2 + B_1\beta_2 + C_1\gamma_2)\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégration n'étant étendue qu'au volume de l'aimant, puisque A_1, B_1, C_1 sont nuls partout ailleurs.

Mais l'énergie totale est de la forme

$$-\frac{1}{2}\iiint [(A_1 + A_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots]\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégration étant étendue à toute la région de l'espace où il y a des corps aimantés, et A_2, B_2, C_2 désignant les composantes de l'aimantation en un point extérieur à l'aimant.

L'énergie totale est donc formée de quatre parties :

(1) $$-\frac{1}{2}\iiint (A_1\alpha_1 + \dots)\,dx\,dy\,dz,$$

qui est constante si l'aimantation de l'aimant est invariable ;

(2) $$-\frac{1}{2}\iiint (A_2\alpha_1 + \dots)\,dx\,dy\,dz,$$

qui est égale, d'après le théorème de Green, à

(3) $$-\frac{1}{2}\iiint (A_1\alpha_2 + \dots)\,dx\,dy\,dz ;$$

enfin,

(4) $$-\frac{1}{2}\iiint (A_2\alpha_2 + \dots)\,dx\,dy\,dz,$$

cette dernière pouvant être considérée comme due à une aimantation invariable et étant, par suite, constante.

Donc lorsqu'un aimant, considéré comme aimanté invariablement, se déplace, la partie variable de son énergie est la somme des expressions (2) et (3), soit

$$-\int\int\int(A_1\alpha_2+B_1\beta_2+C_1\gamma_2)\,dx\,dy\,dz.$$

Et, nous rappelant que le déplacement de l'aimant change la valeur de $\alpha_2,\ldots$, mais non celle de $A_1,\ldots$, nous trouvons pour composante de la force qui agit sur l'aimant suivant une direction quelconque φ

$$\int\int\int\left(A_1\frac{d\alpha_2}{d\varphi}+B_1\frac{d\beta_2}{d\varphi}+C_1\frac{d\gamma_2}{d\varphi}\right)dx\,dy\,dz.$$

Si, au lieu d'un aimant, nous avons un corps aimanté par induction, l'expression de la force reste la même en posant $A_1=\varkappa\alpha,\ldots$, d'où nous tirons

$$\int\int\int\varkappa\left(\alpha\frac{d\alpha_2}{d\varphi}+\beta\frac{d\beta_2}{d\varphi}+\gamma\frac{d\gamma_2}{d\varphi}\right)dx\,dy\,dz.$$

On a posé dans cette expression $\varkappa$ pour $\varkappa_1+\varkappa_2,\ldots$; mais, si le corps aimanté est petit ou si $\varkappa$ est faible, on peut négliger $\varkappa_1$ devant $\varkappa_2$, et l'équation de la force devient, comme au § 110,

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{2}\int\int\int\varkappa(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Ainsi, le travail effectué par les forces magnétiques pendant qu'un corps de petit pouvoir inducteur aimanté par induction s'éloigne jusqu'à l'infini n'est que la moitié du travail qui aurait été effectué si ce même corps avait reçu à l'origine une aimantation invariable de même puissance ; car, à mesure que l'aimant induit s'éloigne, il perd de sa puissance.

APPENDICE II.

[L'expression donnée au § 639 pour l'énergie potentielle développée par les forces magnétiques dans l'unité de volume d'un milieu a soulevé des objections, par la raison que, pour trouver cette expression au § 389, on a supposé que α, β, γ pouvaient se déduire d'un potentiel, ce qui n'est plus le cas aux §§ 639 et 640. Cette objection porte aussi sur l'expression de la force X, qui est la variation dans l'espace de l'énergie. L'objet de cette Note est de présenter quelques considérations tendant à confirmer l'exactitude du texte.

Considérons l'élément $dx\,dy\,dz$ isolé du reste du milieu et traversé par un courant électrique u, v, w. Les forces qui agissent sur l'élément sont dues à deux causes : l'aimantation de l'élément, et le passage du courant qui le traverse. La force due à cette dernière cause est

$$(X_2, Y_2, Z_2)\,dx\,dy\,dz$$

et a été donnée à l'équation (3) du § 640 : on a

$$X_2 = vc - wb, \quad \ldots.$$

Pour évaluer l'autre force, remarquons que, si aucun courant ne traversait l'élément, la force magnétique agissant sur l'élément serait

$$(X', Y', Z')\,dx\,dy\,dz,$$

où

$$X' = A\frac{\partial \alpha}{\partial x} + B\frac{\partial \alpha}{\partial y} + C\frac{\partial \alpha}{\partial z};$$

Mais, outre celle-là, il y a les forces dues à l'action du courant électrique sur le magnétisme des faces de l'élément. Or on montrera au § 653 que, quand on passe du côté positif au côté négatif d'une nappe de courant, la composante de la force magnétique normalement à la nappe n'éprouve point de discontinuité, non plus que la composante parallèle à la direction du courant; tandis que la composante parallèle à la nappe et normale à la direction du courant varie de $4\pi i$, i étant l'intensité du courant par unité de longueur. Supposons que les faces de notre élément, qui sont perpendiculaires à l'axe des y dans un système d'axes à droite, fassent partie d'une nappe de courant infinie, dans laquelle circule un courant parallèle à l'axe des z égal à $w\,dy$. Outre la force $B\frac{\partial \alpha}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$, que nous avons déjà

comptée dans l'évaluation des forces parallèles à dx qui agissent sur les faces $dz\,dw$, il y aura une force magnétique $B.4\pi w\,dx\,dy\,dz$. De même nous trouverons une force additionnelle

$$-C.4\pi x.dx\,dy\,dz,$$

agissant sur les faces $dx\,dy$. Nous devons donc ajouter à X' un terme

$$X'' = 4\pi B w - 4\pi C v,$$

et la composante totale, suivant les x de la force magnétique, sera

$$A\frac{\partial \alpha}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + 4\pi w\right) + C\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - 4\pi v\right);$$

c'est-à-dire,

$$A\frac{\partial \alpha}{\partial x} + B\frac{\partial \beta}{\partial y} + C\frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

On remarquera que la force (X'', Y'', Z'') n'influe point sur la valeur de (L, M, N).]

CHAPITRE XII.

NAPPES DE COURANT.

647. Une nappe de courant est une couche infiniment mince de matière conductrice, limitée sur chaque face par des milieux isolants, de sorte que des courants électriques peuvent circuler dans la nappe, mais ne peuvent en sortir, sauf en certains points appelés *électrodes*, qui servent d'entrée et de sortie au courant.

Pour pouvoir conduire un courant fini, une nappe matérielle doit avoir une épaisseur finie et, par suite, doit être considérée comme un conducteur à trois dimensions; mais, dans bien des cas, il est commode de déduire les propriétés électriques d'une nappe conductrice matérielle ou d'une couche mince de fil enroulé, des propriétés d'une nappe de courant définie comme plus haut.

Nous pouvons donc regarder une surface de forme quelconque comme une nappe de courant. Nous ferons choix d'un côté de la surface comme côté positif, et toutes les lignes tracées sur la surface seront censées vues depuis le côté positif. Dans le cas d'une surface fermée, nous prendrons le côté extérieur comme côté positif. Voir § 294, où cependant on a défini la direction du courant comme si on le voyait depuis la face négative de la nappe.

Fonction de courant.

648. Prenons sur la surface un point quelconque A pour origine, et menons du point A à un autre point P une ligne sur la surface. Soit φ la quantité d'électricité qui traverse cette ligne, de gauche à droite dans l'unité de temps : φ est appelé la *fonction de courant* au point P.

La fonction de courant ne dépend que de la position du point P, et reste la même pour deux formes quelconques de la ligne AP, pourvu que la ligne puisse passer de l'une à l'autre de ces formes d'un mouvement continu sans rencontrer d'électrode. En effet, ces deux formes de la ligne AP comprenant une surface à l'intérieur de laquelle ne se trouve point d'électrode, la même quantité d'électricité qui pé-

nètre dans cette surface à travers l'une des lignes doit forcément sortir par l'autre.

Si s désigne la longueur de la ligne AP, le courant qui traverse de gauche à droite l'élément ds sera $\frac{d\varphi}{ds}\,ds$.

Si φ est constant pour une certaine courbe, il ne passe point de courant à travers cette courbe : on l'appelle alors *ligne de courant* ou *ligne de flux*.

649. Soit ψ le potentiel électrique en un point quelconque de la nappe : la force électromotrice qui agit le long d'un élément de courbe ds est

$$-\frac{d\psi}{ds}\,ds,$$

s'il n'existe d'autre force électromotrice que celle qui est due à la différence de potentiels.

Si ψ est constant pour une certaine courbe, cette courbe est appelée *ligne équipotentielle*.

650. Nous pouvons supposer que la position d'un point soit définie sur la nappe par les valeurs de φ et de ψ en ce point. Soit ds_1 la longueur de l'élément de la ligne équipotentielle ψ interceptée entre les lignes de courant φ et $\varphi + d\varphi$, et soit ds_2 la longueur de l'élément de la ligne de courant φ interceptée entre les deux lignes équipotentielles ψ et $\psi + d\psi$. Nous pouvons considérer ds_1 et ds_2 comme les côtés de l'élément de nappe $d\varphi.d\psi$. La force électromotrice $-d\psi$, dirigée suivant ds_2, donne lieu au courant $d\varphi$ à travers ds_1.

Soit une partie de la nappe, de longueur ds_2 et de largeur ds_1, et soit sa résistance égale à

$$\sigma\,\frac{ds_2}{ds_1},$$

σ étant la résistance spécifique de la nappe par unité de surface; alors

$$d\psi = \sigma\,\frac{ds_2}{ds_1}\,d\varphi,$$

d'où

$$\frac{ds_1}{d\varphi} = \sigma\,\frac{ds_2}{d\psi}.$$

651. Si la nappe est formée d'une substance également conductrice dans toutes les directions, ds_1 est perpendiculaire à ds_2. Dans le cas

d'une nappe de résistance uniforme, σ est constant et, si nous faisons $\psi = \sigma\psi'$, nous avons

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{d\varphi}{d\psi'},$$

c'est-à-dire que les lignes de courant et les lignes équipotentielles découpent la surface en petits carrés.

Il résulte de là que, si φ_1 et ψ'_1 sont des fonctions conjuguées de φ et de ψ' (§ 183), les lignes φ_1 peuvent être des lignes de courant de la surface, auxquelles les lignes ψ'_1 correspondraient comme lignes équipotentielles. Il y a évidemment le cas où $\varphi_1 = \psi'$ et $\psi'_1 = -\varphi$; alors les lignes de courant deviennent des lignes équipotentielles, et les lignes équipotentielles des lignes de courant (1).

Si nous avons trouvé, dans un cas particulier, la distribution des courants électriques dans une nappe uniforme, de forme quelconque, nous pouvons en déduire la distribution dans un autre cas quelconque, par une transformation convenable des fonctions conjuguées : cette méthode a été exposée au § 190.

652. Il nous faut maintenant déterminer l'action magnétique d'une nappe de courant, dans laquelle le courant est entièrement renfermé dans la nappe, sans qu'il y ait d'électrodes par lesquelles le courant soit amené à la nappe ou en sorte.

Dans ce cas, la fonction de courant a une valeur déterminée en chaque point, et les lignes de courant sont des courbes fermées ne se coupant pas les unes les autres, quoique une ligne de courant puisse se recouper elle-même. Considérons la portion annulaire de la nappe qui est comprise entre les lignes de courant φ et $\varphi + \delta\varphi$. Cette partie de la nappe forme un circuit conducteur dans lequel un courant d'intensité $\delta\varphi$ circule, dans le sens positif, autour de cette partie de la nappe pour laquelle φ a une valeur plus grande que la valeur donnée. L'effet de ce courant est le même que celui d'un feuillet magnétique de puissance $d\varphi$ sur tout point non compris dans la masse du feuillet. Supposons que ce feuillet coïncide avec la partie de la nappe de courant, sur laquelle φ a une plus grande valeur que sur la ligne de courant donnée.

Traçons successivement toutes les lignes de courant, en commençant par celle pour laquelle φ a la plus grande valeur et en finissant par celle pour laquelle sa valeur est la moindre; nous divisons ainsi

(1) *Voir* Thomson, *Camb. and Dub. Math. Journ.*, vol. III, p. 286.

la nappe de courant en une série de circuits. Substituons à chacun de ces circuits le feuillet magnétique correspondant; nous trouvons que l'effet magnétique exercé par la nappe de courant sur un point non compris dans sa masse est le même que celui d'un feuillet magnétique complexe dont la puissance serait en chaque point $C + \varphi$, C étant une constante.

Si la nappe de courant est limitée, nous devons faire $C + \varphi = 0$ le long de la courbe limite. Si la nappe forme une surface fermée ou infinie, il n'y a rien qui détermine la valeur de la constante C.

653. Le potentiel magnétique en un point quelconque, situé sur l'une ou l'autre face de la nappe, est donné, comme au § 415, par l'expression

$$\Omega = \int\int \frac{1}{r^2} \varphi \cos\theta \, dS,$$

r étant la distance du point considéré à l'élément de surface dS, et θ l'angle de la ligne r et de la normale menée à dS, du côté positif de la nappe.

Cette expression nous donne le potentiel magnétique pour tous les points non compris dans l'épaisseur de la nappe; nous savons d'ailleurs qu'il n'existe rien de semblable à un potentiel magnétique pour les points intérieurs à un conducteur traversé par un courant.

La valeur de Ω est discontinue sur la nappe de courant; car, si Ω_1 est sa valeur en un point intérieur à la nappe, tout près de sa surface, et Ω_2 sa valeur en un point voisin du premier, mais extérieur à la nappe,

$$\Omega_2 = \Omega_1 + 4\pi\varphi,$$

φ étant la fonction de courant en ce point de la nappe.

La valeur de la composante de la force magnétique normale à la nappe est continue, car elle est la même des deux côtés de la nappe. La composante parallèle aux lignes de courant est aussi continue, mais la composante tangentielle perpendiculaire aux lignes de courant est discontinue à la surface de la nappe. Si s est la longueur d'une courbe tracée sur la nappe, la composante de la force magnétique, dans la direction de ds, est, du côté négatif, $-\frac{d\Omega_1}{ds}$, et, du côté positif, $-\frac{d\Omega_2}{ds} = -\frac{d\Omega_1}{ds} - 4\pi\frac{d\varphi}{ds}$.

La composante de la force magnétique du côté positif surpasse donc de $-4\pi\frac{d\varphi}{ds}$ la composante située du côté négatif. En un point donné,

cette quantité est maximum quand ds est perpendiculaire aux lignes de courant.

Induction de courants électriques dans une nappe de conductibilité infinie.

654. On a montré, au § 579, que, dans un circuit quelconque,

$$E = \frac{dp}{dt} + Ri,$$

où E est la force électromotrice appliquée, p la quantité de mouvement électrocinétique du circuit, R sa résistance et i l'intensité du courant qui le traverse. S'il n'y a ni force électromotrice appliquée, ni résistance, $\frac{dp}{dt} = 0$, ou p est constant. Or la quantité de mouvement électrocinétique du circuit p a pour mesure, ainsi qu'on l'a montré au § 588, l'intégrale de l'induction magnétique prise sur une surface limitée par le circuit. Donc, dans le cas d'une nappe de courant sans résistance, l'intégrale de l'induction magnétique à travers une courbe fermée tracée sur la surface doit être constante, ce qui suppose que la composante normale de l'induction magnétique reste constante en tous les points de la nappe de courant.

655. Si donc le mouvement d'aimants ou la variation de courants dans le voisinage modifient de quelque manière le champ magnétique, il se développera dans la nappe des courants électriques tels que leur effet magnétique, joint à celui des aimants ou des courants du champ, maintienne invariable la composante normale de l'induction magnétique en chaque point de la nappe.

La nappe peut donc être considérée comme impénétrable à l'induction magnétique; les lignes d'induction magnétique sont déviées par la nappe, absolument comme les lignes de flux d'un courant électrique seraient déviées par l'introduction d'une nappe de même forme, faite d'une substance de résistance infinie.

Si la nappe a la forme d'une surface fermée ou infinie, aucune action magnétique se produisant d'un côté de la nappe ne produira d'effets magnétiques de l'autre côté.

Théorie d'une nappe de courant plane.

656. Nous avons vu que l'action magnétique d'une nappe de courant sur les points extérieurs est équivalente à celle d'un feuillet ma-

gnétique dont la puissance serait en chaque point égale à la fonction de courant φ. Si la nappe est plane, nous pouvons exprimer toutes les quantités nécessaires à la détermination des effets électromagnétiques au moyen d'une seule fonction P, qui est le potentiel d'une couche de matière fictive répandue sur le plan à la densité superficielle φ. La valeur de P est évidemment

$$\text{(1)} \qquad P = \iint \frac{\varphi}{r}\, dx'\, dy',$$

r étant la distance du point (x, y, z), pour lequel on calcule P, au point $(x', y', 0)$ situé dans le plan de la nappe, où l'on prend l'élément $dx'\, dy'$.

Pour trouver le potentiel magnétique, nous pouvons considérer le feuillet magnétique comme formé de deux surfaces parallèles au plan des xy, dont l'une a pour équation $z = \frac{1}{2}c$, ayant pour densité superficielle $\frac{\varphi}{c}$, et dont l'autre, ayant pour équation $z = -\frac{1}{2}c$, aurait la densité superficielle $-\frac{\varphi}{c}$.

Les potentiels dus à ces surfaces seront

$$\frac{1}{c} P\left(z-\frac{c}{2}\right) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{c} P\left(z+\frac{c}{2}\right),$$

où les indices rappellent qu'on a remplacé z par $z - \frac{c}{2}$ dans la première expression, et par $z + \frac{c}{2}$ dans la seconde. Développant ces expressions par le théorème de Taylor, les ajoutant et faisant c infiniment petit, nous avons, pour le potentiel magnétique dû à la nappe en un point extérieur à cette nappe,

$$\text{(2)} \qquad \Omega = -\frac{\partial P}{\partial z}.$$

657. La quantité P est symétrique par rapport au plan de la nappe; elle reste donc la même quand on remplace $-z$ par $+z$.

Sur la surface positive de la nappe,

$$\text{(3)} \qquad \Omega = -\frac{\partial P}{\partial z} = 2\pi\varphi,$$

sur la surface négative,

$$\text{(4)} \qquad \Omega = -\frac{\partial P}{\partial z} = -2\pi\varphi.$$

A l'intérieur de la nappe, si ses effets magnétiques sont dus à l'aiman-

tation de la substance, le potentiel varie, d'une manière continue, de $+ 2\pi\varphi$ sur la surface positive à $- 2\pi\varphi$ sur la surface négative.

Si la nappe contient des courants électriques, la force magnétique à l'intérieur de la nappe ne satisfait plus à la condition d'avoir un potentiel; mais elle n'en est pas moins parfaitement déterminée.

Sa composante normale

$$\gamma = -\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \tag{5}$$

a la même valeur sur les deux faces de la nappe et dans toute sa masse.

Si ses composantes parallèlement aux x et aux y sont α et β sur la face positive, α' et β' sur la face négative,

$$\alpha = -2\pi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\alpha',$$

$$\beta = -2\pi\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\beta'.$$

A l'intérieur de la nappe, ces composantes varient d'une manière continue de α et β à α' et β'.

Les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{cases} \tag{8}$$

qui relient les composantes F, G, H du potentiel vecteur $d\hat{u}$ à la nappe de courant, au potentiel scalaire Ω, sont satisfaites si nous faisons

$$F = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad G = -\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad H = 0. \tag{9}$$

Nous obtenons aussi ces valeurs directement par intégration; ainsi, pour F,

$$F = \int\int \frac{u}{r}\,dx'\,dy' = \int\int \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\,dx'\,dy'$$

$$= \int \frac{\varphi}{r}\,dx' - \int\int \varphi\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r}\,dx'\,dy'.$$

Puisque l'intégration doit être étendue à la nappe plane infinie, et que le premier terme s'annule à l'infini, l'expression se réduit au se-

cond terme; en substituant

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} \text{ à } -\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{r},$$

et nous souvenant que φ dépend de x' et de y', mais non de x, y, z, nous obtenons

$$F = \frac{\partial}{\partial y}\int\int \frac{\varphi}{r}\,dx'\,dy'$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \text{d'après (1).}$$

Si Ω' est le potentiel magnétique dû à un système électrique ou magnétique extérieur à la nappe, nous pouvons écrire

$$P' = -\int \Omega'\,dz, \tag{10}$$

et nous aurons alors, pour les composantes du potentiel vecteur dû à ce système,

$$F' = \frac{\partial P'}{\partial y}, \qquad G' = -\frac{\partial P'}{\partial x}, \qquad H' = 0. \tag{11}$$

658. Déterminons maintenant la force électromotrice en un point quelconque de la nappe supposée fixe.

Soient X et Y les composantes de la force électromotrice parallèlement à x et y; d'après le § 598, nous avons

$$X = -\frac{d}{dt}(F + F') - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{12}$$

$$Y = -\frac{d}{dt}(G + G') - \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{13}$$

Si la résistance électrique de la nappe est uniforme et égale à σ, on a

$$X = \sigma u, \qquad Y = \sigma v, \tag{14}$$

u et v étant les composantes du courant; et, si φ est la fonction du courant,

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{15}$$

Or, d'après l'équation (3), $2\pi\varphi = -\frac{\partial P}{\partial z}$ sur la face positive de la

nappe de courant. Donc les équations (12) et (13) peuvent s'écrire

$$(16) \qquad -\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} = -\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}(P + P') - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$(17) \qquad \frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}(P + P') - \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

où les valeurs des expressions sont celles qui correspondent à la surface positive de la nappe.

Différentions la première de ces expressions par rapport à x, la seconde par rapport à y, et ajoutons les résultats; nous obtenons

$$(18) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

La seule valeur de ψ qui satisfasse à cette condition, qui soit finie et continue en tous les points du plan, et qui s'annule à une distance infinie, est

$$(19) \qquad \psi = 0.$$

Donc l'induction de courants électriques dans une nappe plane infinie, de conductibilité uniforme, n'entraîne point l'établissement de différences de potentiel électrique entre les différentes parties de la nappe.

Substituant cette valeur de ψ et intégrant les équations (16) et (17), nous obtenons

$$(20) \qquad \frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial P'}{\partial t} = f(z, t).$$

Mais, puisque les valeurs des courants qui circulent dans la nappe s'obtiennent en différentiant par rapport à x et à y, la fonction arbitraire de z et de t disparaît. Nous n'en tiendrons donc pas compte.

Si nous remplaçons aussi $\frac{\sigma}{2\pi}$ par le symbole unique R, qui représente une certaine vitesse, l'équation entre P et P′ devient

$$(21) \qquad R\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P'}{\partial t}.$$

659. Supposons d'abord qu'il n'y ait point de système magnétique extérieur agissant sur la nappe de courant. Nous pouvons alors faire $P' = 0$, et le cas est celui d'un système de courants électriques existant dans la nappe, abandonnés à eux-mêmes, mais réagissant les uns sur les autres par leur induction mutuelle, et perdant en même temps

leur énergie par suite de la résistance de la nappe. Ce résultat est exprimé par l'équation

$$R\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial t}, \tag{22}$$

dont la solution est

$$P = f[x, y, (z + Rt)]. \tag{23}$$

Donc la valeur de P (1), au temps t, et en un point situé du côté positif de la surface et ayant pour coordonnées x, y, z, est égale à la valeur de P au temps $t = 0$, au point $(x, y, z, + Rt)$.

Si donc on excite dans une nappe plane uniforme, de grandeur infinie, un système de courants que l'on abandonne ensuite à eux-mêmes, leur effet magnétique sur un point situé du côté positif de la nappe est le même que si ces courants étaient maintenus constants dans la nappe, celle-ci se déplaçant avec une vitesse constante R dans le sens de la normale menée à sa face négative. La diminution des forces électromagnétiques, qui est due, en réalité, à la destruction des courants, est représentée très exactement par la diminution de force qui résulterait de cet accroissement fictif de distance.

660. En intégrant l'équation (21) par rapport à t, nous obtenons

$$P + P' = \int R\frac{\partial P}{\partial z}\,dt. \tag{24}$$

Supposons que P et P′ soient d'abord nuls, et qu'un aimant ou un électro-aimant soit subitement excité ou amené d'une distance infinie, de manière à faire passer subitement la valeur de P′ de o à P′ : puisque l'intégrale de temps du second membre de (24) s'annule avec le temps, nous devons avoir au premier instant

$$P = -P'$$

à la surface de la nappe.

Donc, l'introduction subite du système auquel est dû P′ excite dans

---

(1) [Les équations (20) et (22) n'ont été démontrées que pour la surface de la nappe, où $z = 0$. L'expression (23) satisfait (22) en général, et, par suite, aussi à la surface; elle satisfait aussi aux autres conditions du problème : c'est donc une solution. «Toute autre solution doit différer de celle-là par un système de courants fermés qui, dépendant de l'état initial de la nappe et non d'aucune cause extérieure, doivent se détruire rapidement. Si donc nous supposons qu'il se soit écoulé un temps infini, c'est-là la seule solution du problème.»] (*Voir* le Mémoire du professeur Clerk Maxwell, *Proc. Roy. Soc.*, t. XX, p. 160-168.)

la nappe un système de courants, tel qu'il neutralise exactement à la surface de la nappe les effets magnétiques de ce système.

Ainsi, à la surface de la nappe, et par suite en tous les points situés du côté négatif, le système initial des courants produit un effet exactement égal et opposé à celui du système magnétique situé du côté positif. C'est ce que nous pouvons exprimer en disant que l'effet des courants est équivalent à celui d'une image du système magnétique, occupant la même position que ce système, mais présentant une aimantation et des courants électriques de sens contraires. Une telle image est appelée *image négative*.

L'effet des courants de la nappe en un point situé du côté positif est équivalent à l'effet d'une image positive du système magnétique placée du côté négatif de la nappe, les lignes qui joignent les points correspondants étant coupées par le milieu et à angle droit par la nappe de courant.

Ainsi, l'action des courants de la nappe sur un point situé d'un côté ou de l'autre de la nappe peut être représentée par l'action d'une image du système magnétique située du côté où ne se trouve pas le point, cette image étant positive ou négative suivant que le point se trouve du côté positif ou négatif de la nappe.

661. Si la nappe a une conductibilité infinie, $R = 0$, et le second terme de (24) est nul, en sorte que l'image représente, à un moment quelconque, l'effet des courants de la nappe.

Dans le cas d'une nappe réelle, la résistance R a une certaine valeur finie. L'image que l'on vient de décrire ne représente donc l'effet des courants que pendant le premier instant qui suit l'introduction du système magnétique. Les courants commencent immédiatement à s'éteindre, et l'effet de cette extinction est exactement figuré si l'on suppose que les deux images se déplacent depuis leur position primitive, dans le sens des normales menées à la nappe, avec la vitesse constante R.

662. Nous sommes maintenant en mesure d'étudier le système de courants induits dans la nappe par un système quelconque M d'aimants ou d'électro-aimants placés du côté positif de la nappe, dont la position et la puissance varient d'une manière quelconque.

Soit, comme précédemment, P′ la fonction dont on déduira l'action directe de ce système par les équations (3), (9), etc.; $\frac{dP'}{dt}\delta t$ sera la fonction qui correspond au système représenté par $\frac{dM}{dt}\delta t$. Cette quan-

tité, qui est l'accroissement de M dans le temps δt, peut elle-même être regardée comme représentant un système magnétique.

Si nous supposons qu'au temps t une image positive du système $\frac{dM}{dt}\delta t$ se forme du côté négatif de la nappe, l'action magnétique exercée par cette image sur un point quelconque situé du côté négatif de la nappe sera équivalente à l'action des courants excités dans la nappe par le changement de M, dans le premier moment qui suit ce changement; et l'image continuera d'être équivalente aux courants de la nappe, si, aussitôt formée, elle commence à s'éloigner dans le sens des z négatifs avec la vitesse constante R.

Si nous supposons qu'à chacun des éléments successifs du temps il se forme une pareille image, laquelle, aussitôt formée, commence à s'éloigner de la nappe avec la vitesse R, nous arrivons à concevoir comme un cortège d'images dont la dernière est en voie de formation, tandis que l'ensemble des autres s'éloigne de la nappe comme un corps invariable, avec la vitesse R.

663. Si P′ est une fonction quelconque provenant de l'action d'un système magnétique, on peut trouver la fonction correspondante P provenant des courants de la nappe, par la méthode suivante qui n'est que l'expression symbolique de la théorie du cortège d'images.

Soit P_τ la valeur de la fonction P provenant des courants de la nappe, au point $[x, y, (z+R\tau)]$, et au temps $t-\tau$; et soit P'_τ la valeur de la fonction P′ due au système magnétique au point $[x, y, -(z+R\tau)]$ et au temps $t-\tau$. Alors

$$\frac{\partial P_\tau}{\partial \tau} = R\frac{\partial P_\tau}{\partial z} - \frac{\partial P_\tau}{\partial t}, \tag{25}$$

et l'équivalent (21) devient

$$\frac{\partial P_\tau}{\partial \tau} = \frac{\partial P'_\tau}{\partial t}; \tag{26}$$

en intégrant par rapport à τ depuis $\tau = 0$ jusqu'à $\tau = \infty$, nous obtenons

$$P = -\int_0^\infty \frac{dP'_\tau}{dt}\, d\tau, \tag{27}$$

valeur de la fonction P d'où nous tirons toutes les propriétés de la nappe de courant par différentiation, comme dans les équations (3), (9), ...

664. Comme exemple de cette méthode, considérons le cas d'un pôle magnétique isolé, de puissance égale à l'unité, se mouvant en ligne droite avec une vitesse constante.

Soient les coordonnées du pôle au temps t

$$\xi = ut, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = c + wt.$$

Les coordonnées de l'image du pôle formée au temps $t - \tau$ seront

$$\xi = u(t-\tau), \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = -[c + w(t-\tau) + R\tau],$$

et, si r est la distance de cette image au point (x, y, z),

$$r^2 = [x - u(t-\tau)]^2 + y^2 + [z + c + w(t-\tau) + R\tau]^2.$$

Pour obtenir le potentiel dû au cortège d'images, nous avons à calculer

$$-\frac{d}{dt}\int_0^\infty \frac{d\tau}{r}.$$

Si nous posons

$$Q^2 = u^2 + (R - w)^2$$

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{r} = -\frac{1}{Q}\log[Qr + u(x - ut) + (R - w)(\tau + c + wt)],$$

plus un terme qui est infiniment grand, mais qui disparaît quand on différentie par rapport à t; la valeur de r, dans cette expression, étant obtenue en faisant $\tau = 0$ dans l'expression de r donnée plus haut.

Différentiant cette expression par rapport à t et posant $t = 0$, nous obtenons le potentiel magnétique dû à la série d'images

$$\Omega = \frac{1}{Q}\,\frac{Q\,\dfrac{w(z+c) - ux}{r} - u^2 - w^2 + Rw}{Qr + ux + (R - w(z+c)}.$$

En différentiant cette expression par rapport à x et à z, nous obtenons les composantes parallèles à x ou à z de la force magnétique en un point quelconque; et, en posant $x = 0$, $z = c$, $r = 2c$ dans ces expressions, nous obtenons les valeurs suivantes de la force qui agit sur le pôle mobile lui-même

$$X = -\frac{1}{4c^2}\,\frac{u}{Q + R - w}\left[1 + \frac{w}{Q} - \frac{u^2}{Q(Q + R - w)}\right],$$

$$Z = -\frac{1}{4c^2}\left[\frac{w}{Q} - \frac{u^2}{Q(Q + R - w)}\right].$$

665. Nous devons nous souvenir que, dans ces expressions, on suppose le mouvement commencé depuis un temps infini avant le moment

considéré. Aussi ne devons-nous pas prendre pour w une quantité positive; car, dans ce cas, le pôle aurait dû traverser la nappe depuis un temps fini.

Si nous faisons $u = 0$ et w négatif, $X = 0$, et

$$Z = \frac{1}{4c^2}\frac{w}{R+w},$$

c'est-à-dire que le pôle est repoussé par la nappe à mesure qu'il s'en approche.

Si nous faisons $w = 0$, nous trouvons $Q^2 = u^2 + R^2$,

$$X = -\frac{1}{4c^2}\frac{uR}{Q(Q+R)}, \qquad Z = \frac{1}{4c^2}\frac{u^2}{Q(Q+R)}.$$

La composante X représente une force retardatrice qui agit sur le pôle en sens inverse de son propre mouvement. R ayant une valeur donnée, X est maximum pour $u = 1,27R$.

Si la nappe est non conductrice, $R = \infty$ et $X = 0$.

Si la nappe est parfaitement conductrice, $R = 0$ et $X = 0$.

La composante Z représente une répulsion exercée par la nappe sur le pôle. Elle augmente à mesure que la vitesse croît, et, à la limite, devient $\frac{1}{4c^2}$ quand la vitesse est infinie. Elle a la même valeur quand $R = 0$.

666. Si le pôle magnétique se meut suivant une courbe parallèle à la nappe, le calcul devient plus compliqué, mais il est aisé de voir que l'effet de la partie la plus voisine du cortège d'images est de produire une force qui agit sur le pôle en sens inverse de son mouvement. L'effet de la partie de la série d'images qui suit immédiatement celle-là est analogue à l'effet d'un aimant dont l'axe est parallèle à la direction dans laquelle se mouvait le pôle quelque temps auparavant. Puisque le pôle de cet aimant le plus rapproché du pôle mobile est de même nom que lui, la force sera formée en partie d'une répulsion, en partie d'une force parallèle à la direction antérieure du mouvement, mais de sens inverse. Cette dernière force peut être décomposée en une force retardatrice, et une force dirigée vers la concavité de la trajectoire du pôle mobile.

667. Cette étude ne nous permet pas de traiter le cas où les courants ne pourraient se former complètement, parce que la surface conductrice serait discontinue, ou limitée.

Mais il est aisé de voir que, si le pôle se meut parallèlement au bord de la nappe, les courants seront affaiblis du côté le plus voisin du bord. Donc les forces dues à ces courants seront moindres, et non seulement la force retardatrice sera plus petite, mais aussi, comme la force répulsive est moindre du côté du bord, le pôle mobile sera attiré vers le bord de la nappe.

Théorie du disque tournant d'Arago.

668. Arago a découvert (1) qu'un aimant placé dans le voisinage d'un disque métallique, animé d'un mouvement de rotation, est soumis à une force qui tend à lui faire suivre le mouvement du disque, et cela, quoiqu'il ne s'exerce aucune action entre l'aimant et le disque quand celui-ci est en repos.

On attribua cette action du disque tournant à une nouvelle sorte d'aimantation induite, jusqu'au jour où Faraday (2) l'expliqua par l'effet des courants électriques induits dans le disque en raison de son mouvement dans le champ de force magnétique.

Pour déterminer la distribution de ces courants induits et leur effet sur l'aimant, nous pourrions nous servir des résultats déjà obtenus pour une nappe conductrice en repos soumise à l'action d'un aimant mobile, en utilisant la méthode donnée au § 600 pour traiter les équations électromagnétiques rapportées à des systèmes d'axes mobiles. Mais, comme ce cas a une importance particulière, nous allons le traiter directement, en supposant d'abord que les pôles de l'aimant soient assez loin des bords du disque pour que l'on puisse ne pas tenir compte du fait que la nappe conductrice a une étendue limitée.

Employant les mêmes notations que dans les paragraphes précédents (§ 656-667), nous trouvons pour les composantes de la force électromotrice parallèlement à x et à y

$$(1)\qquad \begin{cases} \sigma u = \gamma \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \sigma v = -\gamma \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \end{cases}$$

où γ est la composante de la force magnétique normalement au disque.

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 1826.
(2) *Exp. Res.*, 81.

Si nous exprimons u et v au moyen de la fonction de courant φ,

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{2}$$

et si le disque tourne autour de l'axe des z avec la vitesse angulaire ω,

$$\frac{dv}{dt} = \omega x, \qquad \frac{dx}{dt} = -\omega y. \tag{3}$$

Substituant ces valeurs dans les équations (1), nous trouvons

$$\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \gamma \omega x - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{4}$$

$$-\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \gamma \omega y - \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{5}$$

Multiplions (4) par x et (5) par y, et ajoutons : il vient

$$\sigma \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \gamma \omega (x^2 + y^2) - \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \tag{6}$$

Multiplions (4) par y et (5) par $-x$, et ajoutons : nous obtenons

$$\sigma \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{7}$$

Si maintenant nous exprimons ces équations en fonction de r et de θ, où

$$x = r \cos \theta, \qquad y = r \sin \theta, \tag{8}$$

elles deviennent

$$\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \gamma \omega r^2 - r \frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{9}$$

$$\sigma r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \tag{10}$$

L'équation (10) est satisfaite si, prenant une fonction quelconque χ de r et de θ, nous faisons

$$\varphi = \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \tag{11}$$

$$\psi = \sigma r \frac{\partial \chi}{\partial r}. \tag{12}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (9), elle devient

$$(13) \qquad \sigma\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)\right]=\gamma\omega r^2.$$

Divisant par σr^2 et revenant aux coordonnées x et y, cette équation devient

$$(14) \qquad \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}=\frac{\omega}{\sigma}\gamma.$$

Telle est l'équation fondamentale de la théorie ; elle exprime la relation entre la fonction χ et la composante γ de la force magnétique, normalement au disque.

Soit, en un point quelconque de la face positive du disque, Q le potentiel dû à une matière fictive distribuée sur le disque avec la densité superficielle χ.

A la surface positive du disque

$$(15) \qquad \frac{dQ}{dz}=-2\pi\chi.$$

Donc le premier membre de l'équation (14) devient

$$(16) \qquad \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2Q}{\partial y^2}\right).$$

Mais, puisque Q satisfait à l'équation de Laplace en tous les points extérieurs au disque,

$$(17) \qquad \frac{\partial^2Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2Q}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2Q}{\partial z^2},$$

et l'équation (14) devient

$$(18) \qquad \frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2Q}{\partial z^2}=\omega\gamma.$$

De même, puisque Q est le potentiel dû à la distribution χ, le potentiel dû à la distribution φ, ou $\frac{\partial\chi}{\partial\theta}$, doit être $\frac{\partial Q}{\partial\theta}$.

Nous en tirons, pour le potentiel magnétique dû aux courants du disque,

$$(19) \qquad \Omega_1=-\frac{\partial^2Q}{\partial\theta\,\partial z},$$

et pour la composante normale au disque de la force magnétique due aux courants

$$(20) \qquad \gamma_1=-\frac{\partial\Omega}{\partial z}=\frac{\partial^2Q}{\partial\theta\,\partial z^2}.$$

Si Ω_2 est le potentiel magnétique dû aux aimants extérieurs et si nous posons

$$P = -\int \Omega_2 dz, \tag{21}$$

la composante normale au disque de la force due aux aimants sera

$$\gamma_2 = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \tag{22}$$

Nous pouvons maintenant écrire l'équation (18), en nous souvenant que

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2,$$

$$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \omega \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta\, \partial z^2} = \omega \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \tag{23}$$

Intégrant deux fois par rapport à z et posant $R = \frac{\sigma}{2\pi}$,

$$\left(R\frac{\partial}{\partial z} - \omega \frac{\partial}{\partial \theta}\right) Q = \omega P. \tag{24}$$

Si les valeurs de P et Q sont exprimées en fonction de la distance r à l'axe du disque, et si ξ et ζ sont de nouvelles variables, telles que

$$2\xi = z + \frac{R}{\omega}\theta, \qquad 2\zeta = z - \frac{R}{\omega}\theta, \tag{25}$$

l'équation (24) devient, en intégrant par rapport à ζ,

$$Q = \int^{\frac{\omega}{R}} P\, d\zeta. \tag{26}$$

669. Si l'on applique à cette expression la méthode du § 662, sa forme montre que l'action magnétique des courants induits dans le disque équivaut à l'action d'une série d'images du système magnétique disposées en forme d'hélice.

Si le système magnétique est formé d'un seul pôle magnétique de puissance égale à l'unité, l'hélice est tracée sur le cylindre ayant pour axe l'axe du disque, et passant par le pôle magnétique. L'hélice commence au point où se trouve l'image optique du pôle dans le disque. La distance, parallèlement à l'axe de deux spires consécutives de l'hélice, est $2\pi\frac{R}{\omega}$. L'effet magnétique de la série d'images est la même que si l'hélice avait été aimantée en tous ses points suivant la direction de la tangente menée au cylindre perpendiculairement à son axe, et avec une intensité telle que le moment magnétique d'un petit arc

soit numériquement égal à la longueur de la projection de cet arc sur le disque.

Il serait plus difficile de calculer l'effet produit sur le pôle magnétique, mais il est facile de voir que cet effet consiste en :

1° Une force qui le tire parallèlement à la direction du mouvement du disque;

2° Une force répulsive tendant à l'écarter du disque;

3° Une force dirigée vers l'axe du disque.

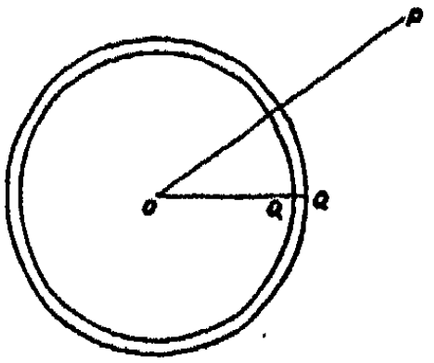
Si le pôle est près du bord du disque, cette force peut être surpassée par la force qui pousse le pôle vers le bord du disque, et dont l'origine a été indiquée au § 667.

Arago avait observé l'existence de toutes ces forces et les avait décrites dans les *Annales de Chimie et de Physique* de 1826. [*Voir* aussi Felici, dans les *Annales de Tortolini*, t. IV, p. 173 (1853), et t. V, p. 35; et E. Jochmann, dans le *Journal de Crelle*, t. 63, p. 158 et p. 329; et *Pogg. Ann.*, t. CXXII, p. 224 (1864).] Dans ce dernier Mémoire, on donne les équations nécessaires pour déterminer l'induction des courants sur eux-mêmes, mais on néglige cette partie de l'action dans les calculs qui suivent. La méthode d'images qui est indiquée ici a été publiée dans les *Proceedings of the Royal Society*, le 15 février 1872.

Nappe de courant sphérique.

670. Soit φ la fonction de courant en un point quelconque de la nappe de courant sphérique, et soit P le potentiel en un point donné,

Fig. 39.



dû à une couche de matière fictive répandue à la surface de la sphère avec la densité superficielle φ; on demande de trouver en fonction de P le potentiel magnétique et le potentiel vecteur de la nappe de courants.

Soient

a le rayon de la sphère;

r la distance du point donné;

p l'inverse de la distance du point donné au point Q de la sphère, pour lequel la fonction de courant est φ.

L'action de la nappe de courant sur un point qui ne fait pas partie de sa masse est identique à celle d'un feuillet magnétique dont la puissance en un point quelconque est numériquement égale à la fonction de courant.

Le potentiel mutuel du feuillet et d'un pôle de force égale à l'unité, placé au point P, est, d'après le § 410,

$$\Omega = \iint \varphi \frac{\partial p}{\partial a} dS.$$

Puisque p est une fonction homogène de degré -1 en r et en a,

$$a \frac{\partial p}{\partial a} + r \frac{\partial p}{\partial r} = -p$$

ou

$$\frac{\partial p}{\partial a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial r} (pr)$$

et

$$\Omega = -\iint \frac{\varphi}{a} \frac{\partial}{\partial r} (pr) dS.$$

Puisque r et a sont constants sur toute la surface d'intégration,

$$\Omega = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \iint \varphi p \, dS \right);$$

mais, si P est le potentiel dû à une couche de matière fictive de densité φ,

$$P = \iint \varphi p \, dS$$

et le potentiel magnétique Ω de la nappe de courant peut être exprimé en fonction de P, sous la forme

$$\Omega = -\frac{1}{a} \frac{d}{dr} (Pr).$$

671. Nous pouvons déterminer la composante F du potentiel vecteur suivant les x, au moyen de l'expression, donnée au § 416,

$$F = \iint \varphi \left(m \frac{\partial p}{\partial x} - n \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) dS,$$

où ξ, η, ζ sont les coordonnées de l'élément dS, et l, m, n les cosinus directeurs de sa normale.

Puisque la nappe est une sphère, les cosinus directeurs de la normale sont

$$l = \frac{\xi}{a}, \qquad m = \frac{\eta}{a}, \qquad n = \frac{\zeta}{a};$$

mais

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = (z - \zeta)p^3 = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial \eta_1} = (y - \eta_1)p^3 = -\frac{\partial p}{\partial y},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} m\frac{\partial p}{\partial z} - n\frac{\partial p}{\partial y} &= [\eta_1(z-\zeta) - \zeta(y-\eta)]\frac{p^3}{a} \\ &= [z(\eta - y) - y(\zeta - z)]\frac{p^3}{a} \\ &= \frac{z}{a}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{y}{a}\frac{\partial p}{\partial z}; \end{aligned}$$

multiplions par $\varphi\, dS$ et intégrons sur la surface de la sphère : nous trouvons

$$\mathrm{F} = \frac{z}{a}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} - \frac{y}{a}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}.$$

De même

$$\mathrm{G} = \frac{x}{a}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} - \frac{z}{a}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x},$$

$$\mathrm{H} = \frac{y}{a}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} - \frac{x}{a}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}.$$

Le vecteur $\mathfrak{A}$, dont les composantes sont F, G, H, est évidemment perpendiculaire au rayon vecteur r, et au vecteur dont les composantes sont $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}$. Si nous déterminons les lignes d'intersection de la surface sphérique de rayon r avec la série de surfaces équipotentielles correspondant à des valeurs de P en progression arithmétique, ces lignes indiquent par leur direction la direction, et par leur rapprochement la grandeur du vecteur $\mathfrak{A}$.

Dans le langage des quaternions,

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{a} V.\rho \nabla \mathrm{P}.$$

672. Si nous admettons que la valeur de P à l'intérieur de la sphère

soit

$$P = A\left(\frac{r}{a}\right)^i Y_i,$$

où Y_i est un harmonique sphérique de degré i, au dehors de la sphère, on aura

$$P' = A\left(\frac{a}{r}\right)^{i+1} Y_i.$$

La fonction de courant φ est

$$\varphi = \frac{2i+1}{4\pi}\,\frac{1}{a}\,AY_i.$$

Le potentiel magnétique, à l'intérieur de la sphère, est

$$\Omega = -(i+1)\,\frac{1}{a}\,A\left(\frac{r}{a}\right)^i Y_i,$$

et, au dehors,

$$\Omega' = i\,\frac{1}{a}\,A\left(\frac{a}{r}\right)^{i+1} Y_i.$$

Supposons, par exemple, qu'on demande de produire, au moyen d'un fil enroulé en forme de couche sphérique, un champ de force magnétique M uniforme à l'intérieur de la sphère. Dans ce cas, le potentiel magnétique, à l'intérieur de la sphère, est un harmonique solide du premier degré, de la forme

$$\Omega = -Mr\cos\theta,$$

M étant la force magnétique. Donc $A = \frac{1}{3}a^2M$, et

$$\varphi = \frac{3}{8\pi}\,Ma\cos\theta.$$

Donc la fonction de courant est proportionnelle à la distance au plan équatorial de la sphère, et, par suite, le nombre des tours de fil, compris entre deux petits cercles, doit être proportionnel à la distance des plans de ces cercles.

Si N est le nombre total des tours, et si γ est l'intensité du courant dans chaque tour,

$$\varphi = \tfrac{1}{2}N\gamma\cos\theta.$$

Donc, la force magnétique, à l'intérieur de la bobine, est

$$M = \frac{4\pi}{3}\,\frac{N\gamma}{a}.$$

673. Cherchons maintenant quel devrait être le mode d'enroule-

ment du fil pour produire, à l'intérieur de la sphère, un potentiel magnétique de la forme d'un harmonique solide zonal du second degré,

$$\Omega = -3\,\frac{1}{a}\,A\,\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right).$$

Ici

$$\varphi = \frac{5}{4\pi}\,\frac{A}{a}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right).$$

Si le nombre total des tours de fil est N, le nombre des tours compris entre le pôle et la distance polaire θ est

$$\tfrac{1}{2}\,N\sin^2\theta.$$

C'est à la latitude de 45° que les tours sont les plus rapprochés. A l'équateur le sens de l'enroulement change, et, dans l'autre hémisphère, les fils sont enroulés en sens contraire.

Soit γ l'intensité du courant dans le fil : à l'intérieur de la couche

$$\Omega = -\frac{4\pi}{5}\,N\gamma\,\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right).$$

Considérons maintenant un conducteur en forme de courbe plane fermée quelconque, placé en un point quelconque à l'intérieur de la couche, de façon que son plan soit perpendiculaire à l'axe. Pour déterminer son coefficient d'induction, nous avons à trouver l'intégrale de surface de $-\frac{\partial\Omega}{\partial z}$ pour l'aire plane limitée par la courbe, en faisant $\gamma = 1$.

Or

$$\Omega = -\frac{4}{5}\,\frac{\pi}{a^2}\,N\left[z^2 - \frac{1}{2}\,(x^2+y^2)\right]$$

et

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{8}{5}\,\frac{\pi}{a^2}\,N\,z.$$

Si donc S est l'aire de la courbe fermée, son coefficient d'induction est

$$M = \frac{8}{5}\,\frac{\pi}{a^2}\,NS\,z.$$

Si ce conducteur est traversé par le courant γ', d'après le § 583, il est poussé dans le sens de z par une force Z,

$$Z = \gamma\gamma'\,\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{8}{5}\,\frac{\pi}{a^2}\,NS\gamma\gamma',$$

et, puisque cette expression est indépendante de x, y et z, cette force

est constante, quelle que soit la position du circuit à l'intérieur de la sphère.

674. La méthode donnée par Poisson et indiquée au § 437 peut s'appliquer aux nappes de courant, en substituant au corps que l'on supposait aimanté uniformément dans la direction des z, avec l'intensité I, une nappe de courant ayant la même forme et pour laquelle la fonction de courant est

$$\varphi = Iz. \tag{1}$$

Les courants de la nappe seront compris dans des plans parallèles aux xy, et l'intensité du courant qui circule dans une tranche d'épaisseur dz est $I\,dz$.

Le potentiel magnétique dû à cette nappe de courants est, en un point quelconque extérieur à la nappe,

$$\Omega = -I\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{2}$$

En un point intérieur à la nappe, il est

$$\Omega = -4\pi Iz - I\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{3}$$

Les composantes du potentiel vecteur sont

$$F = I\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad G = -I\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad H = 0. \tag{4}$$

Ces résultats peuvent trouver leur application à plusieurs cas qui se présentent dans la pratique.

675. 1° Un circuit électrique plan de forme quelconque : soit V le potentiel dû à une nappe de courant plane, de densité superficielle égale à l'unité; si à cette nappe nous substituons un feuillet magnétique de puissance I, ou un courant électrique d'intensité I suivant le contour de la nappe, les valeurs de Ω, F, G et H sont celles qui ont été données plus haut.

2° Pour une sphère pleine de rayon a

$$V = \frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{r}, \quad \text{pour } r \text{ plus grand que } a, \tag{5}$$

$$V = \frac{2\pi}{3}(3a^2 - r^2), \quad \text{pour } r \text{ plus petit que } a. \tag{6}$$

Si donc une pareille sphère est aimantée parallèlement aux x avec une intensité I, le potentiel magnétique est

(7) $$\Omega = \frac{4\pi}{3} I \frac{a^3}{r^3} x,$$ en dehors de la sphère,

(8) $$\Omega = \frac{4\pi}{3} I z,$$ à l'intérieur de la sphère.

Si, au lieu d'être aimantée, la sphère est couverte de fil enroulé en cercles équidistants, l'intensité totale du courant compris entre deux petits cercles dont les plans sont à l'unité de distance, étant I, la valeur de Ω en dehors de la sphère est la même que précédemment; mais, à l'intérieur de la sphère,

(9) $$\Omega = -\frac{8\pi}{3} I z.$$

C'est le cas qui a déjà été discuté au § 672.

3° Le cas d'un ellipsoïde uniformément aimanté, parallèlement à une ligne donnée, a été discuté au § 437.

Si l'ellipsoïde est couvert de fil enroulé suivant des plans parallèles et équidistants, la force magnétique à l'intérieur de l'ellipsoïde est uniforme.

4° Aimant cylindrique ou solénoïde.

676. Si le corps est un cylindre ayant une section de forme quelconque, et limité par des plans perpendiculaires à ses génératrices; si V_1 est le potentiel au point (x, y, z) dû à une aire plane de densité superficielle égale à l'unité coïncidant avec l'extrémité positive du solénoïde, et si V_2 est le potentiel au même point dû à une aire plane de densité superficielle égale à l'unité coïncidant avec l'extrémité négative; si enfin le cylindre a une aimantation uniforme et longitudinale égale à l'unité : le potentiel au point (x, y, z) est

(10) $$\Omega = V_1 - V_2.$$

Si, au lieu d'être aimanté, le cylindre est uniformément recouvert de fil, de façon qu'il y ait n tours de fil par unité de longueur, et si un courant γ passe dans ce fil, le potentiel magnétique extérieur au solénoïde est, comme précédemment,

(11) $$\Omega = n\gamma(V_1 - V_2),$$

mais, à l'intérieur de l'espace limité par le solénoïde et ses extrémités

planes,

$$\Omega = n\gamma(-4\pi z + V_1 - V_2). \tag{12a}$$

Le potentiel magnétique est discontinu aux extrémités planes du solénoïde, mais la force magnétique est continue.

Supposons que les distances r_1 et r_2 du point (x, y, z) aux centres d'inertie des deux extrémités planes du solénoïde soient très grandes, relativement aux dimensions transversales de ce solénoïde, nous pouvons écrire

$$V_1 = \frac{A}{r_1}, \qquad V_2 = \frac{A}{r_2}, \tag{13}$$

A étant l'aire des deux sections.

La force magnétique extérieurement au solénoïde est donc très petite, et, à l'intérieur, la force se rapproche d'une force parallèle à l'axe, dirigée dans le sens positif et égale à $4\pi n\gamma$.

Si la section du solénoïde est un cercle de rayon a, les valeurs de V_1 et V_2 peuvent s'exprimer par les séries d'harmoniques sphériques données par Thomson et Tait (*Natural Philosophy*, § 546, Ex. II)

$$\text{(14)} \quad \begin{cases} V = 2\pi\left(-rP_1 + a - \frac{1}{2}\frac{r^2}{a}P_2 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{r^4}{a^3}P_4 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{r^6}{a^5}P_6 + \ldots\right), \\ \qquad \text{pour } r < a, \end{cases}$$

$$\text{(15)} \quad \begin{cases} V = 2\pi\left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{r} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{a^4}{r^3}P_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{a^6}{r^5}P_4 - \ldots\right), \\ \qquad \text{pour } r > a. \end{cases}$$

Dans ces expressions, r est la distance du point (x, y, z) au centre d'une des extrémités circulaires du solénoïde, et les harmoniques zonaux $P_1, P_2, \ldots$ sont ceux qui correspondent à l'angle θ que r fait avec l'axe du cylindre.

La première de ces expressions est discontinue quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, mais nous devons rappeler qu'à l'intérieur du solénoïde nous devons ajouter à la force magnétique déduite de cette expression une force longitudinale $4\pi n\gamma$.

677. Considérons maintenant un solénoïde assez long pour que, dans la partie de l'espace que nous considérons, on puisse négliger les termes qui dépendent de la distance aux extrémités.

L'induction magnétique à travers une courbe fermée, tracée à l'intérieur du solénoïde, est

$$4\pi n\gamma A',$$

A' étant l'aire de la projection de cette courbe sur un plan normal à l'axe du solénoïde.

Si la courbe fermée est extérieure au solénoïde, et qu'elle l'entoure, l'induction magnétique à travers cette courbe est

$$4\pi n\gamma A,$$

A étant l'aire de la section du solénoïde. Si la courbe fermée n'entoure pas le solénoïde, l'induction magnétique à travers cette courbe est nulle.

Si un fil est enroulé n' fois autour du solénoïde, le coefficient d'induction entre lui et le solénoïde est

$$M = 4\pi nn' A. \tag{16}$$

En supposant que ces n' tours coïncident avec n tours du solénoïde, nous trouvons que le coefficient de self-induction, pour l'unité de longueur d'un solénoïde prise à une distance suffisante des extrémités, est

$$L = 4\pi n^2 A. \tag{17}$$

Près des extrémités du solénoïde, nous devons tenir compte des termes qui dépendent de la distribution fictive du magnétisme sur les extrémités planes du solénoïde. L'effet de ces termes est de réduire le coefficient d'induction entre un solénoïde et un circuit à une valeur moindre que la valeur $4\pi nA$ que prend ce coefficient quand le circuit entoure un solénoïde très long, à une grande distance de ses extrémités.

Considérons le cas de deux solénoïdes circulaires, de même axe, et de même longueur l. Soit c_1 le rayon du solénoïde extérieur; supposons-le formé d'un fil tel qu'il ait n_1 tours par unité de longueur; soit c_2 le rayon du solénoïde intérieur, et soit n_2 le nombre de ses tours par unité de longueur. Le coefficient d'induction entre les deux solénoïdes sera, en négligeant l'effet des extrémités,

$$M = G\mathcal{g}, \tag{18}$$

où

$$G = 4\pi n_1 \tag{19}$$

et

$$\mathcal{g} = \pi c_2^2 l n_2. \tag{20}$$

678. Pour déterminer l'effet de l'extrémité positive des solénoïdes, nous devons calculer le coefficient d'induction sur le solénoïde exté-

rieur dû au disque circulaire qui forme l'extrémité du solénoïde intérieur.

A cet effet, nous prenons la seconde expression de V, donnée à l'équation (15), et nous la différentions par rapport à r. Cela nous donne la force magnétique dans la direction du rayon. Nous multiplions alors par $2\pi r^2 d\mu$, et nous intégrons, par rapport à μ, depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = \frac{s}{\sqrt{s^2+c_1^2}}$. Cela nous donne le coefficient d'induction pour un seul tour de fil du solénoïde extérieur situé à une distance s de l'extrémité positive. Nous multiplions donc par ds, et nous intégrons depuis $s = l$ jusqu'à $s = 0$. Enfin nous multiplions par $n_1 n_2$, et nous avons ainsi l'effet qu'a l'une des extrémités pour diminuer le coefficient d'induction.

Nous trouvons ainsi, pour valeur du coefficient d'induction mutuelle des deux cylindres,

$$M = 4\pi^2 n_1 n_2 c_1^3 (l - 2c_1\alpha), \tag{21}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} \alpha = {} & \frac{1}{2}\frac{c_1 + l - r}{c_1} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{2.3}\frac{c_1^2}{c_1^2}\left(1 - \frac{c_1^2}{r^2}\right) \\ & + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{4.5}\frac{c_1^4}{c_1^4}\left(-\frac{1}{2} - 2\frac{c_1^2}{r^2} + \frac{5}{2}\frac{c_1^4}{r^4}\right) + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

où, pour abréger, on a posé r pour $\sqrt{l^2 + c_1^2}$.

Il résulte de là que, quand on calcule l'induction mutuelle de deux solénoïdes de même axe, on doit remplacer, dans l'expression (20), la vraie longueur l par la longueur corrigée $l - 2c_1\alpha$, comme si l'on supposait enlevée à chaque bout une longueur égale à αc_1. Si le solénoïde est très long en comparaison de son rayon extérieur,

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}\frac{c_1^2}{c_1^2} - \frac{1}{128}\frac{c_1^4}{c_1^4} + \ldots. \tag{23}$$

679. Si le solénoïde est formé d'un certain nombre de couches d'un fil tel qu'il y ait n couches par unité de longueur, le nombre des couches comprises dans l'épaisseur dr est $n\,dr$, et nous avons

$$G = 4\pi \int n^2 dr, \qquad g = \pi l \int n^2 r^2 dr. \tag{24}$$

Si l'épaisseur du fil est constante, et si l'induction se produit entre une bobine extérieure, dont les rayons extérieur et intérieur sont x et y, et une bobine intérieure, dont les rayons extérieur et intérieur

sont y et z, on a, en négligeant l'effet des extrémités,

$$(25) \qquad Gg = \tfrac{1}{3}\pi^2 l n_1^2 n_2^2 (x-y)(y^3-z^3).$$

Pour que cette expression soit maximum, étant donnés x et z, et y étant variable, il faut que

$$(26) \qquad x = \tfrac{4}{3}y - \tfrac{1}{3}\frac{z^3}{y^2}.$$

Cette équation donne la relation la plus avantageuse entre les épaisseurs de la bobine primaire et de la bobine secondaire d'une bobine d'induction sans noyau de fer.

S'il y a un noyau de fer de rayon z, G reste ce qu'il était précédemment, mais

$$(27) \qquad g = \pi l \int n^2 (r^2 + \tfrac{4}{3}\pi\varkappa z^3)\, dr$$

$$(28) \qquad = \pi l n^2 \left[\frac{y^3-z^3}{3} + 4\pi\varkappa z^3 (y-z)\right].$$

Étant donné y, la valeur de z qui donne la plus grande valeur de G est

$$(29) \qquad z = \tfrac{2}{3}\, y\, \frac{18\pi\varkappa}{18\pi\varkappa + 1}.$$

Si, comme c'est le cas pour le fer, $\varkappa$ est un nombre considérable, $z =$ à peu près $\frac{2}{3}y$.

Si, maintenant, faisant x constant, nous rendons y et z variables, nous obtenons la valeur maximum de Gg quand

$$(30) \qquad x : y : z :: 4 : 3 : 2.$$

Le coefficient de self-induction d'un long solénoïde, dont les rayons extérieur et intérieur sont x et y, et qui a un long noyau de fer de rayon z, est, par unité de longueur,

$$(31) \quad \begin{cases} 4\pi \displaystyle\int_y^x \left[\pi l \int_\rho^x n^2 (\rho^2 + 4\pi\varkappa z^3)\, dr + \pi l \int_z^\rho n^2 (r^2 + 4\pi\varkappa z^3)\, dr\right] n^2 d\rho \\ \quad = \tfrac{2}{3}\pi^2 l n^2 (x-y)^2 (x^2 + 2xy + 3y^2 + 24\pi\varkappa z^3). \end{cases}$$

680. Jusqu'ici nous avons supposé que le fil avait une épaisseur uniforme. Nous allons maintenant déterminer la loi suivant laquelle l'épaisseur doit varier dans les différentes couches pour que, pour une résistance donnée de la bobine primaire ou de la bobine secondaire, le coefficient d'induction mutuelle soit maximum.

Soit ρn^2 la résistance de l'unité de longueur d'un fil, tel que n de ses tours occupent l'unité de longueur sur le solénoïde.

La résistance du solénoïde entier est

$$R = 2\pi l \int n^2 r\, dr. \tag{32}$$

La condition qui donne le maximum de G pour une valeur donnée de R est

$$\frac{dG}{dr} = C\frac{dR}{dr},$$

C étant une constante.

Ce qui donne n^2 proportionnel à $\frac{1}{r}$, ou bien le diamètre du fil de la bobine extérieure, doit être proportionnel à la racine carrée du rayon.

Pour que, pour une valeur donnée de R, g soit maximum,

$$n^2 = C\left(r + \frac{4\pi x z^2}{r}\right).$$

Donc, s'il n'y a point de noyau de fer, le diamètre du fil de la bobine extérieure doit être en raison inverse de la racine carrée du rayon; mais, s'il y a un noyau de fer ayant une capacité d'aimantation considérable, le diamètre du fil doit se rapprocher davantage d'être directement proportionnel à la racine carrée du rayon de la couche.

Solénoïde sans fin.

681. Le solide engendré par la rotation d'une aire plane autour d'un axe situé dans son plan et ne le rencontrant pas a la forme d'un anneau. Si, autour de cet anneau, on enroule du fil de façon que les tours soient dans des plans passant par l'axe de l'anneau, et que n soit le nombre total des tours, la fonction de courant φ de la couche de fil est

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} n\gamma\theta,$$

θ étant l'azimut relativement à l'axe de l'anneau.

Si Ω est le potentiel magnétique à l'intérieur de l'anneau, et Ω' le potentiel à l'extérieur,

$$\Omega - \Omega' = -4\pi\varphi + C = -2n\gamma\theta + C.$$

En dehors de l'anneau, Ω' doit satisfaire à l'équation de Laplace et s'annuler à une distance infinie. D'ailleurs, d'après la nature du pro-

blème, ce doit être une fonction de θ seulement. La seule valeur de Ω' qui satisfasse à ces conditions est zéro. Donc

$$\Omega' = 0, \qquad \Omega = -2n\gamma\theta + C.$$

En un point quelconque situé à l'intérieur de l'anneau, la force magnétique est perpendiculaire au plan qui passe par l'axe et égale à

$$2n\gamma\frac{1}{r},$$

où r est la distance à l'axe. Extérieurement à l'anneau, il n'y a pas de force magnétique.

Si la forme d'une courbe fermée est donnée par les coordonnées z, r et θ du point qui la décrit, exprimées en fonction de la longueur s de l'arc de courbe compté à partir d'un point fixe, l'induction magnétique à travers cette courbe fermée peut s'obtenir en intégrant le long de la courbe le potentiel vecteur dont les composantes sont

$$F = \frac{xz}{r^2}, \qquad G = \frac{yz}{r^2}, \qquad H = 0.$$

On trouve ainsi

$$2n\gamma\int_0^s \frac{z}{r}\frac{dr}{ds}\,ds,$$

prise le long de la courbe, pourvu que cette courbe se trouve comprise en entier à l'intérieur de l'anneau.

Si la courbe est tout entière extérieure à l'anneau, mais l'entoure, l'induction magnétique à travers cette courbe est

$$2\pi\gamma\int_0^{s'} \frac{z'}{r'}\frac{dr'}{ds'}\,ds' = 2n\gamma a,$$

où les lettres accentuées ne se rapportent plus à la courbe fermée, mais à un tour de fil du solénoïde.

Donc, l'induction magnétique à travers une courbe fermée quelconque, qui entoure l'anneau, est constante et égale à $2n\gamma a$, où a est la quantité linéaire $\int_0^{s'} \frac{z'}{r'}\frac{dr'}{ds'}\,ds'$. Enfin l'induction magnétique à travers une courbe fermée qui n'entoure pas l'anneau est nulle.

Soit un second fil enroulé d'une manière quelconque autour de l'anneau, sans être forcément en contact avec lui, et l'entourant n' fois; l'induction à travers ce fil est $2nn'\gamma\alpha$, et, par suite, le coeffi-

cient d'induction d'une des bobines sur l'autre est

$$M = 2nn'a.$$

Puisqu'il est complètement indépendant de la forme ou de la position particulière du second fil, si les fils étaient traversés par un courant électrique, ils ne seraient soumis à aucune force mécanique agissant entre eux. En faisant coïncider le second fil avec le premier, nous obtenons pour coefficient de self-induction de la bobine annulaire

$$L = 2n^2a.$$

CHAPITRE XIII.

COURANTS PARALLÈLES.

Conducteurs cylindriques.

682. Dans une classe très importante d'appareils électriques, le courant circule dans des fils de section circulaire à peu près uniforme, qui tantôt sont rectilignes, tantôt sont courbés de telle manière que le rayon de courbure de leur axe est très grand relativement au rayon de leur section transversale. Pour nous mettre en mesure de traiter par le calcul de pareils systèmes, nous commencerons par le cas de deux conducteurs parallèles très longs reliés à leurs extrémités, et nous ne porterons notre attention que sur une partie du circuit assez éloignée des extrémités des conducteurs, pour qu'il n'y ait point de changement sensible dans la distribution de la force résultant de ce fait que les conducteurs ne sont pas infiniment longs.

Nous prendrons l'axe des z parallèle à la direction des conducteurs, et alors, en raison de la symétrie du système dans la partie du champ que nous considérons, tout dépendra de la composante H du potentiel vecteur parallèlement à l'axe des z.

Les composantes de l'induction magnétique deviennent, d'après les équations (A),

$$a = \frac{\partial H}{\partial y}, \tag{1}$$

$$b = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{2}$$

$$c = 0.$$

Pour plus de généralité, nous supposerons que le coefficient d'induction magnétique soit μ, en sorte que $a = \mu\alpha$ et $b = \mu\beta$, α et β étant les composantes de la force magnétique.

Les équations des courants électriques (E) (§ 607) donnent

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad 4\pi w = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \tag{3}$$

683. Si l'intensité est une fonction de la distance r à l'axe des z, et si nous posons

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \tag{4}$$

en désignant par β la force magnétique dans la direction où est mesuré θ, perpendiculairement au plan qui passe par l'axe des z, nous avons

$$4\pi w = \frac{d\beta}{dr} + \frac{1}{r}\beta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\beta r). \tag{5}$$

Si C est le courant total qui passe par une section limitée dans le plan des xy par un cercle de rayon r ayant son centre à l'origine,

$$C = \int_0^r 2\pi r w\, dr = \tfrac{1}{2}\beta r. \tag{6}$$

On voit donc qu'en un point donné la force magnétique, due à un courant disposé en couches cylindriques ayant pour axe commun l'axe des z, ne dépend que de l'intensité totale du courant qui passe dans les couches comprises entre l'axe et le point donné, et non de la répartition du courant entre les différentes couches cylindriques. (*Voir* la Note I à la fin de ce Chapitre.)

Par exemple, le conducteur étant un fil uniforme de rayon a, et l'intensité totale du courant qui le traverse étant C, si le courant est réparti uniformément entre toutes les parties de la section, w sera constant et

$$C = \pi w a^2. \tag{7}$$

Le courant qui traverse une section circulaire de rayon r, r étant plus petit que a, est $C' = \pi w r^2$. Donc, en un point intérieur du fil,

$$\beta = \frac{2C'}{r} = 2C\frac{r}{a^2}. \tag{8}$$

En dehors du fil,

$$\beta = \frac{2C}{r}. \tag{9}$$

Dans la masse du fil, il n'y a pas de potentiel magnétique; car, à l'intérieur d'un conducteur traversé par un courant électrique, la force magnétique ne satisfait pas à la condition de dériver d'un potentiel.

En dehors du fil, le potentiel magnétique est

$$\Omega = -2C\theta. \tag{10}$$

Supposons qu'au lieu d'être un fil le conducteur soit un tube de

métal dont les rayons extérieur et intérieur sont a_1 et a_2; si C est le courant qui passe dans le conducteur tubulaire,

$$C = \pi w (a_1^2 - a_2^2), \tag{11}$$

A l'intérieur du tube, la force magnétique est nulle. Dans la masse même du tube, où r est compris entre a_1 et a_2,

$$\beta = 2C \frac{1}{a_1^2 - a_2^2} \left(r - \frac{a_2^2}{r} \right); \tag{12}$$

en dehors du tube,

$$\beta = \frac{2C}{r}, \tag{13}$$

comme si le courant passait dans un fil plein.

684. L'induction magnétique en un point quelconque est $b = \mu\beta$, et puisque, d'après l'équation (2),

$$b = -\frac{dH}{dr}, \tag{14}$$

$$H = -\int \mu\beta\, dr. \tag{15}$$

La valeur de H, en dehors du tube, est

$$A - 2\mu_0 C \log r, \tag{16}$$

où μ_0 est la valeur de μ dans l'espace extérieur au tube, et où A est une constante quelconque dont la valeur dépend de la position du courant de retour.

Dans la masse du tube,

$$H = A - 2\mu_0 C \log a_1 + \frac{\mu C}{a_1^2 - a_2^2} \left(a_1^2 - r^2 + 2a_2^2 \log \frac{r}{a_1} \right). \tag{17}$$

Dans l'espace intérieur au tube, H est constant et égal à

$$H = A - 2\mu_0 C \log a_1 + \mu C \left(1 + \frac{2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} \log \frac{a_2}{a_1} \right). \tag{18}$$

685. Supposons le circuit complété par un courant de retour circulant dans un fil ou dans un tube parallèle au premier, les axes des deux courants étant à la distance b l'un de l'autre. Pour déterminer l'énergie cinétique du système, nous devons calculer l'intégrale

$$T = \frac{1}{2} \iiint H w\, dx\, dy\, dz. \tag{19}$$

Si nous ne portons notre attention que sur la partie du système qui est comprise entre deux plans perpendiculaires aux axes des conducteurs et écartés l'un de l'autre de l, l'expression devient

$$T = \frac{1}{2} l \iint H w \, dx dy. \tag{20}$$

Si nous distinguons par un accent les quantités relatives au courant de retour, nous pouvons écrire

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2T}{l} &= \iint H w' \, dx' dy' + \iint H' w \, dx dy \\ &\quad + \iint H w \, dx dy + \iint H' w' \, dx' dy'. \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Puisque l'action du courant sur un point extérieur au tube est la même que si le même courant était concentré sur l'axe du tube, la valeur moyenne de H pour la section de retour est (1)

$$A - 2\mu_0 C \log b,$$

et la valeur moyenne de H' pour la section du courant positif est

$$A' - 2\mu_0 C' \log b.$$

Donc, dans l'expression de T, les deux premiers termes peuvent s'écrire

$$AC' - 2\mu_0 CC' \log b \quad \text{et} \quad A'C - 2\mu_0 CC' \log b.$$

Intégrons les deux derniers termes de la manière ordinaire et ajoutons les résultats, en nous souvenant que $C + C' = 0$: nous obtenons la valeur de l'énergie cinétique T. En l'égalant à $\frac{1}{2} LC^2$, où L est le coefficient de self-induction du système des deux conducteurs, nous avons pour valeur de L, par unité de longueur du système,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{L}{l} &= 2\mu_0 \log \frac{b^2}{a_1 a_1'} + \frac{1}{2}\mu \left[\frac{a_1^2 - 3a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} + \frac{2a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \log \frac{a_1}{a_2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\mu' \left[\frac{a_1'^2 - 3a_2'^2}{a_1'^2 - a_2'^2} + \frac{2a_2'^4}{(a_1'^2 - a_2'^2)^2} \log \frac{a_1'}{a_2'} \right]. \end{aligned} \right. \tag{22}$$

Si les conducteurs sont des fils pleins, a_2 et a_2' sont nuls et

$$\frac{L}{l} = 2\mu_0 \log \frac{b^2}{a_1 a_1'} + \frac{1}{2}(\mu + \mu'). \tag{23}$$

C'est seulement dans le cas de fils de fer que nous avons à tenir

(1) Non évident, mais démontré plus loin, § 692.

compte de l'induction magnétique en calculant le coefficient de self-induction. Dans les autres cas, nous pouvons faire μ_0, μ_1 et μ' tous égaux à l'unité. (*Voir* la Note II à la fin du Chapitre.) Plus le rayon des fils est petit et plus est grande la distance qui les sépare; plus est grande aussi la self-induction.

Trouver la répulsion X entre deux parties du fil.

686. D'après le § 580, nous avons pour la force qui tend à accroître b

$$(24)\qquad \begin{cases} X = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial b} C^2, \\ \quad = 2\mu_0 \frac{l}{b} C^2, \end{cases}$$

ce qui est d'accord avec la formule d'Ampère quand $\mu_0 = 1$, comme c'est le cas dans l'air.

687. Si la longueur des fils est grande relativement à leur distance, on peut se servir du coefficient de self-induction pour déterminer la tension qui résulte dans les fils de l'action du courant.

Si Z est cette tension,

$$(25)\qquad \begin{cases} Z = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial l} C^2 \\ \quad = C^2\left(\mu_0 \log \frac{b^2}{a_1 a_1'} + \frac{\mu}{2}\right). \end{cases}$$

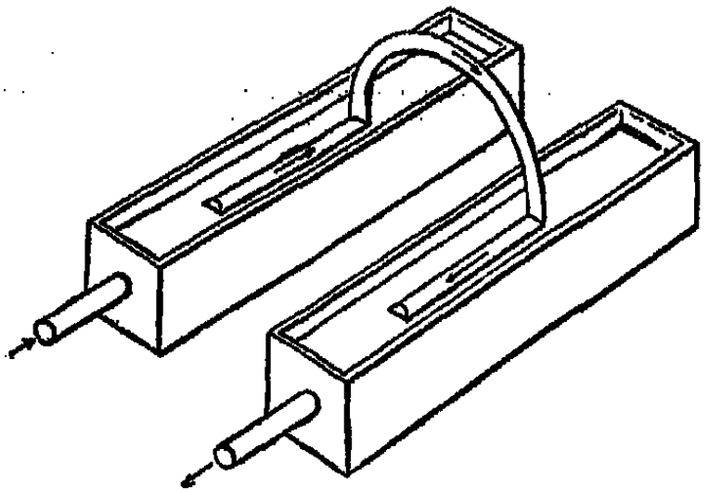
Dans une des expériences d'Ampère, les conducteurs parallèles sont formés par deux auges de mercure reliées par un arc métallique flottant sur le mercure. Si l'on fait entrer par l'extrémité d'une des auges un courant qui circule jusqu'à ce qu'il rencontre une extrémité du fil flottant par lequel il passe dans l'autre auge et qui revient le long de cette auge, le flotteur se meut le long des auges de manière à accroître la longueur de mercure qui est traversée par le courant.

Le professeur Tait a simplifié les conditions électriques de cette expérience, en remplaçant le fil par un siphon flottant rempli de mercure, de sorte que le courant ne traverse que du mercure dans tout son parcours.

On allègue quelquefois cette expérience pour prouver que deux éléments de courants situés en ligne droite se repoussent, et pour

montrer ainsi que la formule d'Ampère, qui indique une telle répulsion entre des éléments en ligne droite, est plus exacte que la for

Fig. 40.



mule de Grassmann, laquelle n'indique aucune action entre des éléments situés en ligne droite (*voir* § 526).

Mais il est clair que, puisque la formule d'Ampère et celle de Grassmann donnent les mêmes résultats pour les circuits fermés, et que nous n'avons dans cette expérience qu'un circuit fermé, ses résultats ne sauraient confirmer une de ces théories plutôt que l'autre.

En fait, les deux formules conduisent pour cette répulsion à la même valeur, que l'on vient de donner, et de laquelle il ressort que la distance b des deux conducteurs parallèles est un élément important.

Si la longueur des conducteurs n'est pas très grande relativement à leur distance, la valeur de L se présente sous une forme un peu plus compliquée.

688. Quand la distance des conducteurs diminue, la valeur de L diminue. Le terme de cette diminution correspond au contact des fils, ou à $b = a_1 + a'_1$. Dans ce cas,

$$(26) \qquad L = 2l\left[\log \frac{(a_1 + a'_1)^2}{a_1 a'_1} + \frac{1}{2}\right].$$

Or cette expression est minimum pour $a_1 = a'_1$, et alors

$$\begin{aligned} L &= 2l(\log 4 + \tfrac{1}{2}) \\ &= 2l.1,8863 \\ &= 3,7726\,l. \end{aligned}$$

Telle est la plus petite valeur de la self-induction d'un fil de longueur totale $2l$ replié sur lui-même.

Puisque les deux parties du fil doivent être isolées l'une de l'autre, la self-induction ne peut jamais atteindre cette valeur limite. On peut diminuer indéfiniment la self-induction en remplaçant les fils ronds par des bandes de métal larges et plates.

Force électromotrice nécessaire pour produire un courant d'intensité variable le long d'un conducteur cylindrique.

689. Quand le courant qui passe dans un fil a une intensité variable, la force électromotrice due à l'induction du fil sur lui-même est différente aux différents points d'une même section du fil, car elle est en général fonction de la distance à l'axe du fil aussi bien que du temps. Si nous supposons que le conducteur cylindrique soit formé d'un faisceau de fils, faisant tous partie du même circuit, de façon que le courant ait forcément la même intensité en chacune des parties d'une section du faisceau, la méthode de calcul que nous avons employée jusqu'à présent est rigoureusement applicable. Mais, si nous considérons le conducteur cylindrique comme une masse solide dans laquelle les courants circulent librement en obéissant à la force électromotrice, l'intensité du courant n'est plus la même à différentes distances de l'axe du cylindre, et les forces électromotrices elles-mêmes dépendent de la distribution du courant dans les couches cylindriques du fil.

Le potentiel vecteur H, la densité du courant w et la force électromotrice en un point quelconque doivent être considérées comme des fonctions du temps et de la distance à l'axe du fil.

Le courant total C qui passe par la section du fil, et la force électromotrice E qui agit entre les extrémités du circuit, doivent être regardées comme les variables dont nous avons à trouver la relation.

Supposons que la valeur de H soit

$$(1) \qquad H = S + T_0 + T_1 r^2 + \ldots + T_n r^{2n},$$

où S, T_0, T_1, ... sont des fonctions du temps.

D'après l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2H}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH}{dr} = -4\pi w,$$

nous avons

$$(3) \qquad -\pi w = T_1 + \ldots + n^2 T_n r^{2n-2}.$$

Si ρ désigne la résistance spécifique de la substance par unité de volume, la force électromotrice en un point quelconque est ρw, et peut s'exprimer en fonction du potentiel électrique et du potentiel vecteur H par les équations (B), § 508,

$$\rho w = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{4}$$

ou

$$-\rho w = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT_0}{dt} + \frac{dT_1}{dt} r^2 + \ldots + \frac{dT_n}{dt} r^{2n}. \tag{5}$$

Comparant les coefficients des puissances semblables de r dans les équations (3) et (5),

$$T_1 = \frac{\pi}{\rho}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT_0}{dt}\right), \tag{6}$$

$$T_2 = \frac{\pi}{\rho}\frac{dT_1}{dt}, \tag{7}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$T_n = \frac{\pi}{\rho}\frac{1}{n^2}\frac{dT_{n-1}}{dt}; \tag{8}$$

d'où nous tirons

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \tag{9}$$

$$T_0 = T, \qquad T_1 = \frac{\pi}{\rho}\frac{dT}{dt}, \qquad \ldots, \qquad T_n = \frac{\pi^n}{\rho^n}\frac{1}{(n!)^2}\frac{d^n T}{dt^n}. \tag{10}$$

690. Pour trouver le courant total C, nous devons intégrer w pour toute la section du fil de rayon a

$$C = 2\pi \int_0^a w r\, dr. \tag{11}$$

En substituant la valeur de πw, tirée de l'équation (3), nous avons

$$C = -(T_1 a^2 + \ldots + n T_n a^{2n}). \tag{12}$$

La valeur de H en un point extérieur au fil ne dépend que de la valeur du courant total C, et non de la façon dont ce courant est distribué dans le fil. Nous pouvons donc admettre que la valeur de H à la surface du fil est AC, où A est une constante à déterminer par le calcul, d'après la forme générale du circuit. Posant $H = AC$ pour $r = a$, nous avons

$$AC = S + T_0 + T_1 a^2 + \ldots + T_n a^{2n}. \tag{13}$$

Si maintenant nous posons $\frac{\pi a^2}{\rho} = \alpha$, α est la valeur de la conductibilité par unité de longueur du fil, et nous avons

$$(14) \qquad C = -\left[\alpha\frac{dT}{dt} + \frac{2\alpha^2}{1^2.2^2}\frac{d^2T}{dt^2} + \ldots + \frac{n\alpha^n}{(n!)^2}\frac{d^nT}{dt^n} + \ldots\right],$$

$$(15) \qquad AC - S = T + \alpha\frac{dT}{dt} + \frac{\alpha^2}{1^2.2^2}\frac{d^2T}{dt^2} + \ldots + \frac{\alpha^n}{(n!)^2}\frac{d^nT}{dt^n} + \ldots.$$

Pour éliminer T entre ces équations, nous devons d'abord prendre l'inverse de la série (14), ce qui nous donne

$$\alpha\frac{dT}{dt} = -C + \frac{1}{2}\alpha\frac{dC}{dt} - \frac{1}{6}\alpha^2\frac{d^2C}{dt^2} + \frac{7}{144}\alpha^3\frac{d^3C}{dt^3} - \frac{739}{28800}\alpha^4\frac{d^4C}{dt^4} + \ldots.$$

Nous avons aussi, d'après (14) et (15),

$$\alpha\left(A\frac{dC}{dt} - \frac{dS}{dt}\right) + C = \frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{1}{6}\alpha^3\frac{d^3T}{dt^3} + \frac{1}{48}\alpha^4\frac{d^4T}{dt^4} + \ldots.$$

Des deux dernières équations, nous tirons

$$(16) \quad \left\{\begin{aligned} &\alpha\left(A\frac{dC}{dt} - \frac{dS}{dt}\right) + C + \frac{1}{2}\alpha\frac{dC}{dt} - \frac{1}{12}\alpha^2\frac{d^2C}{dt^2} \\ &\qquad + \frac{1}{48}\alpha^4\frac{d^3C}{dt^3} - \frac{1}{180}\alpha^5\frac{d^4C}{dt^4} + \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l est la longueur totale du circuit, R sa résistance, E la force électromotrice due aux autres causes que l'induction du courant sur lui-même,

$$(17) \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{E}{l}, \qquad \alpha = \frac{l}{R},$$

$$(18) \quad \left\{\begin{aligned} E = RC &+ l\left(A + \frac{1}{2}\right)\frac{dC}{dt} - \frac{1}{12}\frac{l^2}{R}\frac{d^2C}{dt^2} \\ &+ \frac{1}{48}\frac{l^3}{R^2}\frac{d^3C}{dt^3} - \frac{1}{180}\frac{l^4}{R^3}\frac{d^4C}{dt^4} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme RC du second membre de cette équation exprime la force électromotrice nécessaire pour surmonter la résistance, d'après la loi de Ohm.

Le second terme, $l\left(A + \frac{1}{2}\right)\frac{dC}{dt}$, exprime la force électromotrice qui serait employée à accroître la quantité de mouvement électro-

cinétique du circuit, si le courant avait la même force en tous les points de la section du fil.

Les termes suivants représentent la correction à appliquer à cette valeur, en raison de ce que l'intensité n'est pas la même à différentes distances de l'axe du fil. Le système réel des courants a un plus grand degré de liberté que le système hypothétique, où le courant est astreint à avoir la même intensité en tous les points de la section. Donc la force électromotrice nécessaire pour produire un changement rapide dans l'intensité du courant réel est un peu moindre qu'elle ne le serait dans cette hypothèse.

La relation entre l'intégrale de temps de la force électromotrice et l'intégrale de temps de l'intensité est

$$(19) \qquad \int \mathrm{E}\,dt = \mathrm{R}\int \mathrm{C}\,dt + l\left(\Lambda + \frac{1}{2}\right)\mathrm{C} - \frac{1}{12}\,\frac{l^2}{\mathrm{R}}\,\frac{d\mathrm{C}}{dt} + \dots.$$

Si, avant l'origine du temps, le courant a une valeur constante C_0, monte à la valeur C_1 pendant le temps considéré, et reste constant à cette limite, les termes qui contiennent les dérivées de C s'annulent aux deux limites, et

$$(20) \qquad \int \mathrm{E}\,dt = \mathrm{R}\int \mathrm{C}\,dt + l(\Lambda + \tfrac{1}{2})(\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_0),$$

c'est-à-dire que l'impulsion électromotrice a la même valeur que si le courant était uniforme dans toute la section du fil (1).

Sur la moyenne distance géométrique de deux figures dans un plan (2).

691. Pour calculer l'action électromagnétique d'un courant qui passe dans un conducteur de section donnée quelconque sur un conducteur parallèle de section également donnée, nous avons à trouver l'intégrale

$$\int\int\int\int \log r\,dx\,dy\,dx'\,dy',$$

$dx\,dy$ étant un élément de surface de la première section, $dx'\,dy'$ un élément de la seconde, r la distance de ces deux éléments, et l'intégration étant étendue d'abord à tous les éléments de la première section et, ensuite, à tous ceux de la seconde.

---

(1) *Voir* la Note III à la fin du Chapitre.

(2) *Trans. R. S. Edin.*, 1871, 1872.

Si nous déterminons une ligne R, telle que cette intégrale soit égale à

$$A_1 A_2 \log R,$$

où A_1, A_2 sont les aires des deux sections, la longueur de la ligne R sera la même, quelle que soit l'unité de longueur adoptée et quel que soit le système des logarithmes dont on se sert. Si nous supposons les sections partagées en éléments d'égale grandeur, le logarithme de R multiplié par le nombre de couples d'éléments sera égal à la somme des logarithmes des distances de tous les couples d'éléments; R peut donc être considéré comme la moyenne géométrique des distances entre tous les couples d'éléments. Il est évident que la valeur de R doit être comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs de r.

Si R_A et R_B sont les moyennes distances géométriques de deux figures, A et B, à une troisième C, et si R_{A+B} est la moyenne distance géométrique de la somme de ces figures à C, on a

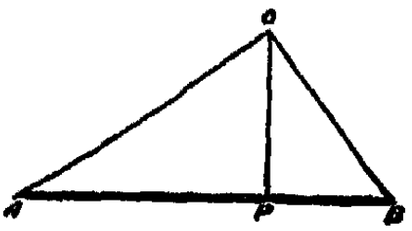
$$(A + B) \log R_{A+B} = A \log R_A + B \log R_B.$$

Cette relation permet de déterminer R pour une figure complexe quand on connaît R pour les parties de cette figure.

692. Exemples.

1. Soit R la moyenne distance du point O à la ligne AB. Soit OP la

Fig. 41.

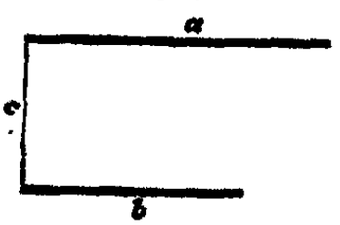


perpendiculaire à AB

$$AB(\log R + 1) = AP \log OA + PB \log OB + OP \cdot \widehat{AOB}.$$

2. Soient deux lignes a et b, menées perpendiculairement à une

Fig. 42.



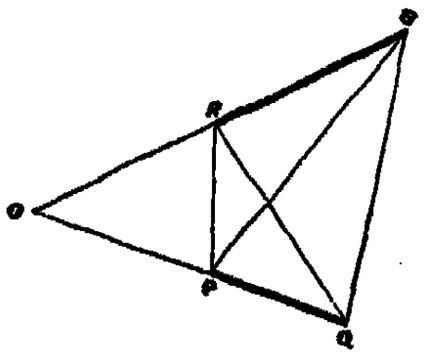
ligne c, d'un même côté de cette ligne (*fig.* 42), et R la moyenne

distance de ces deux lignes :

$$\begin{aligned} ab(2\log R + 3) = {} & [c^2 - (a-b)^2]\log\sqrt{c^2 + (a-b)^2} \\ & + c^2 \log c + (a^2 - c^2)\log\sqrt{a^2 + c^2} \\ & + (b^2 - c^2)\log\sqrt{b^2 + c^2} \\ & - c(a-b)\operatorname{arctang}\frac{a-b}{c} + ac\operatorname{arctang}\frac{a}{c} + bc\operatorname{arctang}\frac{b}{c}. \end{aligned}$$

3. Soient deux lignes, PQ et RS, qui se coupent en O (*fig.* 43),

Fig. 43.



$$\begin{aligned} PQ.RS(2\log R + 3) = {} & \log PR(2OP.OR\sin^2 O - PR^2\cos O \\ & + \log QS(2OQ.OS\sin^2 O - QS^2\cos O \\ & - \log PS(2OP.OS\sin^2 O - PS^2\cos O \\ & - \log QR(2OQ.OR\sin^2 O - QR^2\cos O \\ & - \sin O\Big[OP^2.\widehat{SPR} - OQ^2.\widehat{SQR} \\ & + OR^2.\widehat{PRQ} - OS^2.\widehat{PSQ}\Big]. \end{aligned}$$

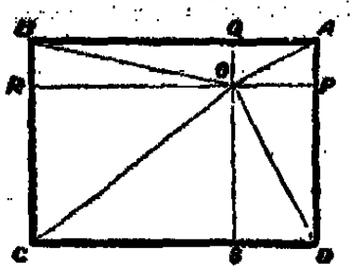
4. Soient un rectangle ABCD, un point O, et les perpendiculaires OP, OQ, OR, OS, abaissées de ce point sur les côtés

$$\begin{aligned} AB.AD(2\log R + 3) = {} & 2OP.OQ\log OA + 2OQ.OR\log OB \\ & + 2OR.OS\log OC + 2OS.OP\log OD \\ & + OP^2.\widehat{DOA} + OQ^2.\widehat{AOB} \\ & + OR^2.\widehat{BOC} + OS^2.\widehat{COD}. \end{aligned}$$

5. Il n'est pas nécessaire que les deux figures soient différentes, car

on peut trouver la moyenne géométrique des distances entre tous

Fig. 44.



les couples de points d'une même figure. Ainsi, pour une ligne droite de longueur a,

$$\log R = \log a - \tfrac{3}{2},$$

ou

$$R = ae^{-\frac{3}{2}},$$

$$R = 0,22313a \ (^1).$$

6. Pour un rectangle, dont les côtés sont a et b,

$$\log R = \log\sqrt{a^2+b^2} - \frac{1}{6}\frac{a^2}{b^2}\log\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\log\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} + \frac{2}{3}\frac{a}{b}\operatorname{arctang}\frac{b}{a} + \frac{2}{3}\frac{b}{a}\operatorname{arctang}\frac{a}{b} - \frac{25}{12}.$$

Si le rectangle est un carré de côté a,

$$\log R = \log a + \frac{1}{3}\log 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{25}{12},$$

$$R = 0,44705a.$$

7. La moyenne distance géométrique d'un point à une circonférence est égale à la plus grande des deux quantités, rayon du cercle ou distance du point au centre du cercle.

8. La moyenne distance géométrique d'une figure quelconque a un anneau limité par deux cercles concentriques est égale à sa moyenne distance géométrique au centre, si elle est entièrement extérieure à l'anneau; et, si elle lui est entièrement intérieure,

$$\log R = \frac{a_1^2\log a_1 - a_2^2\log a_2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{1}{2},$$

(1) Se déduit de l'exemple 2, en faisant $a = b$ et $c = 0$. [P.]

a_1 et a_2 étant les rayons extérieur et intérieur de l'anneau. Dans ce cas, R est indépendant de la forme de la figure située à l'intérieur de l'anneau.

9. La moyenne distance géométrique de tous les couples de points de l'anneau est donnée par l'équation

$$\log R = \log a_1 - \frac{a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \log \frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{4} \frac{3a_2^2 - a_1^2}{a_1^2 - a_2^2}.$$

Pour une aire circulaire de rayon a, ceci devient

$$\log R = \log a - \tfrac{1}{4}$$

ou

$$R = ae^{-\frac{1}{4}},$$

$$R = 0,7788\,a.$$

Pour une ligne circulaire

$$R = a.$$

693. Pour calculer le coefficient de self-induction d'une bobine de section uniforme, dont le rayon de courbure est grand relativement aux dimensions de la section transversale, nous commençons par déterminer la moyenne géométrique des distances de tous les couples de points de la section, par la méthode que l'on vient de décrire, et nous calculons ensuite le coefficient d'induction mutuelle de deux conducteurs linéaires de la forme donnée, placés à cette distance l'un de l'autre.

Ce sera le coefficient de self-induction de la bobine, quand le courant total traversant la bobine sera égal à l'unité, et que l'intensité sera uniforme en tous les points de la section.

S'il y a n tours dans la bobine, nous devrons multiplier par n^2 le coefficient ainsi obtenu, et nous aurons le coefficient de self-induction, dans l'hypothèse que les tours du fil conducteur remplissent la totalité de la section de la bobine.

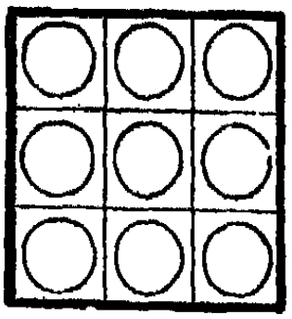
Mais le fil est cylindrique, et recouvert d'une matière isolante, de sorte que le courant n'est pas uniformément distribué sur toute la section, mais concentré en certaines parties, ce qui augmente le coefficient de self-induction. En outre, les courants qui circulent dans les fils voisins n'ont pas sur le courant qui passe dans un fil donné la même action qu'un courant uniformément réparti.

Les corrections auxquelles donnent lieu ces remarques peuvent être déterminées par la méthode de la moyenne distance géométrique.

Elles sont proportionnelles à la longueur totale du fil de la bobine, et peuvent s'exprimer sous forme de coefficients numériques par lesquels on multiplie la longueur du fil pour obtenir le coefficient de self-induction corrigé.

Soit d le diamètre du fil; il est recouvert d'une substance isolante et enroulé en bobine. Nous supposerons que les sections des fils soient superposées, comme dans la *fig.* 45, et que la distance d'axe en axe

Fig. 45.



des deux fils consécutifs soit D, dans le sens de la largeur aussi bien que dans le sens de la hauteur de la bobine. D est évidemment plus grand que d.

En premier lieu, il nous faut déterminer l'excès de la self-induction de l'unité de longueur d'un fil rond de diamètre d, sur la self-induction de l'unité de longueur du fil carré du côté D, soit

$$2 \log \frac{\text{R pour le carré}}{\text{R pour le cercle}} = 2\left(\log\frac{D}{d} + \frac{4}{3}\log 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{11}{6}\right) = 2\left(\log\frac{D}{d} + 0,1380606\right).$$

L'action inductive des huit fils ronds les plus voisins sur le fil considéré est inférieure à celle des huit fils carrés, les plus voisins sur le fil carré placé au milieu de leur groupe, de $2 \times 0,01971$.

On peut négliger les corrections relatives aux fils plus éloignés, et la correction totale peut s'écrire

$$2\left(\log_e \frac{D}{d} + 0,11835\right).$$

La valeur finale de la self-induction est donc

$$L = n^2 M + 2l\left(\log_e \frac{D}{d} + 0,11835\right),$$

où n est le nombre de tours et l la longueur du fil; M le coefficient d'induction mutuelle de deux circuits ayant la forme du fil moyen de la bobine, et écartés l'un de l'autre d'une distance R, R étant la moyenne distance géométrique des couples de points de la section; D étant la distance des fils consécutifs et d le diamètre du conducteur.

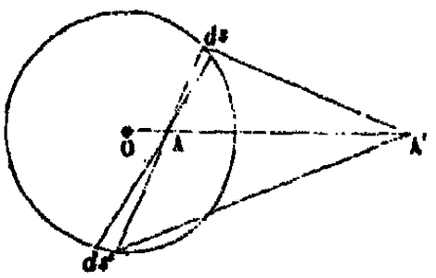
NOTE I

PAR M. A. POTIER.

Ces théorèmes se démontrent géométriquement d'une manière très simple.

1° Un conducteur annulaire très mince n'exerce aucune action sur un point

Fig. 46.



situé à son intérieur; car deux éléments ds, ds' de sa section droite sont les bases de deux filets dont les actions magnétiques sur un pôle A qui les voit sous le même angle sont égales et directement opposées;

2° L'action sur un pôle extérieur est la même que celle d'un courant linéaire de même intensité placé au centre. En effet, les deux éléments ds, ds', vus sous le même angle du point A conjugué de A', exercent deux actions égales, également inclinées sur OA', et dont la résultante est perpendiculaire à OA'; telle est aussi la direction de la force produite par l'anneau entier; sa grandeur est la somme des composantes $\frac{2C\,ds}{2\pi r\,MA'}\cos MA'O$ suivant cette direction; et, comme on a

$$\frac{ds}{MA'}\cos MA'O = \frac{ds}{MA}\,\frac{r}{OA'}\cos OMA = \frac{r}{OA}\,d\omega,$$

en désignant par $d\omega$ l'angle sous lequel ds est vu du point A, la somme de ces composantes est

$$\frac{2C}{OA}.$$

Ce résultat s'étend à un anneau d'une épaisseur finie, ou à un conducteur plein. Dans tous les cas, si w est la densité du courant, la force magnétique est égale à la résultante des forces exercées sur une masse matérielle attirée par tous les points de la section droite avec une force $\frac{2w}{r}\,dx\,dy$ (ou par tous les points du conducteur avec une force $\frac{w}{r^2}\,dx\,dy\,dz$) et lui est perpendiculaire; or cette dernière force se

déduit d'un potentiel $2\int w\,dx\,dy \times l.r$. Si l'on désigne par V la valeur de ce potentiel, elle est simplement fonction de la distance u du point à partir duquel on compte les r, et la force est

$$-\frac{dV}{du}.$$

Si la section du conducteur est un anneau de rayon intérieur a_1, de rayon extérieur a_2, et qu'on pose $\pi w(a_2^2 - a_1^2) = C$, l'intégrale $\int\int w\,dx\,dy \times l.r$, estimée pour le centre de l'anneau, est

$$2\pi w\left[\frac{a_2^2}{2} l.a_2 - \frac{a_1^2}{2} l.a_1 - \frac{1}{4}(a_2^2 - a_1^2)\right]$$

ou

$$C\left(\frac{a_2^2 l.a_2 - a_1^2 l.a_1}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{1}{2}\right).$$

La force étant nulle à l'intérieur de l'anneau, V y est constant jusqu'à ce que $u = a_1$; entre $u = a_1$ et $u = a_2$ la force est

$$\frac{2\pi w(u^2 - a^2)}{u} = 2\pi_1 \frac{C}{a_2^2 - a_1^2}\left(u - \frac{a_1^2}{u}\right);$$

la valeur de V en ce point est donc

$$2C\left(\frac{a_2^2 l.a_2 - a_1^2 l.a_1}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2C}{a_2^2 - a_1^2}\int_{a_1}^{u}\left(u - \frac{a^2}{u}\right)du$$

ou

$$2\pi w\left[a_2^2 l.a_2 - a_1^2 l.a_1 \tfrac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2) + \frac{u^2 - a_1^2}{2} - a_2^2 l.u + a_1^2 l.a_1\right]$$
$$= \pi w[a_2^2 l.a_2 - a_1^2 l.u - \tfrac{1}{2}(a_2^2 - u^2)];$$

enfin, à l'extérieur de l'anneau, on a

$$V_u = V(a_2) + \int_{a_2}^{u}\frac{\partial V}{du} = V(a_2) + 2(l.u - l.a_2)C,$$

d'où

$$V = 2C l.u.$$

Telles sont les diverses valeurs de l'intégrale $\int\int l.r w\,dx\,dy$ pour un point situé à une distance u de l'axe du cylindre creux, qui sont utilisées par Maxwell § 691.

NOTE II

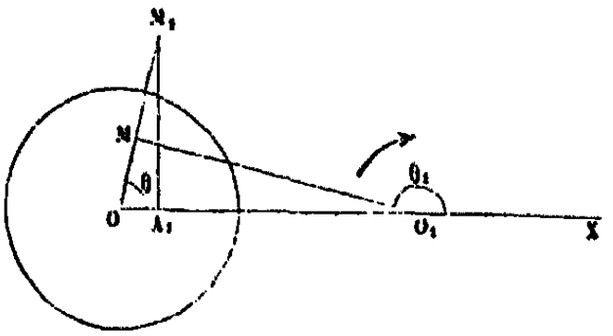
Sur l'induction de conducteurs magnétiques;

PAR M. A. POTIER.

Si les conducteurs parallèles sont d'une substance magnétique, la valeur réelle de L est plus compliquée que celle indiquée par Maxwell, qui n'est applicable qu'au cas où ces conducteurs ne sont point magnétiques; en effet, chacun de ceux-ci s'aimante par le fait du passage du courant, et les lignes de force n'étant pas tangentes à leur contour en tous points, cette aimantation change le champ magnétique à l'extérieur de chacun d'eux et, par suite, à l'intérieur de l'autre; et il n'est plus exact de prendre pour H une valeur de la forme $A - 2\mu C_0 \log r$.

On traitera d'abord le cas où l'un seulement des deux conducteurs est magnétique et l'on supposera les conducteurs pleins; a sera le conducteur magnétique et $\varkappa$ son coefficient d'aimantation, avec $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$; a_1 est le rayon du conducteur non magnétique. Sous l'influence du courant C, le conducteur magnétique s'ai-

Fig. 47.



mante et son aimantation est équivalente à une couche fictive de densité $\frac{2C}{2\pi}\frac{b\sin\theta}{r_1^2}\lambda$; r_1 est la distance d'un point P de son contour au centre O_1 de l'autre conducteur; en effet, cette couche a un potentiel intérieur $-2C\theta_1\lambda$, en appelant θ_1 pour un point M l'angle MO_1X; à l'intérieur du conducteur le potentiel magnétique sera

$$2C\theta_1(1-\lambda),$$

c'est-à-dire que la force magnétique y est perpendiculaire à O_1M en chaque point, comme s'il n'y avait pas d'aimantation, mais est réduite dans le rapport de 1 à $1-\lambda$; écrivant que la densité de la couche fictive est le produit de la composante normale par $\varkappa$, il vient

$$\varkappa(1-\lambda) = \frac{\lambda}{2\pi},$$

d'où

$$\lambda = \frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa},$$

et la force magnétique à l'intérieur du fer, due à la distribution superficielle seule, est

$$-\frac{2C\lambda}{r_1}.$$

A l'extérieur du fer, les surfaces équipotentielles sont les cercles passant par le point O et le conjugué A_1 de O_1 par rapport à la circonférence de rayon a; si ε représente l'angle M_1A_1X, et θ l'angle M_1OX, le potentiel est

$$\lambda(\varepsilon - O) \text{ au point } M_1.$$

La force magnétique en un point quelconque est alors la résultante des forces dues au courant et à l'aimantation ci-dessus; à l'extérieur des conducteurs ses composantes sont

$$\alpha = -2C\left[\frac{d\theta_1}{dx} - \frac{d\theta}{dx} + \lambda\frac{d}{dx}(\varepsilon-\theta)\right],$$

$$\beta = -2C\left[\frac{d\theta_1}{dy} - \frac{d\theta}{dy} + \lambda\frac{d}{dy}(\varepsilon-\theta)\right].$$

Dans le conducteur non magnétique,

$$\alpha = -2C\left[\frac{-y}{a_1^2} - \frac{d\theta}{dx} + \lambda\frac{d}{dx}(\varepsilon-\theta)\right],$$

$$\beta = -2C\left[\frac{x}{a_1^2} - \frac{d\theta}{dy} + \lambda\frac{d}{dy}(\varepsilon-\theta)\right],$$

et dans le conducteur magnétique

$$\alpha = -2C\left[\frac{y}{a^2} - (1-\lambda)\frac{d\theta_1}{dx}\right], \qquad \beta = -2C\left[-\frac{x}{a^2} - (1-\lambda)\frac{d\theta_1}{dy}\right].$$

La fonction H est définie par les équations (1) et (2) du § 682; c'est-à-dire qu'à l'extérieur du conducteur magnétique

$$dH = \alpha\,dy - \beta\,dx$$

et que, dans ce conducteur,

$$dH = \mu(\alpha\,dy - \beta\,dx),$$

d'où, pour les valeurs de H, à l'extérieur des conducteurs, en appelant ρ la distance au point A_1,

$$H = 2C[l.r_1 - l.r + \lambda(l.\rho - l.r)],$$

dans le conducteur non magnétique,

$$H = 2C\left[\frac{r_1^2 - a_1^2}{2a_1^2} + l.a_1 - l.r + \lambda(l.\rho - l.r)\right],$$

et, dans le conducteur magnétique,

$$H = 2C\left[\mu\frac{a^2 - r^2}{2a^2} + (1+\lambda)\,l.r_1 - l.a - \lambda l.b\right].$$

Il est facile de vérifier que H et ses dérivées premières sont continues en observant que $\mu(1-\lambda)=1+\lambda$, et que sur le contour du conducteur magnétique on a

$$l.\rho - l.r = l.r_1 - l.b.$$

La valeur de L s'obtiendra en calculant $\iint H w\,dx\,dy$ pour les deux conducteurs, ce qui donne

$$\frac{L}{l} = 2l.\frac{b^2}{aa_1} - 2\lambda l.\frac{b}{OA_1} + \left(\frac{1+\mu}{2}\right).$$

Le terme $-2\lambda l.\dfrac{b}{OA_1}$ est la correction à apporter dans ce cas à la formule de Maxwell.

On pourrait calculer aussi la valeur de L dans le cas de deux conducteurs magnétiques; la méthode à suivre est semblable à celle qu'on emploie dans le problème de deux sphères conductrices, et l'on arrive à remplacer chaque conducteur magnétique quant à son action extérieure par une série de courants linéaires indéfinis distribués sur la ligne des centres, images successives les uns des autres.

Mais on ne rencontre plus ces difficultés lorsque la force magnétique est tangente en tous points aux conducteurs : c'est ce qui a lieu lorsque le fil de retour est un second conducteur cylindrique creux de même axe que le premier. Si a_1, a_2 sont les rayons extérieur et intérieur du premier, a'_1 et a'_2 ceux du second, μ, μ' les perméabilités magnétiques et μ_0 celle du milieu intermédiaire, on a, en employant les notations du § 683,

$\beta = 0$ à l'intérieur du premier conducteur;

$\beta = 2C\dfrac{1}{a_1^2-a_2^2}\left(r-\dfrac{a_2^2}{r}\right)$ dans ce conducteur,

$\beta = \dfrac{2C}{r}$ entre les deux ;

$\beta = \dfrac{2C}{r} - \dfrac{2C}{a_1'^2-a_2'^2}\left(r-\dfrac{a_2'^2}{r}\right)$ dans le conducteur extérieur,

et enfin

$$\beta = 0 \text{ dans l'espace extérieur.}$$

Posant $H = -\int_0^r \mu\beta\,dr$, on a

$H = 0$ à l'intérieur du premier conducteur;

$H = -\dfrac{2C\mu}{a_1^2-a_2^2}\left(\dfrac{r^2}{2}-a_2^2\,l.r\right)$ dans ce conducteur;

$H = -\dfrac{2C\mu}{a_1^2-a_2^2}\left(\dfrac{a_1^2}{2}-a_2^2\,l.a_1\right) - 2C\mu_0\,l.r$ entre les deux ;

$H = -\dfrac{2C\mu}{a_1^2-a_2^2}\left(\dfrac{a_1^2}{2}-a_2^2\,l.a_1\right) - 2C\mu_0\,l.a'_2 - \dfrac{2C\mu'}{a_1'^2-a_2'^2}\left(a_1'^2\,l.r-\dfrac{r^2}{2}\right).$

Il faut alors calculer $\iint H w\,dx\,dy$, en observant que, pour le conducteur in-

térieur,

$$w = \frac{C}{a_1^2 - a_2^2},$$

tandis que, pour le second,

$$w = \frac{-C}{a_1'^2 - a_2'^2}.$$

On trouve alors pour L

$$L = l\left[2\mu_0 l.\frac{a_2'}{a_1} + \frac{2\mu}{a_1^2 - a_2^2}\left(\frac{a_1^2 - 3a_2^2}{4} + \frac{a_2^2}{a_1^2 - a_2^2}\, l.\frac{a_1}{a_2}\right) + \frac{2\mu'}{a_1'^2 - a_2'^2}\left(\frac{a_2'^2 - 3a_1'^2}{4} + \frac{a_1'^4}{a_1'^2 - a_2'^2}\, l.\frac{a_1'}{a_2'}\right)\right].$$

NOTE III

Additionnelle au § 690;

PAR M. A. POTIER.

Cette valeur (18) de E présente un intérêt pratique dans le cas où l'on se propose d'entretenir dans un fil un courant alternatif; si $C = C_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$ représente l'intensité du courant à chaque instant, on déduit de cette équation

$$E = C_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}\left[R + \frac{1}{12}\frac{l^2}{R}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \dots\right] + \frac{2\pi}{\tau} C_0 \cos 2\pi \frac{t}{\tau}\left[l\left(A + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{48}\frac{l^2}{R^2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \dots\right]$$

et, comparant cette valeur à

$$E = CR_1 + L_1 \frac{dC}{dt} = R_1 C_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} + L_1 \cdot \frac{2\pi}{\tau} C_0 \cos 2\pi \frac{t}{\tau},$$

on voit que le conducteur cylindrique est équivalent à un conducteur dont la résistance serait

$$R_1 = R\left[1 + \frac{1}{12}\frac{l^2}{R^2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - \frac{1}{180}\frac{l^4}{R^4}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^4 + \dots\right]$$

et le coefficient de self-induction

$$L_1 = l\left[\left(A + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{48}\frac{l^2}{R^2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{13}{8640}\frac{l^4}{R^4}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^4 + \dots\right].$$

L'effet de la variation de densité du courant avec la distance à l'axe du fil est donc d'augmenter la résistance de celui-ci et la quantité de chaleur dégagée par unité de temps pour une valeur donnée de l'intensité totale maximum C_0, et de diminuer le coefficient de self-induction, d'autant plus que la période est plus courte. Le courant s'accumule vers la surface du conducteur.

Ces effets deviennent plus sensibles lorsque le conducteur est en fer; en appliquant les raisonnements de Maxwell à un conducteur dont la perméabilité magnétique serait μ, on sera amené à remplacer les formules ci-dessus par

$$R_1 = R\left[1 + \frac{1}{12}\frac{\mu^2 l^2}{R^2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - \frac{1}{180}\frac{\mu^4 l^4}{R^4}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^4 + \dots\right],$$

$$L_1 = l\left\{A + \mu\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\frac{\mu^2 l^2}{R^2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{13}{8640}\frac{l^4}{R^4}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^4 - \dots\right]\right\}.$$

CHAPITRE XIV.

COURANTS CIRCULAIRES.

Potentiel magnétique dû à un courant circulaire.

694. Le potentiel magnétique en un point quelconque, dû à un circuit traversé par l'unité de courant, est numériquement égal à l'angle solide sous-tendu par le circuit en ce point (*voir* § 409 et 485).

Quand le circuit est circulaire, l'angle solide est celui d'un cône du second degré, qui devient un cône droit quand le point donné est sur l'axe du cercle. Si le point n'est pas sur l'axe, le cône est elliptique et son angle solide est numériquement égal à l'aire de l'ellipse sphérique suivant laquelle il coupe une sphère de rayon égal à l'unité.

Cette aire peut être exprimée en termes finis au moyen d'intégrales elliptiques de troisième espèce. Nous trouverons plus commode de la développer en une série infinie d'harmoniques sphériques; car la facilité avec laquelle les opérations mathématiques peuvent être effectuées sur le terme général d'une telle série compense largement l'inconvénient d'avoir à calculer un nombre de termes assez grand pour obtenir une suffisante exactitude dans les applications.

Pour plus de généralité, nous supposerons l'origine placée en un point quelconque de l'axe du cercle, c'est-à-dire de la perpendiculaire menée au plan du cercle par son centre.

Soient

O (*fig.* 46) le centre du cercle;
C le point de l'axe où nous supposons placée l'origine;
H un point du cercle.

Décrivons une sphère de C comme centre avec CH comme rayon. Le cercle sera sur cette sphère, et en sera un petit cercle de rayon angulaire α.

On a

$$CH = c,$$
$$OC = b = c\cos\alpha,$$
$$ON = a = c\sin\alpha.$$

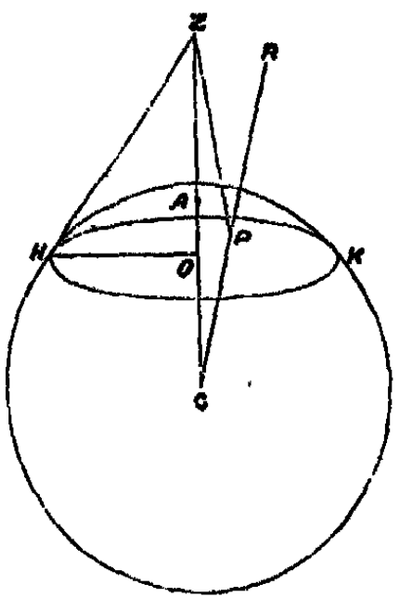
Soient A le pôle de la sphère, Z un point quelconque de l'axe, et soit $CZ = z$.

Soient R un point de l'espace, $CR = r$ et $ACR = \theta$.

Soit enfin P le point où CR coupe la sphère.

Le potentiel magnétique dû au courant circulaire est égal à celui

Fig. 48.



qui serait dû à un feuillet magnétique de puissance égale à l'unité limité par le courant. Comme la forme de la surface du feuillet est indifférente, pourvu qu'elle soit limitée par le cercle, nous pouvons supposer qu'elle coïncide avec la surface de la sphère.

Nous avons montré, au § 670, que si V est le potentiel dû à une couche de matière de densité superficielle égale à l'unité, répandue sur la surface de la sphère intérieure au petit cercle, le potentiel magnétique dû à un feuillet magnétique de puissance égale à l'unité, limité au même petit cercle, est

$$\omega = -\frac{1}{c}\frac{d}{dr}(rV).$$

Nous devons donc, en premier lieu, trouver V. Soit le point donné en Z sur l'axe du cercle; la partie du potentiel en Z, qui est due à un élément de surface sphérique dS, placé en P, est

$$\frac{dS}{\overline{ZP}},$$

ce qui peut être développé en l'une ou l'autre des deux séries d'har-

moniques sphériques

$$\frac{dS}{c}\left(P_0+P_1\frac{a}{c}+P_2\frac{a^2}{c^2}+\ldots+P_i\frac{a^i}{c^i}+\ldots\right)$$

ou

$$\frac{dS}{z}\left(P_0+P_1\frac{c}{z}+P_2\frac{c^2}{z^2}+\ldots+P_i\frac{c^i}{z^i}+\ldots\right),$$

la première série étant convergente quand z est plus petit que c, et la seconde quand z est plus grand que c.

Posant

$$dS=-c^2\,d\mu\,d\varphi,$$

et intégrant, par rapport à φ, entre les limites 0 et 2π, et, par rapport à μ, entre les limites $\cos\alpha$ et 1, nous trouvons

$$(1)\qquad V=2\pi c\left(\int_\mu^1 P_0\,d\mu+\ldots+\frac{a^i}{c^i}\int_\mu^1 P_i\,d\mu+\ldots\right),$$

ou bien

$$(1')\qquad V'=2\pi\frac{c^2}{z}\left(\int_\mu^1 P_0\,d\mu+\ldots+\frac{c^i}{z^i}\int_\mu^1 P_i\,d\mu+\ldots\right).$$

Par l'équation caractéristique de P_i,

$$i(i+1)P_i+\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_i}{d\mu}\right]=0,$$

d'où

$$(2)\qquad \int_\mu^1 P_i\,d\mu=\frac{1-\mu^2}{i(i+1)}\frac{dP_i}{d\mu}.$$

Cette expression est en défaut pour $i=0$; car, puisque $P_0=1$,

$$(3)\qquad \int_\mu^1 P_0\,d\mu=1-\mu.$$

Comme la fonction $\frac{dP}{d\mu}$ se présente dans toutes les parties de cette étude, nous la désignerons par le symbole abrégé P'_i. On a donné, au § 608, les valeurs de P'_i correspondant à diverses valeurs de i.

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer la valeur de V pour un point quelconque, situé ou non sur l'axe, en substituant r à z et en multipliant chaque terme par l'harmonique zonal de même ordre de θ. En effet, V doit pouvoir être développé en une série d'harmoniques zonaux de θ, à coefficients convenables. Quand $\theta=0$, chacun des harmoniques zonaux devient égal à l'unité, et le point est sur l'axe. Donc les coefficients sont les termes de développement de V,

pour un point pris sur l'axe. Nous obtenons ainsi les deux séries

$$(4) \qquad V = 2\pi c\left[1-\mu+\ldots+\frac{1-\mu^2}{i(i+1)}\frac{r^i}{c^i}P'_i(\alpha)P_i(0)\right],$$

ou

$$(4') \qquad V' = 2\pi\frac{c^2}{r}\left[1-\mu+\ldots+\frac{1-\mu^2}{i(i+1)}\frac{c^i}{r^i}P'_i(\alpha)P_i(0)\right].$$

695. Nous pouvons maintenant trouver le potentiel magnétique ω du circuit, par la méthode du § 670, au moyen de l'équation

$$(5) \qquad \omega = -\frac{1}{c}\frac{d}{dr}(Vr).$$

Nous obtenons ainsi les deux séries

$$(6) \qquad \omega = -2\pi\left[1-\cos\alpha+\ldots+\frac{\sin^2\alpha}{i}\frac{r^i}{c^i}P'_i(\alpha)P_i(0)+\ldots\right]$$

ou

$$(6') \quad \omega' = 2\pi\sin^2\alpha\left[\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}P'_1(\alpha)P_1(0)+\ldots+\frac{1}{i+1}\frac{c^{i+1}}{r^{i+1}}P'_i(\alpha)P_i(0)+\ldots\right].$$

La série (6) est convergente pour toutes les valeurs de r inférieures à c, la série (6') pour toutes les valeurs supérieures à c. A la surface de la sphère, où $r = c$, les deux séries donnent la même valeur de ω, quand θ est plus grand que α, c'est-à-dire pour les points qui ne font pas partie du feuillet magnétique; mais, si θ est plus petit que α, c'est-à-dire pour les points du feuillet magnétique,

$$\omega' = \omega + 4\pi.$$

Si nous prenons le centre O du cercle pour origine des coordonnées, nous devons faire $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et les séries deviennent

$$(8) \qquad \omega = -2\pi\left[1+\frac{r}{c}P_1(0)+\ldots+(-1)^s\frac{1.3\ldots(2s-1)}{2.4\ldots 2s}\frac{r^{2s+1}}{c^{2s+1}}P_{2s+1}(0)\right],$$

$$(8') \qquad \omega' = +2\pi\left[\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}P_1(0)+\ldots+(-1)^s\frac{1.3\ldots(2s+1)}{2.4\ldots 2s}\frac{c^{2s+2}}{r^{2s+2}}P_{2s+1}(0)\right],$$

où tous les harmoniques sont d'ordre impair (1).

---

(1) La valeur de l'angle solide sous-tendu par un cercle peut s'obtenir plus directement comme il suit :

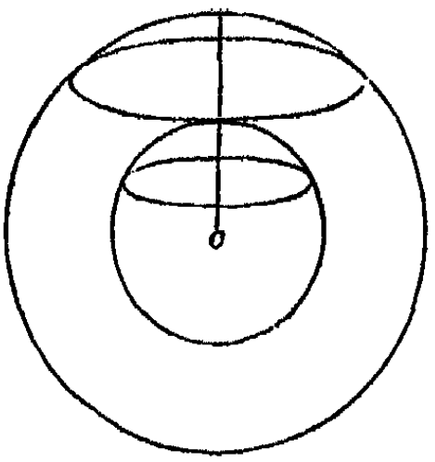
Il est facile de montrer que l'angle solide sous-tendu par le cercle au point Z de l'axe est

$$\omega = 2\pi\left(1-\frac{z-c\cos\alpha}{HZ}\right);$$

Énergie potentielle de deux courants circulaires.

696. Supposons d'abord que les deux feuillets magnétiques équivalents aux deux courants soient des portions de deux sphères concentriques de rayons c_1 et c_2, c_1 étant le plus grand (*fig.* 49). Supposons

Fig. 49.



aussi que les axes des deux feuillets coïncident et que α_1 et α_2 soient les angles sous-tendus au centre C par les rayons du premier et du second feuillet.

Soit ω_1 le potentiel du premier feuillet sur un point quelconque qui lui est intérieur : le travail nécessaire pour éloigner le second feuillet jusqu'à une distance infinie est donné par la valeur de l'intégrale

$$M = -\int\int \frac{d\omega_1}{dr}\, dS,$$

étendue sur la surface du second feuillet. Donc

$$= \int_{\mu_2}^{1} \frac{d\omega_1}{dr}\, 2\pi c_2^2\, d\mu_2$$

$$= 4\pi^2 \sin^2\alpha_1\, c_2^2 \left[\frac{1}{c_1} P'_1(\alpha_1) \int_{\mu_2}^{1} P(\theta)\, d\mu_2 + \ldots + \frac{c_2^{i-1}}{c^i} P'_i(\alpha_1) \int_{\mu_2}^{1} P_i(\theta)\, d\mu_2 \right],$$

---

développant cette expression en harmoniques sphériques, nous trouvons

$$\omega = 2\pi \left\{ (\cos\alpha + 1) + [P_1(\alpha)\cos\alpha - P_0(\alpha)] \frac{r}{c} + \ldots + [P_i(\alpha)\cos\alpha - P_{i-1}(\alpha)] \frac{r^i}{c^i} + \ldots \right\},$$

$$\omega' = 2\pi \left\{ [P_0(\alpha)\cos\alpha - P'_i(\alpha)] \frac{c}{r} + \ldots + [P_i(\alpha)\cos\alpha - P_{i+1}(\alpha)] \frac{c^{i+1}}{r^{i+1}} + \ldots \right\},$$

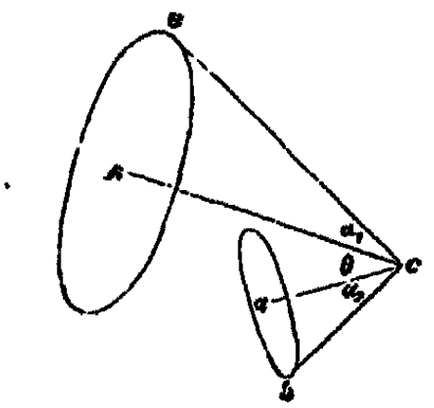
qui sont les développements de ω pour les points de l'axe dont le r est inférieur ou supérieur à c. Il est facile de montrer que ces résultats concordent avec ceux du texte.

ou, substituant les valeurs des intégrales, d'après l'équation (2) du § 694,

$$M = \tfrac{1}{2}\pi^2 \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 c_2^2 \left[\frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1} P'_1(\alpha_1) P'_1(\alpha_2) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P'_i(\alpha_1) P'_i(\alpha_2) \right].$$

697. Supposons maintenant que l'axe d'un des feuillets tourne autour de C comme centre, de manière à faire un angle θ avec l'axe de l'autre feuillet (*fig.* 48); nous n'avons qu'à introduire les harmo-

Fig. 50.



niques zonaux de θ dans cette expression de M, et nous trouvons pour valeur plus générale de M

$$M = 4\pi^2 \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 c_2^2 \left[\frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1} P'_1(\alpha_1) P'_1(\alpha_2) P_1(\theta) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P'_i(\alpha_1) P'_i(\alpha_2) P_i(\theta) \right].$$

Telle est la valeur de l'énergie potentielle due à l'action mutuelle de deux courants circulaires d'intensité égale à l'unité, placés de façon que les normales menées par les centres des cercles se rencontrent en un point C sous un angle θ, les distances des circonférences au point C étant c_1 et c_2, et c_1 étant la plus grande des deux distances.

Si un déplacement dx change la valeur de M, la force qui agit dans le sens de ce déplacement est $X = \frac{\partial M}{\partial x}$.

Par exemple, si l'axe d'un des feuillets est libre de tourner autour du point C de manière à faire varier θ, le moment de la force qui tend à accroître θ est Θ, où

$$\Theta = \frac{\partial M}{\partial \theta}.$$

Effectuant la différentiation et nous souvenant que

$$\frac{\partial P_i(\theta)}{\partial \theta} = -\sin\theta\, P'_i(\theta),$$

où P' a le même sens que dans les équations précédentes,

$$\Theta = -4\pi^2 \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \sin\theta c_1^2 \left[\frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1} P'_1(\alpha_1) P'_1(\alpha_2) P'_1(\theta) + \ldots + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P'_i(\alpha_1) P'_i(\alpha_2) P'_i(\theta)\right].$$

698. Comme les valeurs de P'_i se rencontrent souvent dans ces calculs, la Table suivante des valeurs des six premiers degrés peut être utile. Dans cette Table, on a posé μ pour $\cos\theta$, et ν pour $\sin\theta$,

$$P'_1 = 1,$$
$$P'_2 = 3\mu,$$
$$P'_3 = \tfrac{3}{2}(5\mu^2 - 1) = 6(\mu^2 - \tfrac{1}{6}\nu^2),$$
$$P'_4 = \tfrac{5}{2}\mu(7\mu^2 - 3) = 10\mu(\mu^2 - \tfrac{3}{7}\nu^2),$$
$$P'_5 = \tfrac{15}{8}(21\mu^4 - 14\mu^2 + 1) = 15(\mu^4 - \tfrac{3}{2}\mu^2\nu^2 + \tfrac{1}{8}\nu^4),$$
$$P'_6 = \tfrac{21}{8}\mu(33\mu^4 - 30\mu^2 + 5) = 21\mu(\mu^4 - \tfrac{5}{2}\mu^2\nu^2 + \tfrac{5}{8}\nu^4).$$

699. Quelquefois il est commode d'exprimer la série qui représente M en fonction de quantités linéaires, de la manière suivante:

Soient

a le rayon du petit circuit;

b la distance de son plan à l'origine;

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Soient A, B, C les quantités correspondantes pour le grand circuit.

La série qui représente M peut s'écrire

$$M = +1.2\pi^2 \frac{A^2}{C^3} a^2 \cos\theta + 2.3\pi^2 \frac{A^2 B}{C^5} a^2 b (\cos^2\theta - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta) + 3.4\pi^2 \frac{A^2(B^2 - \frac{1}{4}A^2)}{C^7} a^2(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)(\cos^2\theta - \tfrac{3}{2}\sin^2\theta\cos\theta) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si nous faisons $\theta = 0$, les deux cercles deviennent parallèles et ont

même axe. Pour déterminer l'attraction qui s'exerce entre eux, nous différentions M par rapport à b; nous trouvons ainsi

$$\frac{\partial M}{\partial b} = \pi^2 \frac{A^2 a^2}{C^5}\left(2.3\,\frac{B}{C} + 2.3.4\,\frac{B^2 - \frac{1}{4}A^2}{C^2}\,b + \ldots\right).$$

700. Pour calculer l'effet d'une bobine à section rectangulaire, nous devons intégrer les expressions que l'on vient de trouver, par rapport au rayon A de la bobine et à la distance B de son plan à l'origine, les intégrations étant étendues à la largeur et à l'épaisseur de la bobine.

Dans quelques cas, le plus commode est d'intégrer directement; dans d'autres, la méthode d'approximation suivante conduit à de meilleurs résultats.

Soit P une fonction quelconque de x et y, et soit proposé de trouver la valeur de $\overline{\mathrm{P}}$, telle que

$$\overline{\mathrm{P}}\,xy = \int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}} \int_{-\frac{y}{2}}^{+\frac{y}{2}} \mathrm{P}\,dx\,dy,$$

$\overline{\mathrm{P}}$ étant la valeur moyenne de P dans les limites de l'intégration.

Soit P_0 la valeur de P pour $x = 0$ et $y = 0$; en développant P par le théorème de Taylor,

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 + x\,\frac{\partial \mathrm{P}_0}{\partial x} + y\,\frac{\partial \mathrm{P}_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\,x^2\,\frac{\partial^2 \mathrm{P}_0}{\partial x^2} + \ldots.$$

Intégrant cette expression entre les limites et divisant par xy, nous obtenons pour valeur de $\overline{\mathrm{P}}$

$$\overline{\mathrm{P}} = \mathrm{P}_0 + \frac{1}{24}\left(x^2\,\frac{\partial^2 \mathrm{P}_0}{\partial x^2} + y^2\,\frac{\partial^2 \mathrm{P}_0}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{960}\left(x^4\,\frac{\partial^4 \mathrm{P}_0}{\partial x^4} + y^4\,\frac{\partial^4 \mathrm{P}_0}{\partial y^4}\right) + \frac{1}{576}\,x^2 y^2\,\frac{\partial^4 \mathrm{P}_0}{\partial x^2\,\partial y^2} + \ldots.$$

Dans le cas de la bobine, soient $\mathrm{A} + \frac{1}{2}\xi$ et $\mathrm{A} - \frac{1}{2}\xi$ les rayons extérieur et intérieur; supposons que les distances des plans des tours du fil à l'origine soient comprises entre $\mathrm{B} + \frac{1}{2}\eta$ et $\mathrm{B} - \frac{1}{2}\eta$: alors la largeur de la bobine est η, et son épaisseur est ξ, ces quantités étant petites relativement à A ou C.

Pour calculer l'effet magnétique d'une telle bobine, nous pouvons

écrire comme il suit les termes successifs de la série

$$G_0 = \pi\frac{B}{C}\left(1+\frac{1}{24}\frac{2A^2-B^2}{C^4}\xi^2-\frac{1}{8}\frac{A^2}{C^4}\eta^2\right),$$

$$G_1 = 2\pi\frac{A^2}{C^3}\left[1+\frac{1}{24}\left(\frac{2}{A^2}-15\frac{B^2}{C^4}\right)\xi^2+\frac{1}{8}\frac{4B^2-A^2}{C^4}\eta^2\right],$$

$$G_2 = 3\pi\frac{A^2B}{C^5}\left[1+\frac{1}{24}\left(\frac{2}{A^2}-\frac{25}{C^2}+35\frac{A^2}{C^4}\right)\xi^2+\frac{5}{24}\frac{4B^2-3A^2}{C^4}\eta^2\right],$$

$$G_3 = 4\pi\frac{A^2(B^2-\frac{1}{2}A^2)}{C^7}$$
$$+\frac{\pi}{24}\frac{\xi^2}{C^{11}}\left[C^2(8B^2-12A^2)+35A^2B^2(5A^2-4B^2)\right]$$
$$+\frac{\pi}{24}\frac{\eta^2}{C^{11}}\left[3A^2C^2(5A^2-44B^2)+63A^2B^2(4B^2-A^2)\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$g_1 = \pi a^2 + \frac{1}{12}\pi\xi^2,$$

$$g_2 = 2\pi a^2 b + \frac{1}{8}\pi b\xi^2,$$

$$g_3 = 3\pi a^2(b^2-\tfrac{1}{4}a^2)+\frac{\pi}{8}\xi^2(2b^2-3a^2)+\frac{\pi}{4}\eta^2a^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les quantités G_0, G_1, G_2, ... sont relatives à la grande bobine. La valeur de ω, aux points où r est plus petit que C, est

$$\omega = -2\pi + 2G_0 - G_1 r P_1(\theta) - G_2 r^2 P_2(\theta) - \ldots.$$

Les quantités g_1, g_2, ... sont relatives à la petite bobine.

La valeur de ω' aux points pour lesquels r est plus grand que c est

$$\omega' = g_1\frac{1}{r^2}P_1(\theta) + g_2\frac{1}{r^3}P_2(\theta) + \ldots.$$

Lorsque le courant total qui passe par la section de chacune des bobines est égal à l'unité, le potentiel d'une bobine à l'autre est

$$M = G_1 g_1 P_1(\theta) + G_2 g_2 P_2(\theta) + \ldots.$$

Trouver M au moyen des intégrales elliptiques.

701. Lorsque la distance des circonférences des deux cercles n'est pas très grande relativement au rayon de la plus petite des deux, la série que l'on vient de donner ne converge pas très rapidement. Mais, dans tous les cas, nous pouvons trouver la valeur de M pour deux cercles parallèles au moyen d'intégrales elliptiques.

Soit, en effet, b la longueur de la ligne qui joint les centres de cercles; supposons cette ligne perpendiculaire aux plans des deux cercles, et soient A et a les rayons de ces cercles; alors

$$M = \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

l'intégration étant étendue le long des deux courbes. Dans ce cas

$$r^2 = A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos(\varphi - \varphi'),$$

$$\varepsilon = \varphi - \varphi', \qquad ds = a\, d\varphi, \qquad ds' = A\, d\varphi',$$

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Aa\cos(\varphi-\varphi')\, d\varphi\, d\varphi'}{\sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos(\varphi-\varphi')}} \quad (1)$$

$$= 4\pi\sqrt{Aa}\left[\left(c - \frac{2}{c}\right)F + \frac{2}{c}E\right],$$

où

$$c = \frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2 + b^2}},$$

et où F et E sont des intégrales elliptiques complètes de module c.

De là on tire, en se souvenant que

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \frac{1}{c(1-c^2)}\,[E - (1-c^2)F],$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = \frac{1}{c}\,(E - F),$$

et que c est une fonction de b,

$$\frac{\partial M}{\partial b} = \frac{\pi}{\sqrt{Aa}}\,\frac{bc}{1-c^2}\,[(2-c^2)E - (2-2c^2)F].$$

Si r_1 et r_2 désignent la plus grande et la plus petite valeur de r,

$$r_1^2 = (A+a)^2 + b^2, \qquad r_2^2 = (A-a)^2 + b^2,$$

et, si l'on prend un angle γ tel que $\cos\gamma = \frac{r_2}{r_1}$,

$$\frac{\partial M}{\partial b} = -\pi\,\frac{b\sin\gamma}{\sqrt{Aa}}\,[2F_\gamma - (1 + \sec^2\gamma)E_\gamma],$$

où F_γ et E_γ désignent les intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce, dont le module est $\sin\gamma$.

---

(1) *Voir* la Note à la fin du Chapitre.

Si $A = a$, $\cot\gamma = \frac{b}{2a}$ et

$$\frac{\partial M}{\partial b} = -2\pi\cos\gamma[2F_\gamma - (1+\sec^2\gamma)E_\gamma].$$

La quantité $\frac{\partial M}{\partial B}$ représente l'attraction qui s'exerce entre deux circuits circulaires parallèles, traversés chacun par un courant égal à l'unité.

En raison de l'importance de la quantité M dans les calculs d'électromagnétisme, on a fait une Table de valeurs de $\log\frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$, qui est une fonction de c, et par suite de γ seulement, pour des valeurs de 6′ en 6′ de l'angle γ. On trouvera cette Table en Appendice à la fin du Chapitre.

Seconde expression de M.

Une expression de M, qui est quelquefois plus commode, s'obtient en posant

$$c_1 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2};$$

dans ce cas

$$M = 8\pi\sqrt{Aa}\,\frac{1}{\sqrt{c_1}}(F_{c_1} - E_{c_1}) \quad (1).$$

Tracer les lignes de force magnétique pour un courant circulaire.

702. Les lignes de force magnétique sont évidemment dans des plans passant par l'axe du cercle; et, sur chacune de ces lignes, la valeur de M est constante.

Calculons la valeur de $K_\theta = \frac{\sin\theta}{(F_{\sin\theta} - E_{\sin\theta})^2}$ d'après les Tables de Legendre, pour un nombre suffisant de valeurs de θ.

Traçons des axes rectangulaires de x et de z, et, prenant pour

---

(1) La seconde expression de M peut se déduire de la première par la transformation suivante des intégrales elliptiques. Si

$$\sqrt{1-c^2} = \frac{1-c_1}{1+c_1} \quad \text{ou} \quad c = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1},$$

$$F(c) = (1+c_1)F(c_1),$$

$$E(c) = \frac{2}{1+c_1}E(c_1) - (1-c_1)F(c_1).$$

centre le point $x = \frac{1}{2}a(\sin\theta + \operatorname{coséc}\theta)$, traçons un cercle de rayon $\frac{1}{2}a(\operatorname{coséc}\theta - \sin\theta)$. Pour tous les points de ce cercle, la valeur de c_1 sera $\sin\theta$. Donc, pour tous les points de ce cercle,

$$M = 8\pi\sqrt{A\,a}\,\frac{1}{\sqrt{K_0}} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{1}{64\pi^2}\,\frac{M^2 K_0}{a}.$$

Or A est la valeur de a pour laquelle on a trouvé la valeur de M : si donc nous menons une ligne pour laquelle $x = A$, elle coupe le cercle en deux points où M a la valeur donnée.

Si l'on donne à M une série de valeurs en progression arithmétique, les valeurs de A forment une série de carrés. Donc, si nous traçons parallèlement à z une série de lignes pour lesquelles x a les valeurs trouvées de A, les points où ces lignes coupent le cercle sont ceux où les lignes de force correspondantes coupent le cercle.

Si nous posons $m = 8\pi a$ et $M = nm$,

$$A = x = n^2 K_0 a.$$

Nous pouvons appeler n l'indice de la ligne de force. Les formes de ces lignes sont données à la *Pl. XVIII* : elles sont copiées sur un dessin donné par Sir W. Thomson, dans son Mémoire sur le mouvement tourbillonnaire (1).

703. Si l'on considère la position d'un cercle ayant un axe donné comme définie par la distance b de son centre à un point fixe de l'axe, et par le rayon a de ce cercle, le coefficient d'induction M de ce cercle relativement à un système quelconque d'aimants ou de courants sera soumis à la condition

$$\frac{\partial^2 M}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial b^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial M}{\partial a} = 0. \tag{1}$$

Pour le démontrer, considérons le nombre de lignes de force magnétique coupées par le cercle, quand on fait varier a ou b :

1° Supposons que a devienne $a + \delta a$, b restant constant. Pendant cette variation, le cercle, en s'élargissant, décrit, dans son plan, une surface annulaire de largeur δa.

Si V est le potentiel magnétique en un point quelconque et si l'axe des y est parallèle à l'axe du cercle, la force magnétique, perpendi-

(1) *Trans. R. S. Edin.*, vol. XXV, p. 217; 1869.

culairement au plan de l'anneau, est

$$\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Pour avoir l'induction magnétique à travers la surface annulaire, nous devons intégrer

$$\int_0^{2\pi} a\,\delta a\,\frac{dV}{dy}\,d\theta,$$

où θ est la position angulaire d'un point de l'anneau.

Mais cette quantité représente la variation de M due à la variation de a ou $\frac{\partial M}{\partial a}\,\delta a$. Donc

$$\frac{\partial M}{\partial a} = \int_0^{2\pi} a\,\frac{\partial V}{\partial y}\,d\theta. \tag{2}$$

2° Supposons que b devienne $b + \delta b$, a restant constant; pendant cette variation, le cercle décrit une surface cylindrique de rayon a et de longueur δb.

La force magnétique perpendiculaire à cette surface, en un point quelconque, est

$$\frac{\partial V}{\partial r},$$

r étant la distance à l'axe. Donc

$$\frac{\partial M}{\partial b} = -\int_0^{2\pi} a\,\frac{\partial V}{\partial r}\,d\theta. \tag{3}$$

Différentiant l'équation (2), par rapport à a, et l'équation (3), par rapport à b, on a

$$\frac{\partial^2 M}{\partial a^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial y}\,d\theta + \int_0^{2\pi} a\,\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial y}\,d\theta, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial b^2} = -\int_0^{2\pi} a\,\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial y}\,d\theta; \tag{5}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 M}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial b^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial y}\,d\theta = \frac{1}{a}\,\frac{\partial M}{\partial a} \tag{6}$$

d'après l'équation (2).

Et faisant passer tout dans le premier membre, nous avons l'équation (1).

Coefficient d'induction de deux cercles parallèles lorsque la distance des arcs est petite relativement au rayon de l'un ou l'autre des cercles.

704. Nous pouvons déduire la valeur de M dans ce cas du développement des intégrales elliptiques données plus haut lorsque leur module est voisin de l'unité. Mais la méthode suivante constitue une application plus directe des principes électriques :

Première approximation.

Soient a et $a + c$ les rayons des cercles, b la distance de leurs plans : la plus courte distance entre leur circonférence est

$$r = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Nous avons à trouver l'induction magnétique qui se produit à travers l'un des cercles, lorsque l'unité de courant circule dans l'autre.

Supposons d'abord les deux cercles dans un même plan. Considérons un petit élément δs sur le cercle de rayon $a + c$. En un point du plan du cercle, situé à une distance ρ du centre de δs sur une direction avec celle de δs faisant l'angle θ, la force magnétique est perpendiculaire au plan et égale à

$$\frac{1}{\rho^2} \sin\theta \, \delta s.$$

Pour calculer l'intégrale de cette force sur la surface comprise à l'intérieur du cercle de rayon a, nous devons trouver la valeur de l'intégrale

$$2\,\delta s \int_{\theta_1}^{\frac{1}{2}\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\sin\theta}{\rho} \, d\theta \, d\rho,$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation

$$r^2 - 2(a + c)\sin\theta . r + c^2 + 2ac = 0,$$

c'est-à-dire

$$r_1 = (a + c)\sin\theta + \sqrt{(a + c)^2 \sin^2\theta - c^2 - 2ac},$$

$$r_2 = (a + c)\sin\theta - \sqrt{(a + c)^2 \sin^2\theta - c^2 - 2ac}$$

et

$$\sin^2\theta_1 = \frac{c^2 + 2ac}{(c + a)^2}.$$

Si c est petit relativement à a, nous pouvons poser

$$r_1 = 2a \sin\theta,$$

$$r_2 = \frac{c}{\sin\theta}$$

et, intégrant par rapport à ρ, nous avons

$$2\delta s \int_{\theta_1}^{2\pi} \log\left(\frac{2a}{c}\sin^2\theta\right).\sin\theta\, d\theta = \text{approximativement } 2\delta s\left(\log\frac{8a}{c} - 2\right).$$

Nous trouvons ainsi, pour l'induction totale,

$$M_{ac} = 4\pi a\left(\log\frac{8a}{c} - 2\right).$$

Puisqu'en un point dont la distance à un fil courbe est petite relativement au rayon de courbure, la force magnétique est à peu près la même que si le fil était droit, nous pouvons calculer la différence de l'induction à travers le cercle de rayon $a - c$, et de l'induction à travers le cercle A, au moyen de la formule

$$M_{aA} - M_{ac} = 4\pi a(\log c - \log r).$$

Nous trouvons ainsi que la valeur de l'induction magnétique, entre A et a, est approximativement

$$M_{Aa} = 4\pi a(\log 8a - \log r - 2),$$

pourvu que r soit petit par rapport à a.

705. Puisque l'induction mutuelle entre deux tours d'une même bobine est une quantité très importante pour le calcul des résultats d'expériences, je vais maintenant indiquer une méthode par laquelle la valeur de M, pour ce cas, peut être obtenue avec tel degré de précision que l'on veut. Nous admettrons que cette valeur de M soit de la forme

$$M = 4\pi\left(A\log\frac{8a}{r} + B\right),$$

où

$$A = a + A_1 x + A_2\frac{x^2}{a} + A'_2\frac{y^2}{a} + A_3\frac{x^3}{a^2} + A'_3\frac{xy^2}{a^2} + \ldots$$

et

$$B = -2a + B_1 x + B_2\frac{x^2}{a} + B'_2\frac{y^2}{a} + B_3\frac{x^3}{a^2} + B'_3\frac{xy^2}{a^2} + \ldots,$$

a et $a + x$ étant les rayons des cercles, et y la distance de leurs plans.

Nous avons à déterminer la valeur des coefficients A et B.

Il est clair qu'il ne se rencontre, dans ces quantités, que des puissances paires de y, car la valeur de M doit rester la même, si le signe de y change.

Nous tirons une autre série de conditions de la propriété de réciprocité du coefficient d'induction, lequel reste le même, quel que soit le cercle pris pour circuit primaire. La valeur de M doit donc rester la même quand on substitue $a + x$ à a, et $-x$ à x dans l'expression précédente.

Nous trouvons ainsi les conditions de réciprocité suivantes, en égalant les coefficients des combinaisons semblables de x et y,

$$A_1 = 1 - A_1, \qquad B_1 = 1 - 2 - B_1,$$

$$A_2 = -A_2 - A_2, \qquad B_2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} A_1 + A_2 - B_2 - B_2,$$

$$A'_2 = -A'_2 - A'_2, \qquad B'_2 = \qquad\qquad A'_2 - B'_2 - B'_2;$$

$$(-1)^n A_n = A_2 + (n-2) A_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} A_4 + \ldots + A_n,$$

$$(-1)^n B_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} A_1 - \frac{1}{n-2} A_2 + \ldots + (-1)^n A_{n-1}$$

$$+ B_2 + (n-2) B_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} B_4 + \ldots + B_n.$$

De l'équation générale de M, § 703,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} - \frac{1}{a+x} \frac{\partial M}{\partial x} = 0,$$

nous tirons une autre série de conditions

$$2A_2 + 2A'_2 = A_1,$$

$$2A_2 + 2A'_2 + 6A_3 + 2A'_3 = 2A_2;$$

$$n(n-1) A_n + (n+1) n A_{n+1} + 1.2 A'_n + 1.2 A'_{n+1} = n A_n,$$

$$(n-1)(n-2) A'_n + n(n-1) A'_{n+1} + 2.3 A''_n + 2.3 A''_{n+1} = (n-2) A'_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$4A_2 + A_1 = 2B_2 + 2B'_2 - B_1 = 4A'_2,$$

$$6A_3 + 3A_3 = 2B'_2 + 6B_3 - 2B'_3 = 6A'_3 + 3A'_3,$$

$$(2n-1) A_n + (2n+2) A_{n+1}$$

$$= n(n-2) B_n + (n+1) n B_{n+1} + 1.2 B'_n + 1.2 B'_{n+1}.$$

Résolvant ces équations, et substituant les valeurs des coefficients,

la série qui exprime M devient (¹)

$$M = 4\pi a \log\frac{8a}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} + \frac{x^2+3y^2}{16a^2} - \frac{x^3+3xy^2}{32a^3} + \dots\right)$$
$$+ 4\pi a\left(-2 - \frac{1}{2}\frac{x}{a} + \frac{3x^2-y^2}{16a^2} - \frac{x^3-6xy^2}{48a^3} + \dots\right).$$

Étant données la longueur totale et la grosseur du fil, trouver la forme de la bobine pour laquelle le coefficient de self-induction est maximum.

706. Négligeant les corrections du § 705, nous trouvons, d'après le § 693,

$$L = 4\pi n^2 a\left(\log\frac{8a}{R} - 2\right),$$

n étant le nombre des tours de fil, a le rayon moyen de la bobine, et R la moyenne distance géométrique de la section transversale de la bobine à cette même section (*voir* § 691). Si cette section est toujours semblable à elle-même, R est proportionnel à ses dimensions linéaires, et n est proportionnel à R^2.

Puisque la longueur du fil est $2\pi an$, a varie en raison inverse de n; donc

$$\frac{dn}{n} = 2\frac{dR}{R} \qquad \text{et} \qquad \frac{da}{a} = -2\frac{dR}{R},$$

et la condition pour que L soit maximum est

$$\log\frac{8a}{R} = \frac{7}{2}.$$

Si la section transversale de la bobine est un cercle de rayon c, d'après le § 692,

$$\log\frac{R}{c} = -\frac{1}{4}$$

et

$$\log\frac{8a}{c} = \frac{13}{4},$$

d'où

$$a = 3{,}22\,c;$$

c'est-à-dire que le rayon moyen de la bobine doit être 3,22 fois celui

---

(¹) Ce résultat peut s'obtenir directement par la méthode indiquée au § 704, consistant à développer les intégrales elliptiques de l'expression de M trouvée au § 701. (*Voir* CAYLEY, *Fonctions elliptiques*, § 75.)

de la section transversale de la bobine, pour que cette bobine ait le coefficient de self-induction le plus grand possible. Ce résultat a été obtenu par Gauss (1).

Si la gorge sur laquelle est enroulée la bobine a une section transversale carrée, le diamètre moyen de la bobine doit être 3,7 fois le côté du carré.

---

(1) *Œuvres complètes*, édition de Göttingen, 1867; vol. V, p. 622.

NOTE

PAR M. A. POTIER.

Pour éviter au lecteur de se reporter à un Traité des fonctions elliptiques, on rappellera que Legendre a appelé E et F les fonctions dites complètes

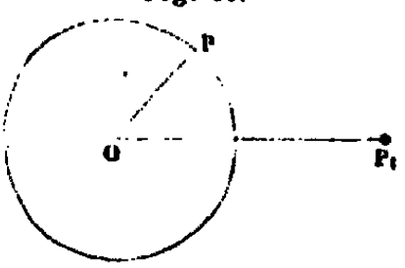
$$F(c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-c^2\sin^2 u}},\qquad E(c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-c^2\sin^2 u}\,du.$$

La valeur de M du § 701 s'obtiendra en remarquant que la valeur de l'intégrale $\int ds\frac{\cos\varepsilon}{r}$ est indépendante de la position du point choisi sur le cercle de rayon A comme origine des r et qu'on a

$$M=\iint ds\,ds'\frac{\cos\varepsilon}{r}=\int ds'\times\int\frac{ds\cos\varepsilon}{r}=2\pi A\int\frac{ds\cos\varepsilon}{r}.$$

Soit alors P_1 la projection d'un point P′ du cercle de rayon A, l'angle ε est POP_1

Fig. 51.



et r a pour valeur

$$\sqrt{b^2+A^2+a^2-2Aa\cos\varepsilon};$$

on posera

$$\varepsilon=\pi+2u,\qquad \text{d'où}\qquad ds=2a\,du,$$

et la valeur de M deviendra

$$4\pi Aa\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin^2 u-1)\,du}{\sqrt{r_1^2-4Aa\sin^2 u}};$$

en posant alors

$$cr_1=2\sqrt{Aa},$$

on écrira M sous la forme

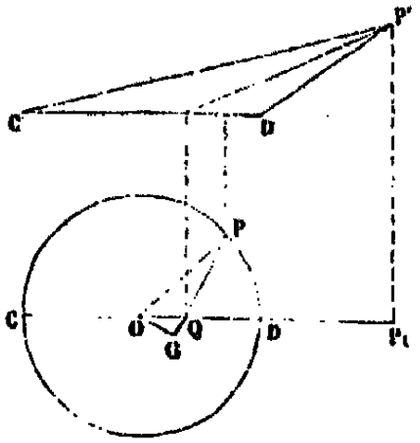
$$4\pi\sqrt{Aa}\left[\left(c-\frac{2}{c}\right)F(c)+\frac{2}{c}E(c)\right].$$

On passe de cette forme à la seconde en posant

$$\sin v=\frac{2\sin u\cos u}{(1+c_1)\sqrt{1-c^2\sin^2 u}}\qquad\text{avec}\qquad c^2=\frac{4c_1}{(1+c_1)^2};$$

mais on peut remplacer ces calculs de transformation par les considérations géométriques suivantes. Soit Q le point où la bissectrice de l'angle CP'D coupe le

Fig. 52.



diamètre CD du cercle de rayon a, intersection de ce cercle par le plan vertical contenant son centre et le point P'; soit encore r la distance d'un point P du cercle au point P', et ρ sa distance au point Q, et enfin $OQ = ac_1$; on a

$$\frac{\rho}{r} = \frac{QD}{r_2} = \frac{QC}{r_1} = \frac{2a}{r_1 + r_2} = \frac{2ac_1}{r_1 - r_2} = \frac{2a\sqrt{c_1}}{\sqrt{r_1^2 - r_2^2}} = \frac{a\sqrt{c_1}}{\sqrt{\Lambda a}}.$$

On peut donc remplacer $\frac{ds\cos\varepsilon}{r}$ par $\frac{ds}{\rho}\cos\varepsilon\sqrt{\frac{ac_1}{\Lambda}}$.

Mais, en posant $CQP = \nu$, on a

$$ds\cos\varepsilon = d.a\sin\varepsilon = d.\rho\sin\nu = \sin\nu\, d\rho + \rho\cos\nu\, d\nu;$$

d'ailleurs

$$\frac{d\rho}{\rho\, d\nu} = -\operatorname{tang} OPQ = -\frac{OG}{PG} = \frac{ac_1\sin\nu}{a\sqrt{1 - c_1^2\sin^2\nu}},$$

par suite,

$$\frac{ds\cos\varepsilon}{r} = \sqrt{\frac{ac_1}{\Lambda}}\left[\frac{c_1\sin^2\nu}{\sqrt{1 - c_1^2\sin^2\nu}} - \cos\nu\right]d\nu,$$

ou, si l'on intègre par rapport à ν entre $-\pi$ et $+\pi$,

$$\int\frac{ds\cos\varepsilon}{r} = \sqrt{\frac{a}{\Lambda c_1}}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{c_1^2\sin^2\nu}{\sqrt{1 - c_1^2\sin^2\nu}} = 4\sqrt{\frac{a}{\Lambda c_1}}\left[F(c_1) - E(c_1)\right],$$

et enfin, pour la valeur de M,

$$8\pi\sqrt{\frac{\Lambda a}{c_1}}\left[F(c_1) - E(c_1)\right].$$

APPENDICE I.

Table des valeurs de $\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$ (§ 701).

	$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$.		$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$.		$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$.
60°, 0′	$\bar{1}$,4994783	63°. 0′	$\bar{1}$,5825973	66°. 0′	$\bar{1}$,6651732
6′	$\bar{1}$,5022651	6′	$\bar{1}$,5853546	6′	$\bar{1}$,6679250
12′	$\bar{1}$,5050505	12′	$\bar{1}$,5881113	12′	$\bar{1}$,6706772
18′	$\bar{1}$,5078345	18′	$\bar{1}$,5908675	18′	$\bar{1}$,6734296
24′	$\bar{1}$,5106173	24′	$\bar{1}$,5936231	24′	$\bar{1}$,6761824
30′	$\bar{1}$,5133989	30′	$\bar{1}$,5963782	30′	$\bar{1}$,6789356
36′	$\bar{1}$,5161791	36′	$\bar{1}$,5991329	36′	$\bar{1}$,6816891
42′	$\bar{1}$,5189582	42′	$\bar{1}$,6018871	42′	$\bar{1}$,6844431
48′	$\bar{1}$,5217361	48′	$\bar{1}$,6046408	48′	$\bar{1}$,6871976
54′	$\bar{1}$,5245128	54′	$\bar{1}$,6073942	54′	$\bar{1}$,6899526
61°. 0′	$\bar{1}$,5272883	64°. 0′	$\bar{1}$,6101472	67°. 0′	$\bar{1}$,6927081
6′	$\bar{1}$,5300628	6′	$\bar{1}$,6128998	6′	$\bar{1}$,6954642
12′	$\bar{1}$,5328361	12′	$\bar{1}$,6156522	12′	$\bar{1}$,6982209
18′	$\bar{1}$,5356084	18′	$\bar{1}$,6184042	18′	$\bar{1}$,7009782
24′	$\bar{1}$,5383796	24′	$\bar{1}$,6211560	24′	$\bar{1}$,7037362
30′	$\bar{1}$,5411498	30′	$\bar{1}$,6239076	30′	$\bar{1}$,7064949
36′	$\bar{1}$,5439190	36′	$\bar{1}$,6266589	36′	$\bar{1}$,7092544
42′	$\bar{1}$,5466872	42′	$\bar{1}$,6294101	42′	$\bar{1}$,7120146
48′	$\bar{1}$,5494545	48′	$\bar{1}$,6321612	48′	$\bar{1}$,7147756
54′	$\bar{1}$,5522209	54′	$\bar{1}$,6349121	54′	$\bar{1}$,7175375
62°. 0′	$\bar{1}$,5549864	65°. 0′	$\bar{1}$,6376629	68°. 0′	$\bar{1}$,7203003
6′	$\bar{1}$,5577510	6′	$\bar{1}$,6404137	6′	$\bar{1}$,7230640
12′	$\bar{1}$,5605147	12′	$\bar{1}$,6431645	12′	$\bar{1}$,7258286
18′	$\bar{1}$,5632776	18′	$\bar{1}$,6459153	18′	$\bar{1}$,7285942
24′	$\bar{1}$,5660398	24′	$\bar{1}$,6486660	24′	$\bar{1}$,7313609
30′	$\bar{1}$,5688011	30′	$\bar{1}$,6514169	30′	$\bar{1}$,7341287
36′	$\bar{1}$,5715618	36′	$\bar{1}$,6541678	36′	$\bar{1}$,7368975
42′	$\bar{1}$,5743217	42′	$\bar{1}$,6569189	42′	$\bar{1}$,7396675
48′	$\bar{1}$,5770809	48′	$\bar{1}$,6596701	48′	$\bar{1}$,7424387
54′	$\bar{1}$,5798394	54′	$\bar{1}$,6624215	54′	$\bar{1}$,7452111

	$\text{Log}\frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$.		$\text{Log}\frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$.		$\text{Log}\frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$.
69°. 0′	$\bar{1},7479848$	73°. 0′	$\bar{1},8604785$	77°. 0′	$\bar{1},9785079$
6′	$\bar{1},7507597$	6′	$\bar{1},8633440$	6′	$\bar{1},9815731$
12′	$\bar{1},7535361$	12′	$\bar{1},8662129$	12′	$\bar{1},9846454$
18′	$\bar{1},7563138$	18′	$\bar{1},8690852$	18′	$\bar{1},9877249$
24′	$\bar{1},7590929$	24′	$\bar{1},8719611$	24′	$\bar{1},9908118$
30′	$\bar{1},7618735$	30′	$\bar{1},8748406$	30′	$\bar{1},9939062$
36′	$\bar{1},7646556$	36′	$\bar{1},8777237$	36′	$\bar{1},9970082$
42′	$\bar{1},7674392$	42′	$\bar{1},8806106$	42′	0,0001181
48′	$\bar{1},7702245$	48′	$\bar{1},8835013$	48′	0,0032359
54′	$\bar{1},7730114$	54′	$\bar{1},8863958$	54′	0,0063618
70°. 0′	$\bar{1},7758000$	74°. 0′	$\bar{1},8892943$	78°. 0′	0,0094959
6′	$\bar{1},7785903$	6′	$\bar{1},8921969$	6′	0,0126385
12′	$\bar{1},7813823$	12′	$\bar{1},8951036$	12′	0,0157896
18′	$\bar{1},7841762$	18′	$\bar{1},8980144$	18′	0,0189494
24′	$\bar{1},7869720$	24′	$\bar{1},9009295$	24′	0,0221181
30′	$\bar{1},7897696$	30′	$\bar{1},9038489$	30′	0,0252959
36′	$\bar{1},7925692$	36′	$\bar{1},9067728$	36′	0,0284830
42′	$\bar{1},7953709$	42′	$\bar{1},9097012$	42′	0,0316794
48′	$\bar{1},7981745$	48′	$\bar{1},9126341$	48′	0,0348855
54′	$\bar{1},8009803$	54′	$\bar{1},9155717$	54′	0,0381014
71°. 0′	$\bar{1},8037882$	75°. 0′	$\bar{1},9185141$	79°. 0′	0,0413273
6′	$\bar{1},8065983$	6′	$\bar{1},9214613$	6′	0,0445633
12′	$\bar{1},8094107$	12′	$\bar{1},9244135$	12′	0,0478098
18′	$\bar{1},8122253$	18′	$\bar{1},9273707$	18′	0,0510668
24′	$\bar{1},8150423$	24′	$\bar{1},9303330$	24′	0,0543347
30′	$\bar{1},8178617$	30′	$\bar{1},9333005$	30′	0,0576136
36′	$\bar{1},8206836$	36′	$\bar{1},9362733$	36′	0,0609037
42′	$\bar{1},8235080$	42′	$\bar{1},9392515$	42′	0,0642054
48′	$\bar{1},8263349$	48′	$\bar{1},9422352$	48′	0,0675187
54′	$\bar{1},8291645$	54′	$\bar{1},9452246$	54′	0,0708441
72°. 0′	$\bar{1},8319967$	76°. 0′	$\bar{1},9482196$	80°. 0′	0,0741816
6′	$\bar{1},8348316$	6′	$\bar{1},9512205$	6′	0,0775316
12′	$\bar{1},8376693$	12′	$\bar{1},9542272$	12′	0,0808944
18′	$\bar{1},8405099$	18′	1,9572400	18′	0,0842702
24′	$\bar{1},8433534$	24′	$\bar{1},9602590$	24′	0,0876592
30′	$\bar{1},8461998$	30′	$\bar{1},9632841$	30′	0,0910619
36′	$\bar{1},8490493$	36′	$\bar{1},9663157$	36′	0,0944784
42′	$\bar{1},8519018$	42′	$\bar{1},9693537$	42′	0,0979091
48′	$\bar{1},8547575$	48′	$\bar{1},9723983$	48′	0,1013542
54′	$\bar{1},8576164$	54′	$\bar{1},9754497$	54′	0,1048142

	$\text{Log}\frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$.		$\text{Log}\frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$.		$\text{Log}\frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$.
81°. 0′	0,1082893	84°. 0′	0,2217823	87°. 0′	0,3698153
6′	0,1117799	6′	0,2259728	6′	0,3759777
12′	0,1152863	12′	0,2301983	12′	0,3822700
18′	0,1188089	18′	0,2344600	18′	0,3887006
24′	0,1223481	24′	0,2387591	24′	0,3952792
30′	0,1259043	30′	0,2430970	30′	0,4020162
36′	0,1294778	36′	0,2474748	36′	0,4089234
42′	0,1330691	42′	0,2518940	42′	0,4160138
48′	0,1366786	48′	0,2563561	48′	0,4233022
54′	0,1403067	54′	0,2608626	54′	0,4308053
82°. 0′	0,1439539	85°. 0′	0,2654152	88°. 0′	0,4385420
6′	0,1476207	6′	0,2700156	6′	0,4465341
12′	0,1513075	12′	0,2746655	12′	0,4548064
18′	0,1550149	18′	0,2793670	18′	0,4633880
24′	0,1587434	24′	0,2841221	24′	0,4723127
30′	0,1624935	30′	0,2889329	30′	0,4816206
36′	0,1662658	36′	0,2938018	36′	0,4913595
42′	0,1700609	42′	0,2987312	42′	0,5015870
48′	0,1738794	48′	0,3037238	48′	0,5123738
54′	0,1777219	54′	0,3087823	54′	0,5238079
83°. 0′	0,1815890	86°. 0′	0,3139097	89°. 0′	0,5360007
6′	0,1854815	6′	0,3191092	6′	0,5490969
12′	0,1894001	12′	0,3243843	12′	0,5632886
18′	0,1933455	18′	0,3297387	18′	0,5788406
24′	0,1973184	24′	0,3351762	24′	0,5961320
30′	0,2013197	30′	0,3407012	30′	0,6157370
36′	0,2053502	36′	0,3463184	36′	0,6385907
42′	0,2094108	42′	0,3520327	42′	0,6663883
48′	0,2135026	48′	0,3578495	48′	0,7027765
54′	0,2176259	54′	0,3637749	54′	0,7586941

APPENDICE II.

Dans le cas très important de deux bobines circulaires du même axe, lord Rayleigh a proposé, pour l'emploi de la Table précédente, une formule d'approximation très commode. La formule, qui s'applique à un nombre quelconque de variables, se trouve dans le Rapport présenté à l'Association britannique, en 1880, par M. Merrifield, sur les *Quadratures et l'Interpolation;* elle est attribuée à feu M. H.-J. Purkiss. Dans le cas présent, le nombre des variables est de quatre.

Soient

n, n' les nombres de tours de fil des deux bobines;
a, a' les rayons des tours centraux;
b la distance des centres;
$2h$, $2h'$ les épaisseurs des bobines suivant le rayon;
$2k$, $2k'$ leurs hauteurs suivant l'axe.

Soit aussi $f(a, a', b)$ le coefficient d'induction mutuelle pour les tours centraux. Le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines est

$$\frac{1}{4}nn'\left\{\begin{array}{l} f(a+h, a', b)+f(a-h, a', b) \\ +f(a, a'+h', b)+f(a, a'-h', b) \\ +f(a, a', b+k)+f(a, a', b-k) \\ +f(a, a', b+k')+f(a, a', b-k') \\ -2f(a, a', b). \end{array}\right.$$

APPENDICE III.

Self-induction d'une bobine circulaire à section rectangulaire.

Si a désigne le rayon moyen d'une bobine de n tours, dont la hauteur suivant l'axe est b, et l'épaisseur suivant le rayon c, la self-induction, calculée au moyen de la série du § 705, peut se mettre sous la forme

$$L = 4\pi n^2 \left(\lambda a + \frac{\mu}{a} + \cdots \right),$$

où

$$\lambda = \log_e 8a - 2 - \frac{1}{6}\frac{c^2}{b^2}\left(\log_e c - \frac{25}{12}\right) - \frac{1}{6}\frac{b^2}{c^2}\left(\log_e b - \frac{25}{12}\right)$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{b^2}{c^2} - 6 + \frac{c^2}{b^2}\right)\left(\log_e \sqrt{b^2+c^2} - \frac{25}{12}\right) - \frac{2}{3}\frac{c}{b}\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{c} - \frac{2}{3}\frac{b}{c}\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{b},$$

$$\mu = \left(\frac{1}{32}b^2 + \frac{1}{96}c^2\right)\log_e 8a - \frac{1}{96}b^2 + \frac{1}{32}c^2 - \frac{1}{96}\frac{c^4}{b^2}\left(\log_e c - \frac{25}{12}\right)$$
$$- \frac{1}{32}\frac{b^4}{c^2}\left(\log_e b - \frac{25}{12}\right) + \frac{1}{96}(3b^2+c^2)\left(\frac{b^2}{c^2} - 6 + \frac{c^2}{b^2}\right)\left(\log_e\sqrt{b^2+c^2} - \frac{25}{12}\right)$$
$$- \frac{1}{24}(3b^2+c^2)\left(\frac{c}{b}\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{c} + \frac{b}{c}\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{b}\right)$$
$$+ \frac{1}{120}\frac{c^4}{b^2}\left(\log_e c - \frac{137}{60}\right) + \frac{1}{120}\frac{b^4}{c^2}\left(\log_e b - \frac{137}{60}\right)$$
$$- \frac{1}{120}\left(\frac{c^4}{b^2} + 5c^2 - 25b^2 + 3\frac{b^4}{c^2}\right)\left(\log_e\sqrt{b^2+c^2} - \frac{137}{60}\right)$$
$$+ \frac{1}{240}\frac{c^4}{b^2}\left(\log_e c - \frac{147}{60}\right) - \frac{1}{240}\frac{b^4}{c^2}\left(\log_e b - \frac{147}{60}\right)$$
$$- \frac{1}{240}\left(\frac{c^4}{b^2} - 15c^2 + 15b^2 - \frac{b^4}{c^2}\right)\left(\log_e\sqrt{b^2+c^2} - \frac{147}{60}\right)$$
$$+ \frac{1}{24}\frac{c^3}{b}\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{c} + \frac{1}{12}bc\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{c} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{11}{120}\frac{b^3}{c}\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{b}.$$

CHAPITRE XV.

INSTRUMENTS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Galvanomètres.

707. Un galvanomètre est un instrument au moyen duquel un courant électrique se révèle ou se mesure par son action magnétique. Si l'instrument est disposé pour déceler l'existence de courants faibles, on l'appelle *galvanomètre sensible*.

S'il est disposé pour mesurer un courant avec la plus grande exactitude possible en fonction des unités adoptées, il est appelé *galvanomètre étalon*.

Tous les galvanomètres sont fondés sur le principe du multiplicateur de Schweigger : le courant circule dans un fil enroulé de manière à entourer plusieurs fois un espace vide, à l'intérieur duquel est suspendu un aimant, produisant ainsi, dans cet espace, une force électromagnétique dont l'intensité est indiquée par l'aimant.

Dans les galvanomètres sensibles, la bobine est faite de manière que les tours de fil occupent la position, où ils ont le plus d'action sur l'aimant. Ils sont donc resserrés les uns sur les autres et proches de l'aimant.

Les galvanomètres étalons sont construits de façon que les dimensions et les positions relatives de toutes leurs parties fixes puissent être connues exactement, et que les légères incertitudes qui peuvent porter sur la position des pièces mobiles, introduisent dans les calculs la moindre erreur possible.

Quand on construit un galvanomètre sensible, on s'efforce de rendre aussi intense que possible le champ de force électromagnétique au milieu duquel est suspendu l'aimant. Quand on dispose un galvanomètre étalon, on tâche de rendre le champ de force électromagnétique aussi uniforme que possible dans le voisinage de l'aimant, et de connaître exactement son intensité en fonction de l'intensité du courant.

Galvanomètres étalons.

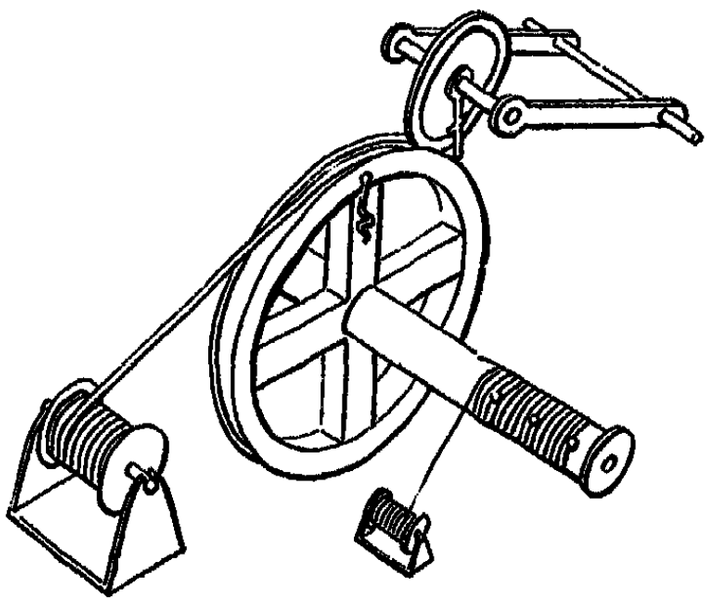
708. Dans un galvanomètre étalon, l'intensité du courant se détermine par la force qu'elle développe sur l'aimant suspendu. Or, ni la distribution du magnétisme dans l'aimant, ni la position de son centre

lorsqu'il est suspendu, ne sont susceptibles d'être déterminés avec un bien haut degré de précision. Il est donc nécessaire que la bobine soit disposée de manière à produire un champ de force à très peu près uniforme dans tout l'espace que pourra occuper l'aimant dans ses déplacements. Par suite, les dimensions de la bobine doivent en général être bien supérieures à celles de l'aimant.

En disposant convenablement plusieurs bobines, on peut obtenir, dans le champ de force qu'elles comprennent, une uniformité bien plus grande que par l'emploi d'une seule bobine; et l'on peut à la fois réduire les dimensions et accroître la sensibilité de l'instrument. Toutefois, les erreurs sur les mesures linéaires introduisent dans la détermination des constantes électriques de plus grandes incertitudes avec de petits instruments qu'avec de grands. Aussi est-il préférable de déterminer les constantes électriques des petits instruments, non point par mesure directe de leurs dimensions, mais par comparaison électrique avec un instrument étalon de grande taille, dont les dimensions sont plus exactement connues. (*Voir* § 752.)

Dans tous les galvanomètres étalons, les bobines sont circulaires. Le cadre sur lequel doit être enroulé le fil est tourné avec soin. On lui donne une largeur égale à un certain multiple n du diamètre du fil recouvert. On perce dans la joue un trou par où doit entrer le fil,

Fig. 53.



et l'on fait passer par ce trou un des bouts du fil recouvert, pour former la communication intérieure de la bobine. Puis on met le cadre sur un tour, on lui adapte un axe de bois (*fig.* 53), sur lequel, au point de sa circonférence qui correspond à l'entrée du

fil dans la bobine, ou cloue le bout d'une longue ficelle. On fait alors tourner le tout, et le fil se dépose lentement et régulièrement sur le fond du cadre, jusqu'à ce que, après n tours, il l'ait entièrement recouvert. Pendant cette opération, la ficelle s'est enroulée n fois autour de l'axe du bois, et au bout du $n^{\text{ième}}$ tour, on la fixe en y enfonçant un clou. On a soin que les tours de la ficelle soient bien étalés, pour qu'on puisse les compter aisément. On mesure alors la circonférence extérieure de la première couche du fil, et l'on commence une deuxième couche; et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait enroulé le nombre de couches voulu. La ficelle sert à compter le nombre des spires. Si, pour quelque raison, on doit dérouler une partie de la bobine, on déroule aussi la ficelle, de façon à ne point perdre le compte déjà fait du nombre des spires existant sur la bobine. Les clous servent à distinguer le nombre de spires appartenant à chaque couche.

La mesure de la circonférence de chaque couche permet de vérifier la régularité de l'enroulement, et donne le moyen de calculer les constantes électriques de la bobine. En effet, en prenant la moyenne arithmétique des circonférences du cadre et de la couche extérieure, et y ajoutant les circonférences de toutes les couches intermédiaires, puis divisant cette somme par le nombre des couches, nous obtenons la circonférence moyenne, d'où nous pouvons déduire le rayon moyen de la bobine. La circonférence de chaque couche peut se mesurer au moyen d'un ruban d'acier, ou, mieux, au moyen d'une roue graduée qui roule sur la bobine à mesure que celle-ci tourne pendant l'enroulement du fil. On détermine ensuite la valeur des divisions du ruban ou de la roue, en les comparant à une règle divisée rectiligne.

709. Lorsque l'unité de courant traverse la bobine, le moment de la force qui agit sur le système suspendu peut être exprimé par la série

$$G_1 g_1 \sin\theta + G_2 g_2 \sin\theta . P'_2(\theta) + \ldots,$$

les coefficients G étant relatifs à la bobine, les coefficients g au système suspendu, et θ étant l'angle compris entre l'axe de la bobine et celui du système suspendu (*voir* § 700).

Lorsque le système suspendu consiste en un barreau aimanté mince, présentant une aimantation uniforme et longitudinale, de longueur $2l$, et de puissance égale à l'unité, suspendu par son milieu,

$$g_1 = 2l, \qquad g_2 = 0, \qquad g_3 = 2l^3, \quad \ldots.$$

Pour un aimant de longueur $2l$ aimanté d'une façon quelconque, les coefficients sont moindres que si l'aimantation est uniforme.

710. Lorsque l'instrument sert comme galvanomètre des tangentes, la bobine est fixe; son plan est vertical et parallèle à la direction de la force magnétique terrestre. Dans ce cas, l'équation d'équilibre de l'aimant est

$$mg_1 \mathrm{H}\cos\theta = m\gamma \sin\theta[\mathrm{G}_1 g_1 - \mathrm{G}_2 g_2 \mathrm{P}'_2(0) + \ldots].$$

où mg_1 est le moment magnétique de l'aimant, H la composante horizontale de la force magnétique terrestre, et γ la force du courant qui traverse la bobine.

Si la longueur de l'aimant est petite en comparaison du rayon de la bobine, on peut négliger les termes en G et g qui suivent le premier, et l'on trouve

$$\gamma = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}_1}\cot\theta.$$

Généralement, l'angle que l'on mesure est la déviation δ de l'aimant, laquelle est le complément de θ, de sorte que $\cot\theta = \tang\delta$.

Ainsi le courant est proportionnel à la tangente de la déviation, et c'est pourquoi on appelle l'instrument un *galvanomètre des tangentes*.

Une autre méthode consiste à rendre tout l'appareil mobile autour d'un axe vertical, et à le faire tourner jusqu'à ce qu'on atteigne une position où l'aimant se trouve en équilibre, son axe étant parallèle au plan de la bobine. Si δ est l'angle compris entre le plan de la bobine et le méridien magnétique, l'équation d'équilibre est

$$mg_1 \mathrm{H}\sin\delta = m\gamma(\mathrm{G}_1 g_1 - \tfrac{3}{4}\mathrm{G}_2 g_3 - \ldots),$$

d'où

$$\gamma = \frac{\mathrm{H}}{(\mathrm{G}_1 - \ldots)}\sin\delta.$$

Le courant étant mesuré par le sinus de la déviation, l'instrument, employé de cette manière, prend le nom de *galvanomètre des sinus*.

La méthode des sinus ne peut s'appliquer que si le courant varie assez lentement pour qu'on puisse le regarder comme constant durant le temps nécessaire pour manœuvrer l'instrument et amener l'aimant à l'équilibre.

711. Examinons maintenant la disposition des bobines dans un galvanomètre étalon.

La forme la plus simple est celle où il n'y a qu'une seule bobine, au centre de laquelle l'aimant se trouve suspendu.

Soient

A le rayon moyen de la bobine,
ξ sa hauteur,
η son épaisseur,
n le nombre des spires.

Les valeurs des coefficients sont

$$G_1 = \frac{2\pi n}{A}\left(1 + \frac{1}{12}\frac{\xi^2}{A^2} - \frac{1}{8}\frac{\eta^2}{A^2}\right),$$

$$G_2 = 0,$$

$$G_3 = -\frac{\pi n}{A^3}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{A^2} - \frac{5}{8}\frac{\eta^2}{A^2}\right),$$

$$G_4 = 0, \ldots.$$

La principale correction est celle qui est due à G_3.

La série

$$G_1 g_1 + G_3 g_3 P'_3(\theta)$$

devient

$$G_1 g_1 \left[1 - 3\frac{1}{A^2}\frac{g_3}{g_1}\left(\cos^2\theta - \tfrac{1}{5}\sin^2\theta\right)\right].$$

L'écart entre le facteur de correction et l'unité est le plus grand, quand l'aimant a une aimantation uniforme, et quand $\theta = 0$. Il devient alors

$$1 - 3\frac{l^2}{A^2}.$$

Il s'annule quand $\operatorname{tang}\theta = 2$, c'est-à-dire quand la déviation est $\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{2}$, ou 26°34′. Aussi quelques observateurs disposent-ils leurs expériences de façon à rendre la déviation observée aussi voisine que possible de cet angle. Mais la meilleure méthode consiste encore à prendre un aimant assez court, relativement au rayon de la bobine, pour que l'on puisse négliger la correction.

On règle avec soin l'aimant suspendu, de façon que son centre coïncide aussi exactement que possible avec le centre de la bobine. Si néanmoins le réglage n'est point parfait, et que x, y, z soient les coordonnées du centre de l'aimant par rapport au centre de la bobine, le z étant compté parallèlement à l'axe de la bobine, le facteur de correction est

$$1 + \frac{3}{2}\frac{x^2 - y^2 - 2z^2}{A^2}.$$

Quand le rayon de la bobine est considérable et que le réglage de

l'aimant a été fait avec soin, on peut admettre que cette correction est insensible.

Dispositif de Gaugain.

712. Pour éviter la correction qui dépend de G_3, Gaugain a construit un galvanomètre, dans lequel ce terme est rendu égal à zéro par l'artifice suivant : l'aimant n'est plus suspendu au centre de la bobine, mais en un point de son axe situé à une distance du centre égale à la moitié du rayon de la bobine, G_3 étant de la forme

$$G_3 = 4\pi \frac{A^3(B^2 - \frac{1}{4}A^2)}{C^7},$$

et, dans la disposition en question, B étant égal à $\frac{1}{2}$ A, $G_3 = 0$.

Cette disposition constituerait donc un progrès sur la première forme, si l'on pouvait être sûr que le centre de l'aimant suspendu est bien au point ainsi défini. Mais la position du centre de l'aimant est toujours incertaine, et cette incertitude introduit un facteur de correction de grandeur inconnue, qui dépend de G_3 et qui est de la forme

$$\left(1 - \frac{6}{5}\frac{z}{A}\right),$$

z étant l'excès de distance du centre de l'aimant au plan de la bobine, excès qui est inconnu. Cette correction dépend de la première puissance de $\frac{z}{A}$, et, par suite, la bobine de Gaugain à aimant suspendu excentriquement est sujette à une erreur bien plus grande que l'ancienne forme.

Dispositif d'Helmholtz.

713. Helmholtz a transformé ce galvanomètre de Gaugain en un instrument digne de toute confiance, en ajoutant de l'autre côté de l'aimant, et à une distance égale, une seconde bobine semblable à la première.

Les bobines étant placées symétriquement de part et d'autre de l'aimant, on fait disparaître d'un coup tous les termes d'ordre pair.

Soit A le rayon moyen des deux bobines : on prend égale à A la distance de leurs plans moyens, et l'on suspend l'aimant au milieu de

leur axe commun. Les coefficients sont

$$G_1 = \frac{16\pi n}{5\sqrt{5}}\,\frac{1}{A}\left(1 - \frac{1}{60}\,\frac{\xi^2}{A^2}\right),$$

$$G_2 = 0,$$

$$G_3 = 0{,}0512\,\frac{\pi n}{3\sqrt{5}.A^5}\,(31\xi^2 - 30\eta_1^2),$$

$$G_4 = 0,$$

$$G_5 = -0{,}73728\,\frac{\pi n}{\sqrt{5}\,A^6},$$

n désignant le nombre de tours de fil dans l'ensemble des deux bobines.

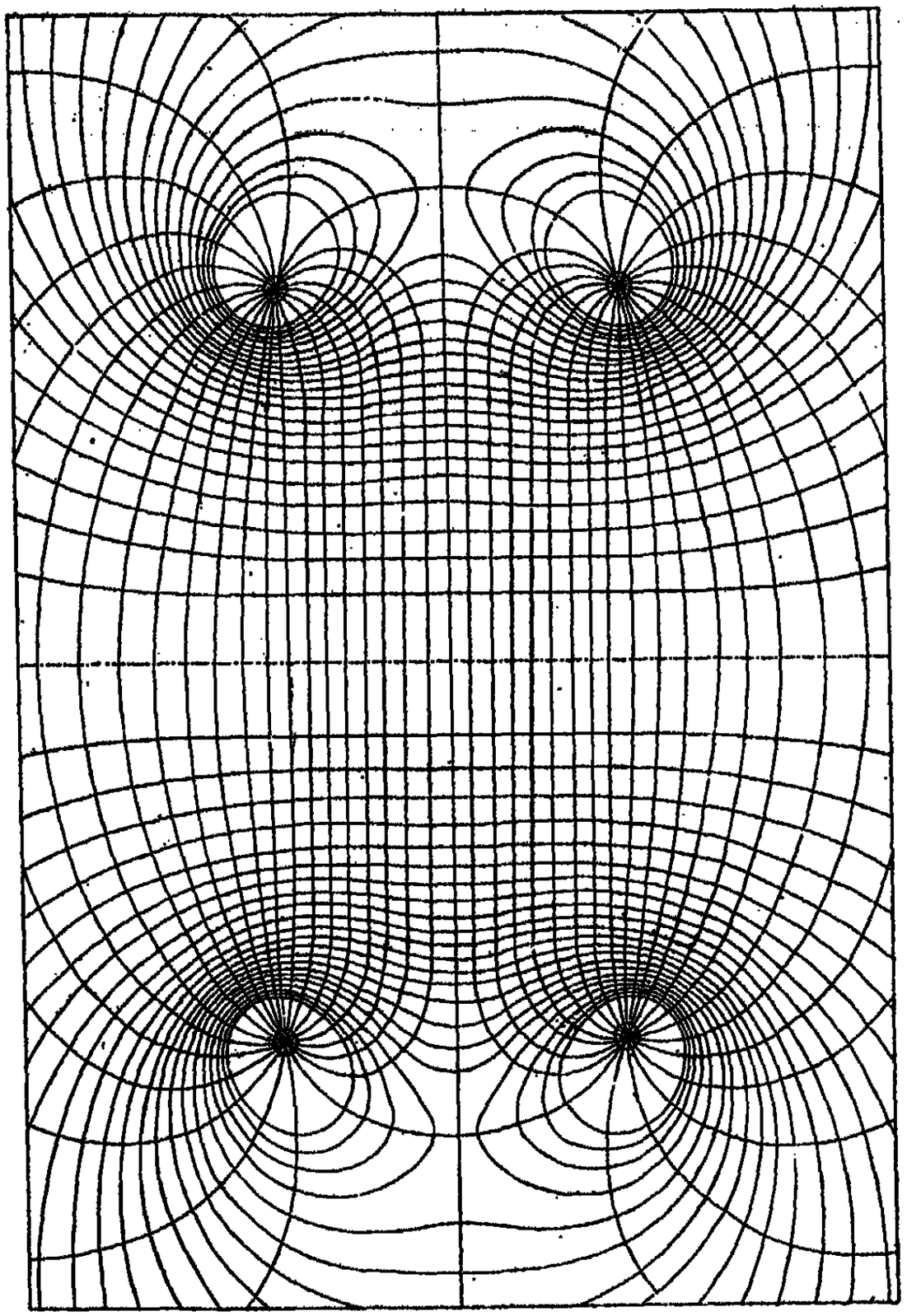
D'après ces résultats, on voit que, si la section des bobines est rectangulaire, leur hauteur étant ξ et leur épaisseur η_1, la valeur de G_3, corrigée pour les dimensions finies de la section, sera petite, et qu'elle s'annulera si ξ^2 est à η_1^2 dans le rapport de 36 à 31.

Il est donc bien inutile de s'escrimer à enrouler les bobines sur des surfaces coniques, ainsi que l'ont fait certains constructeurs; car on peut satisfaire à toutes les conditions avec des bobines à section rectangulaire, qui peuvent être construites avec bien plus de perfection que des bobines dont le noyau est un cône obtus.

La disposition des bobines dans le galvanomètre double d'Helmholtz est représentée sur la *fig.* 57, § 725.

La *Pl. XIX* représente la section du champ de force due à la double bobine.

Pl. XIX.



Deux courants circulaires.

Galvanomètre à quatre bobines.

714. En combinant quatre bobines, on peut se débarrasser des coefficients G_2, G_3, G_4, G_5 et G_6. En effet, toute combinaison symétrique fait disparaître les coefficients d'ordre pair. Supposons que les quatre bobines soient des cercles parallèles, pris sur une même sphère, et correspondant aux angles θ, φ, $\pi - \varphi$ et $\pi - \theta$. Soient n le nombre des spires de la première et de la quatrième bobine, et pn le nombre des spires de la deuxième et de la troisième bobine. La condition que le coefficient G_3, relatif à la combinaison, soit égal à zéro, donne

$$n \sin^3\theta . P'_3(\theta) + pn \sin^3\varphi . P'_3(\varphi) = 0; \tag{1}$$

la condition que $G_5 = 0$, donne

$$n \sin^3\theta . P'_5(\theta) + pn \sin^3\varphi . P'_5(\varphi) = 0. \tag{2}$$

Posant

$$\sin^2\theta = x, \qquad \sin^2\varphi = y, \tag{3}$$

et exprimant P'_3 et P'_5 (§ 698) en fonction de ces quantités, les équations (1) et (2) deviennent

$$4x - 5x^2 + 4py - 5py^2 = 0, \tag{4}$$

$$8x - 28x^2 + 21x^3 + 8py - 28py^2 + 21py^3 = 0. \tag{5}$$

Retranchant de (5) le double de (4) et divisant par 3, il vient

$$6x^2 - 7x^3 + 6py^2 - 7py^3 = 0; \tag{6}$$

d'où, par (4) et (6),

$$p = \frac{x}{y}\frac{5x-4}{4-5y} = \frac{x^2}{y^2}\frac{7x-6}{6-7y},$$

d'où nous tirons

$$y = \frac{4}{7}\frac{7x-6}{5x-4}, \qquad p = \frac{32}{49x}\frac{7x-6}{(5x-4)^2}.$$

x et y sont les carrés de sinus et, par suite, doivent être compris entre zéro et 1. Donc, ou bien x est compris entre zéro et $\frac{4}{7}$, auquel cas y est entre $\frac{6}{7}$ et 1, et p entre ∞ et $\frac{32}{343}$; ou bien x est entre $\frac{6}{7}$ et 1, et alors y est entre zéro et $\frac{4}{7}$ et p entre zéro et $\frac{32}{49}$.

Galvanomètre à trois bobines.

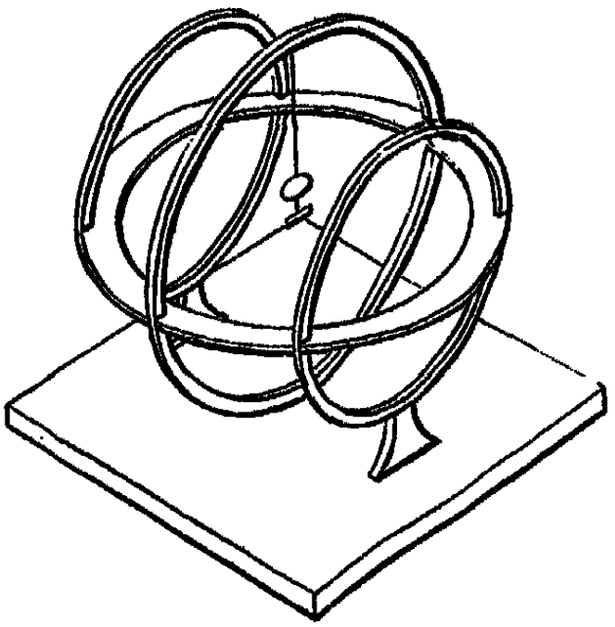
715. La disposition la plus commode est celle qui répond à $x = 1$. Alors deux des bobines coïncident, et forment un grand cercle de la sphère de rayon C. Le nombre de spires de cette bobine composée est de

64. Les deux autres bobines sont formées de petits cercles de la sphère ayant un rayon égal à $\sqrt{\frac{1}{7}}$C. La distance du plan de chacune d'elles au plan de la première est $\sqrt{\frac{3}{7}}$ C; le nombre des spires sur chacune d'elles est de 49.

La valeur de G_1 est $\frac{120}{C}$.

La *fig.* 54 représente cette disposition de bobines.

Fig. 54.



Puisque, dans ce galvanomètre à trois bobines, G_7 est le premier terme qui ait une valeur finie, après G_7, une grande partie de la sphère sur la surface de laquelle se trouvent placées les bobines forme un champ de force sensiblement uniforme.

Si l'on pouvait enrouler du fil sur la totalité d'une surface sphérique, de la manière qui a été décrite au § 672, on obtiendrait un champ de force parfaitement uniforme. Mais il serait pratiquement impossible de distribuer les spires sur une surface sphérique avec assez d'exactitude, lors même qu'il n'y aurait pas cette autre objection, qu'une telle bobine forme une surface fermée dont l'intérieur n'est pas accessible.

Si l'on met hors circuit la bobine du milieu et si l'on fait passer le courant en sens inverse dans les deux bobines latérales, on obtient un champ de force qui exerce une action à peu près uniforme dans la direction de l'axe sur un aimant ou une bobine suspendue à l'intérieur

de ce champ et dont l'axe coïncide avec celui des bobines (*voir* § 678); car, dans ce cas, tous les coefficients d'ordre impair disparaissent; et, puisque

$$\mu = \sqrt{\frac{3}{7}},$$

on a

$$P'_3 = \frac{3}{2}\mu(7\mu^2 - 3) = 0,$$

où l'expression du potentiel magnétique, dans le voisinage du centre de la bobine, devient

$$\mu = \frac{8}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\pi n\gamma\left[3\frac{r^4}{C^2}P_2(0) + \frac{11}{7}\frac{r^6}{C^4}P_6(0) + \dots\right].$$

De la grosseur qu'il convient de donner au fil d'un galvanomètre, étant donnée la résistance extérieure.

716. Soit donnée la forme du cadre sur lequel on doit enrouler le fil du galvanomètre; on demande de déterminer si ce cadre doit être garni d'un fil long et fin, ou d'un fil plus court et plus gros.

Soient

l la longueur du fil;
y son rayon;
$y + b$ le rayon du fil recouvert;
ρ sa résistance spécifique;
g la valeur de G pour l'unité de longueur du fil;
r la partie de la résistance qui ne dépend point du galvanomètre.

La résistance du fil du galvanomètre est

$$R = \frac{\rho}{\pi}\frac{l}{y^2}.$$

Le volume de la bobine est

$$V = \pi l(y + b)^2.$$

La force électromagnétique est γG, γ étant l'intensité du courant et

$$G = gl.$$

Si E est la force électromotrice qui agit dans le circuit de résistance $R + r$,

$$E = \gamma(R + r).$$

La force électromagnétique due à cette force électromotrice est

$$E\frac{G}{R + r},$$

et c'est elle que nous devons rendre maximum en faisant varier y et l.

Ou bien, en renversant la fraction, nous devons rendre minimum

$$\frac{2}{\pi g}\,\frac{1}{y^2}+\frac{r}{gl^2},$$

d'où

$$2\,\frac{2}{\pi}\,\frac{dy}{y^3}+\frac{r\,dl}{l^2}=0.$$

Si le volume de la bobine reste constant

$$\frac{dl}{l}+2\,\frac{dy}{y+b}=0.$$

Éliminant dl et dy, nous trouvons

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{r-b}{y^2}=\frac{r}{l},$$

ou

$$\frac{r}{R}=\frac{r-b}{y},$$

c'est-à-dire que la grosseur du fil du galvanomètre doit être telle que la résistance extérieure soit à la résistance du galvanomètre comme le diamètre du fil recouvert est au diamètre du fil nu.

Galvanomètres sensibles.

717. Dans la construction d'un galvanomètre sensible, chaque détail de l'ensemble est combiné en vue d'obtenir la plus grande déviation possible de l'aimant au moyen d'une force électromotrice faible agissant entre les électrodes de la bobine.

Or, le courant qui traverse le fil produit le plus d'effet quand il est placé le plus près possible de l'aimant suspendu. Mais l'aimant doit rester libre d'osciller : il faut donc laisser un espace vide à l'intérieur de la bobine. La bobine se trouve ainsi délimitée à l'intérieur.

Extérieurement à cet espace, chaque spire doit être placée de façon à exercer sur l'aimant l'action la plus grande possible. A mesure que le nombre des spires augmente, les places les plus avantageuses se trouvent occupées, et, finalement, l'effet du courant dans les premières spires peut être diminué par l'accroissement de résistance dû à un nouveau tour, plus qu'il n'est augmenté par l'effet de ce tour même. Nous obtiendrons donc, pour une force électromotrice donnée, le plus grand effet magnétique, en faisant les spires extérieures avec du fil plus gros que celui des spires intérieures.

718. Supposons les spires du galvanomètre circulaires, l'axe du galvanomètre passant par les centres de ces cercles, perpendiculairement à leur plan.

Soient $r\sin\theta$ le rayon d'un de ces cercles, $r\cos\theta$ la distance de son centre au centre du galvanomètre.

Si l est la longueur d'un morceau de fil placé le long de ce cercle, et si γ est le courant qui circule dans ce fil, la force magnétique qui s'exerce au centre du galvanomètre a pour composante suivant l'axe

$$\gamma l \frac{\sin\theta}{r^2}.$$

Si nous posons

$$r^2 = x^2 \sin\theta, \tag{1}$$

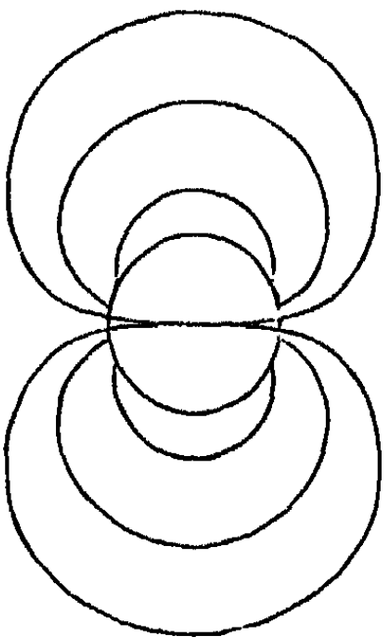
cette expression devient $\frac{\gamma l}{x^2}$.

Si donc on construit une surface semblable à celles dont la *fig.* 55 représente la section, et dont l'équation polaire est

$$r^2 = x_1^2 \sin\theta, \tag{2}$$

x_1 étant une constante quelconque, une longueur donnée de fil courbé

Fig. 55.



en forme d'arc de cercle produira un effet magnétique plus grand si elle est placée intérieurement à la surface que si elle lui est extérieure.

Il suit de là que la valeur de x doit être constante pour tous les points de la surface extérieure d'une couche de fil; car, si x était plus grand en un point qu'en un autre, on pourrait, en transportant une partie du fil de la première place à la seconde, augmenter la force qui agit au centre du galvanomètre.

La force totale due à la bobine est γG, où

$$G = \int \frac{dl}{x^2},$$

l'intégration étant étendue à toute la longueur de l et x étant considéré comme une fonction de l.

719. Soit y le rayon du fil : sa section sera πy^2; soit ρ la résistance spécifique, par unité de volume, de la substance dont est formé le fil : la résistance d'une longueur l sera $\frac{l\rho}{\pi y^2}$, et la résistance totale de la bobine sera

$$R = \frac{\rho}{\pi} \int \frac{dl}{y^2}, \tag{1}$$

y étant considéré comme fonction de l.

Soit Y^2 l'aire du quadrilatère déterminé par la rencontre des axes de quatre fils jointifs de la bobine avec un plan passant par l'axe de cette bobine; $Y^2 l$ sera le volume occupé dans la bobine par une longueur l du fil recouvert de son enveloppe isolante, y compris l'espace vide qui reste nécessairement compris entre les spires de la bobine. Le volume total de la bobine est donc

$$V = \int Y^2 dl, \tag{5}$$

Y étant considéré comme une fonction de l. Mais, puisque la bobine est une figure de révolution,

$$V = 2\pi \int\int r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta, \tag{6}$$

ou, exprimant r en fonction de x au moyen de l'équation (2),

$$V = 2\pi \int\int x^2 (\sin\theta)^{\frac{5}{2}} dx \, d\theta. \tag{7}$$

Or $2\pi \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{\frac{5}{2}} d\theta$ est une quantité numérique : appelons-la N;

alors

$$V = \tfrac{1}{3} N x^3 - V_0, \tag{8}$$

V_0 étant le volume de l'espace intérieur laissé libre pour l'aimant.

Considérons maintenant une couche de la bobine comprise entre les surfaces x et $x + dx$.

Le volume de cette couche est

$$dV = N x^2 dx = Y^2 dl, \tag{9}$$

où dl est la longueur du fil de cette couche.

Nous avons ainsi dl en fonction de dx. Substituant dans les équations (3) et (4), nous trouvons

$$dG = N \frac{dx}{Y^2}, \tag{10}$$

$$dR = N \frac{\rho}{\pi} \frac{x^2 dx}{Y^2 y^2}, \tag{11}$$

où dG et dR représentent les portions de la valeur de G et de la valeur de R qui sont dues à cette couche de la bobine.

Or, si E est la force électromotrice donnée,

$$E = \gamma(R + r),$$

r étant la résistance de la partie extérieure du circuit, qui est indépendante du galvanomètre, et la force agissant au centre est

$$\gamma G = E \frac{G}{R + r}.$$

Nous devons donc rendre $\frac{G}{R + r}$ maximum, en choisissant convenablement la section du fil de chaque couche : ce qui implique nécessairement une variation de Y, puisque Y dépend de y.

Soient G_0 et R_0 les valeurs de G et de $R + r$, quand on ne fait pas entrer dans le calcul la couche considérée. Nous avons alors

$$\frac{G}{R + r} = \frac{G_0 + dG}{R_0 + dR}, \tag{12}$$

et pour que ceci devienne maximum par la variation de la valeur de y qui répond à la couche considérée, nous devons avoir

$$\frac{\frac{d}{dy} dG}{\frac{d}{dy} dR} = \frac{G}{R + r}. \tag{13}$$

Puisque dx est très petit et nul, à la limite, $\frac{G_0}{R_0}$ sera sensiblement et, à la limite, exactement le même, quelle que soit la couche que l'on ne fait pas entrer dans le calcul; nous pouvons donc le regarder comme constant. Nous avons donc, par (10) et (11),

$$\frac{\rho}{\pi}\frac{x^2}{y^2}\left(1+\frac{Y}{y}\frac{dy}{dY}\right)=\frac{R+r}{G}=\text{const.} \tag{14}$$

Si, en recouvrant le fil et en l'enroulant, on s'y est pris de façon qu'il y ait toujours le même rapport entre l'espace occupé par le métal du fil et l'espace occupé par le fil entier, que ce fil soit fin ou gros, on a

$$\frac{Y}{y}\frac{dY}{dy}=1,$$

et nous devons faire y et Y proportionnels à x, c'est-à-dire que le diamètre du fil qui forme une couche doit être proportionnel à la dimension linéaire de cette couche.

Si l'épaisseur de l'enveloppe isolante est constante et égale à b, et si les fils sont disposés en carrés,

$$Y=2(y+b), \tag{15}$$

et la condition est

$$\frac{x^2(2y+b)}{y^3}=\text{const.} \tag{16}$$

Dans ce cas, le diamètre du fil croît en même temps que le diamètre de la couche dont il fait partie, mais pas aussi vite.

Si nous adoptons la première de ces hypothèses, qui est à peu près exacte si le fil lui-même remplit à peu près entièrement tout l'espace, nous pouvons poser

$$y=\alpha x, \qquad Y=\beta y,$$

α et β étant des constantes numériques, et

$$G=N\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right),$$

$$R=N\frac{\rho}{\pi}\frac{1}{\alpha^4\beta^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right),$$

où a est une constante dépendant de la grandeur et de la forme de l'espace laissé libre à l'intérieur de la bobine.

Donc, si nous faisons varier la grosseur du fil dans le même rapport que x, il y a fort peu d'avantage à accroître les dimensions exté-

rieures de la bobine, une fois que ces dimensions ont atteint un multiple élevé des dimensions intérieures.

720. Si ce n'est point un inconvénient d'accroître la résistance, quand par exemple la résistance extérieure est bien plus grande que celle du galvanomètre, ou quand on se propose uniquement de produire un champ de force intense, on peut faire y et Y constants. Alors on a

$$G = \frac{N}{Y^2}(x - a),$$

$$R = \frac{1}{3}\frac{N}{Y^2 y^2}\frac{\rho}{\pi}(x^3 - a^3),$$

a étant une constante dépendant de l'espace laissé libre à l'intérieur de la bobine. Alors la valeur de G croît uniformément, à mesure que l'on augmente les dimensions de la bobine, et il n'y a de limite à la valeur de G que dans les difficultés de construction et dans le prix de la bobine.

Bobines suspendues.

721. Dans le galvanomètre ordinaire, un aimant suspendu est soumis à l'action d'une bobine fixe. Mais, si l'on arrive à suspendre la bobine avec assez de délicatesse, on pourra déterminer l'action d'un aimant ou d'une bobine fixe sur la bobine suspendue, par la déviation que subit cette bobine de sa position d'équilibre.

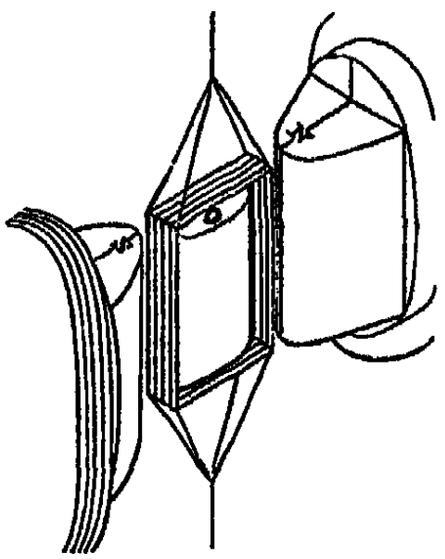
On ne peut faire passer de courant électrique dans la bobine, sans qu'il y ait communication métallique entre les électrodes de la pile et celles de la bobine. Cette communication peut être réalisée de deux manières : par une suspension bifilaire ou par des fils allant dans des directions opposées.

On a déjà décrit la suspension bifilaire au § 459, à propos de son application aux aimants. La *fig.* 54 montre la manière de disposer la partie supérieure de cette suspension. Quand on l'applique aux bobines, les deux fils ne sont plus en soie, mais en métal; et, comme la torsion d'un fil de métal capable de supporter la bobine et de lui transmettre le courant est bien plus considérable que celle d'un fil de soie, il faut en tenir compte tout particulièrement. Cette sorte de suspension a été portée à un haut degré de perfection dans les instruments construits par M. Weber.

Dans l'autre mode de suspension, un seul fil est attaché à un des bouts de la bobine; un autre fil, attaché à l'autre bout et pendant

verticalement sur le prolongement du premier fil, plonge dans un godet de mercure, ainsi qu'on le voit à la *fig.* 60, § 726. Dans certains cas, il convient de fixer les extrémités des deux fils à des pièces qui puissent les tenir fortement tendus, en ayant soin que la ligne des fils passe par le centre de gravité de la bobine. Sous cette forme, l'appareil peut être employé, lors même que l'axe n'est pas vertical (voir *fig.* 56).

Fig. 56.



722. Une bobine suspendue peut constituer un galvanomètre extrêmement sensible; car il suffit d'augmenter l'intensité magnétique du champ dans lequel elle est suspendue, pour accroître fortement la force développée au passage d'un faible courant, sans que l'on ait rien à ajouter à la masse de la bobine. A cet effet, on peut produire la force magnétique au moyen d'aimants permanents ou d'électro-aimants excités par un courant auxiliaire, et l'on peut la concentrer énergiquement sur la bobine suspendue, au moyen d'armatures en fer doux. Ainsi, dans l'appareil enregistreur *recorder* de sir W. Thomson (*fig.* 52), la bobine est suspendue entre les pôles opposés des électro-aimants N et S. Pour concentrer les lignes de force magnétique sur les côtés verticaux de la bobine, une pièce de fer doux D est placée entre les pôles de la bobine; ce fer, s'aimantant par influence, donne lieu à un champ de force très intense dans l'espace qui le sépare des électro-aimants, espace dans lequel se meuvent librement les côtés verticaux de la bobine; par suite, lors même qu'il ne passe qu'un courant très faible, la bobine est soumise à l'action d'une force très énergique, tendant à la faire tourner autour de son axe vertical.

723. On peut aussi employer une bobine suspendue pour déterminer, par comparaison avec une boussole des tangentes, la composante horizontale du magnétisme terrestre.

La bobine est suspendue de manière à se trouver en équilibre stable quand son plan est parallèle au méridien magnétique. On fait passer un courant γ qui dévie la bobine jusqu'à une nouvelle position d'équilibre faisant un angle θ avec le méridien magnétique. Si la suspension est bifilaire, le moment du couple qui produit cette déviation est $F \sin\theta$, et doit être égal à $H\gamma g \cos\theta$, H étant la composante horizontale du magnétisme terrestre; γ l'intensité dans la bobine, et g la somme des aires de toutes les spires de la bobine. D'où

$$H\gamma = \frac{F}{g} \operatorname{tang}\theta.$$

Si A est le moment d'inertie de la bobine, par rapport à l'axe de suspension, et si T est la durée d'une oscillation simple,

$$FT^2 = \pi^2 A,$$

d'où nous tirons

$$H\gamma = \frac{\pi^2 A}{T^2 g} \operatorname{tang}\theta.$$

Si le même courant, traversant la bobine d'un galvanomètre des tangentes, dévie l'aimant d'un angle φ,

$$\frac{\gamma}{H} = \frac{1}{G} \operatorname{tang}\varphi,$$

où G est la constante principale du galvanomètre des tangentes (§ 710).

De ces deux équations, on tire

$$H = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{AG \operatorname{tang}\theta}{g \operatorname{tang}\varphi}}, \qquad \gamma = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{A \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\varphi}{Gg}}.$$

Cette méthode a été indiquée par F. Kohlrausch (1).

724. Sir W. Thomson a construit un instrument unique, au moyen duquel un seul observateur peut faire à la fois les observations nécessaires pour déterminer H et γ.

La bobine est suspendue de manière à être en équilibre quand son

(1) *Pogg. Ann.*, vol. CXXXVIII, févr. 1869.

plan est dans le méridien magnétique; elle est déviée de cette position lorsqu'un courant la traverse. Un très petit aimant, suspendu au centre de la bobine, est dévié par le courant en sens contraire de la déviation de la bobine. Soient 0 la déviation de la bobine et φ celle de l'aimant : la partie variable de l'énergie du système est

$$H\gamma g \sin 0 + m\gamma G \sin(0-\varphi) - Hm\cos\varphi - F\cos 0.$$

Différentiant par rapport à 0 et à φ, nous obtenons les équations d'équilibre de la bobine et de l'aimant,

$$H\gamma g\cos 0 + m\gamma G\cos(0-\varphi) + F\sin 0 = 0,$$
$$-m\gamma G\cos(0-\varphi) + Hm\sin\varphi = 0.$$

En éliminant H ou γ entre ces équations, on trouve une équation du second degré, d'où l'on peut tirer γ ou H. Si le moment magnétique m de l'aimant suspendu est très petit, nous obtenons les valeurs approchées suivantes

$$H = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{-AG\sin 0\cos(0-\varphi)}{g\cos 0\sin\varphi}} - \frac{1}{2}\frac{mG}{g}\frac{\cos(0-\varphi)}{\cos 0},$$

$$\gamma = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{-A\sin 0\sin\varphi}{Gg\cos 0\cos(0-\varphi)}} - \frac{1}{2}\frac{m}{g}\frac{\sin\varphi}{\cos 0}.$$

Dans ces expressions

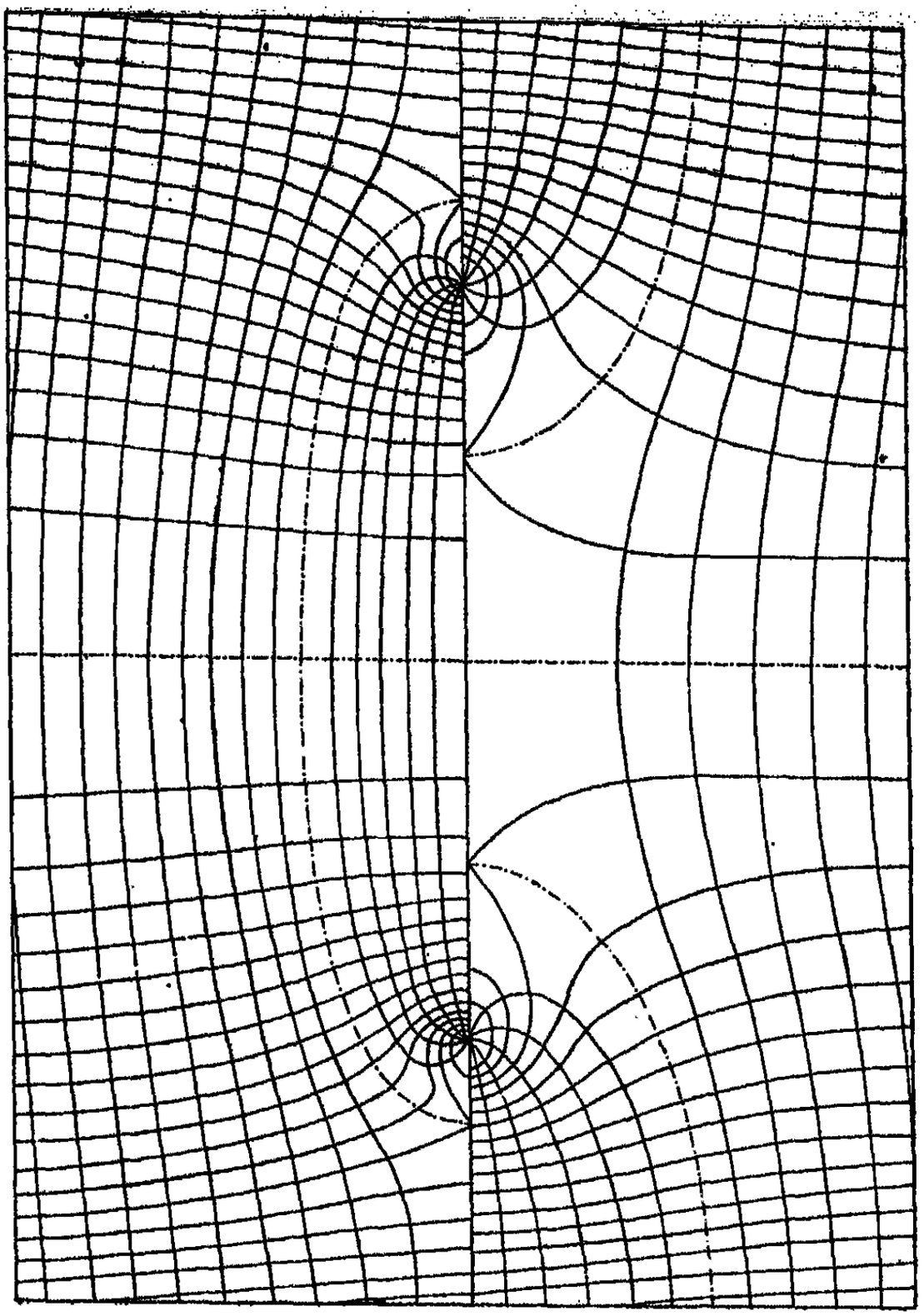
G et g sont les constantes électriques principales de la bobine;
A son moment d'inertie;
T sa durée d'oscillation;
m le moment magnétique de l'aimant;
H l'intensité de la force magnétique horizontale;
γ l'intensité du courant;
0 la déviation de la bobine;
φ celle de l'aimant.

Puisque la déviation de la bobine est en sens inverse de celle de l'aimant, ces valeurs de H et de γ seront toujours réelles.

Électrodynamomètre de Weber.

725. Dans cet instrument, une petite bobine est suspendue à l'intérieur d'une bobine fixe plus grande par deux fils métalliques. Lorsqu'un courant traverse les deux bobines, celle qui est suspendue tend à se placer parallèlement à celle qui est fixe. Cette tendance est contrariée par le moment des forces développées dans la suspension bifi-

Pl. XX.



Position stable. Position instable.

Courant circulaire dans un champ de force uniforme.

laire, et dépend aussi du magnétisme terrestre, qui agit sur la bobine suspendue.

Habituellement, quand on emploie cet instrument, les plans des deux bobines sont à peu près à angle droit, de façon que l'action mutuelle des courants qui traversent les bobines soit aussi grande que possible; et le plan de la bobine suspendue est à peu près perpendiculaire au méridien magnétique, de manière que l'action du magnétisme terrestre soit aussi petite que possible.

Soit α l'azimut magnétique du plan de la bobine fixe, et soit $\theta + \beta$ l'angle que l'axe de la bobine mobile fait avec le plan de la bobine fixe, β étant la valeur de cet angle quand la bobine n'est traversée par aucun courant, et se trouve dans sa position d'équilibre, θ étant la déviation due au courant. L'équation d'équilibre est

$$G g \gamma_1 \gamma_2 \cos(\theta + \beta) - H g \gamma_2 \sin(\theta + \beta + \alpha) - F \sin\theta = 0.$$

Supposons l'instrument réglé de façon que α et β soient tous deux très petits, et que $H g \gamma_2$ soit petit relativement à F. Nous avons alors approximativement

$$\tang\theta = \frac{G g \gamma_1 \gamma_2 \cos\beta}{F} - \frac{H g \gamma_2 \sin(\alpha - \beta)}{F}$$
$$- \frac{HG g^2 \gamma_1 \gamma_2^2}{F^2} - \frac{G^2 g^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \sin\beta}{F^2}.$$

Si, lorsque l'on change les signes de γ_1 et γ_2, les déviations sont les suivantes

θ_1 pour $\gamma_1 +$ et $\gamma_2 +$,
θ_2 pour $\gamma_1 -$ et $\gamma_2 -$,
θ_3 pour $\gamma_1 +$ et $\gamma_2 -$,
θ_4 pour $\gamma_1 -$ et $\gamma_2 +$,

nous trouvons

$$\gamma_1\gamma_2 = \frac{1}{4}\frac{F}{G g \cos\beta}(\tang\theta_1 + \tang\theta_2 - \tang\theta_3 - \tang\theta_4),$$

et, si c'est le même courant qui traverse les deux bobines, on peut poser $\gamma_1\gamma_2 = \gamma^2$ et obtenir ainsi la valeur de γ.

Si les courants ne sont pas très constants, il vaut mieux se servir de cette méthode, qui est appelée *méthode des tangentes*.

Si les courants sont assez constants pour que l'on puisse régler l'angle β de la tête de torsion de l'instrument, la méthode des sinus permet d'éliminer entièrement la correction relative au magnétisme

terrestre. Cette méthode consiste à régler β de façon que la déviation soit nulle, c'est-à-dire que

$$0 = -\beta.$$

Si les signes de γ_1 et de γ_2 sont indiqués par des indices appliqués à β, comme plus haut,

$$F \sin \beta_1 = -F \sin \beta_2 = -G g \gamma_1 \gamma_2 - H g \gamma_2 \sin \alpha,$$
$$F \sin \beta_2 = -F \sin \beta_1 = -G g \gamma_1 \gamma_2 - H g \gamma_2 \sin \alpha,$$

et

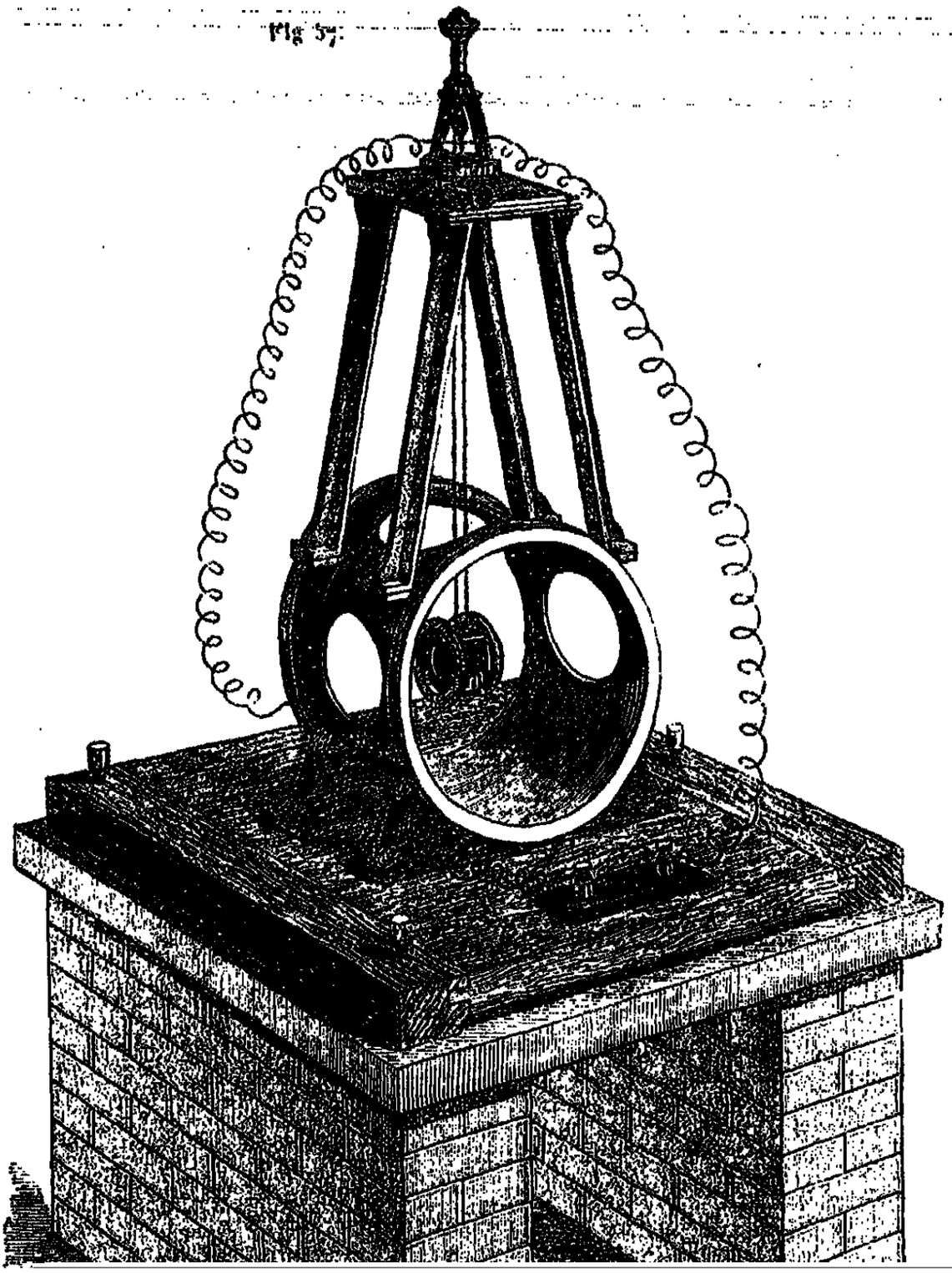
$$\gamma_1 \gamma_2 = -\frac{F}{4 G g} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2 - \sin \beta_3 - \sin \beta_4).$$

C'est de cette méthode que s'est servi M. Latimer Clark, avec l'instrument construit par le Comité d'Électricité de l'Association Britannique. Nous devons à M. Latimer Clark le dessin de l'électrodynamomètre (*fig.* 57), dans lequel on a adopté le dispositif à deux bobines de Helmholtz pour la bobine fixe et pour la bobine suspendue (1). La *fig.* 58 représente la tête de torsion, au moyen de laquelle on règle la suspension bifilaire. Les fils de suspension doivent être également tendus : c'est ce que l'on assure en attachant leurs extrémités à un fil de soie qui passe sur un galet; l'écartement des fils est réglé au moyen de deux roues à gorge, que l'on peut mettre à la distance voulue. La bobine suspendue peut être déplacée verticalement au moyen d'une vis qui agit sur le galet de suspension; elle peut être déplacée horizontalement, dans deux directions, au moyen des glissières représentées au bas de la *fig.* 54. Elle se règle en azimut au moyen de la vis tangente qui fait tourner la tête de torsion autour d'un axe vertical (*voir* § 459). On détermine son azimut en observant une échelle par réflexion dans un miroir qui se voit juste au-dessous de l'axe de la bobine suspendue.

L'instrument primitivement construit par Weber, et qui se trouve décrit dans les *Electrodynamische Maasbestimmungen*, était destiné à mesurer des courants faibles; aussi la bobine fixe et la bobine suspendue étaient-elles toutes deux formées d'un grand nombre de spires, et la bobine mobile occupait-elle à l'intérieur de la bobine fixe un espace bien plus grand que dans l'appareil de l'Association Britan-

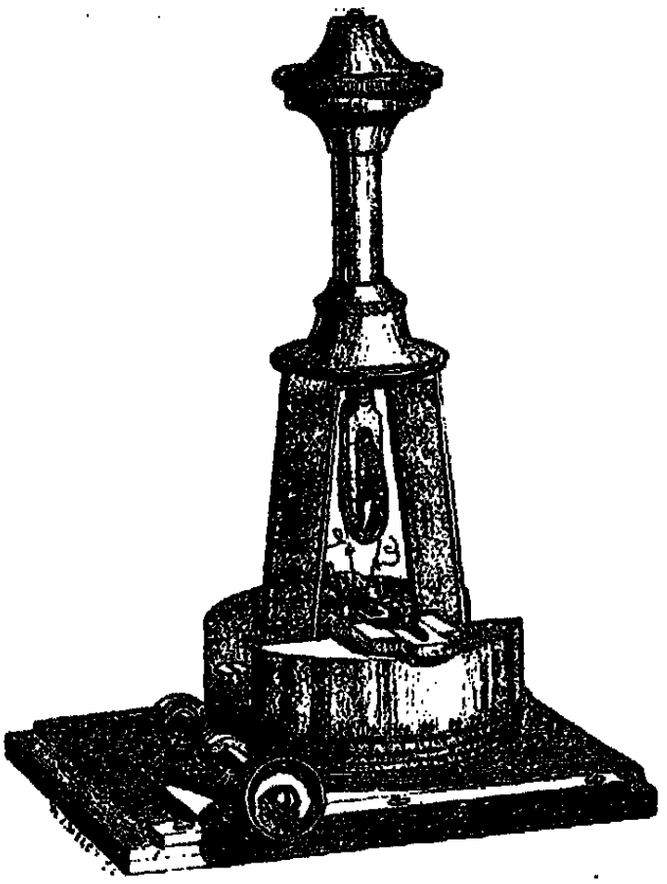
(1) En réalité, dans l'instrument, les fils d'amenée et de retour du courant aux bobines ne sont point écartés, ainsi qu'on les a représentés sur la figure; ils sont, au contraire, tenus aussi rapprochés que possible, de façon que leurs actions électromagnétiques se neutralisent l'une l'autre.

Fig 57.



nique, lequel devait être, dans l'origine, un instrument étalon, auquel on pourrait comparer d'autres instruments plus sensibles. Les expériences que Weber a faites avec son appareil constituent la démonstration expérimentale la plus complète de l'exactitude de la formule d'Ampère, en ce qui concerne les courants fermés; elles forment aussi

Fig. 58.



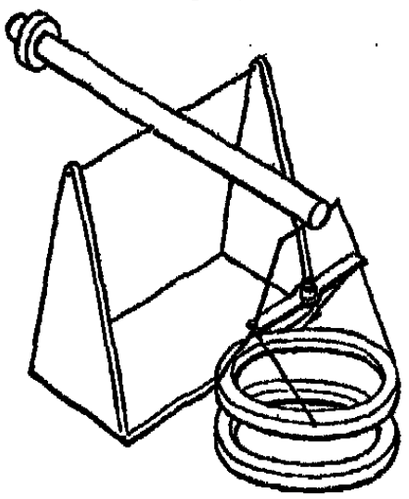
une part importante des recherches par lesquelles Weber a porté à un si haut degré de précision la détermination numérique des quantités électriques.

La forme de l'électrodynamomètre de Weber, où une bobine, suspendue à l'intérieur d'une autre, est soumise à l'action d'un couple qui tend à la faire tourner autour d'un axe vertical, est probablement celle qui convient le mieux pour les mesures absolues. On donne au § 697 une méthode pour calculer les constantes d'un pareil système.

726. Mais, si l'on veut produire, au moyen d'un faible courant, une force électromagnétique considérable, il vaut mieux placer la bobine mobile parallèlement à la bobine fixe, en lui permettant de s'en approcher ou de s'en éloigner.

Dans l'électrodynamomètre à poids du Dr Joule (*fig.* 59), la bobine suspendue est horizontale et peut prendre un mouvement vertical; la force qui agit entre elle et la bobine fixe s'évalue par le poids qu'il faut ajouter ou retirer de la bobine, pour la ramener à la posi-

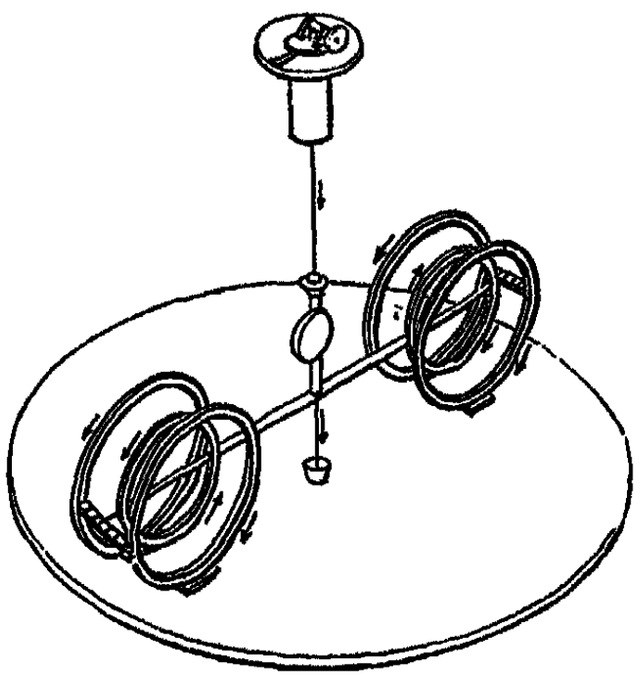
Fig. 59.



tion qu'elle occupe relativement à la bobine fixe, quand il ne passe point de courant.

La bobine suspendue peut aussi être fixée à l'extrémité de la tige horizontale d'une balance de torsion : on la place alors entre deux bobines fixes, dont l'une l'attire et l'autre la repousse (*fig.* 60).

Fig. 60.



En disposant les bobines comme on l'explique au § 729, on peut

rendre la force qui agit sur la bobine suspendue à peu près uniforme, tant qu'on ne s'écarte pas beaucoup de la position d'équilibre.

On peut fixer à l'autre bout de la tige de la balance de torsion une seconde bobine et la placer entre deux bobines fixes. Si les deux bobines suspendues sont semblables, mais traversées en sens inverses par le courant, l'effet du magnétisme terrestre sur la position du bras de la balance de torsion se trouve complètement éliminé.

727. Si la bobine mobile a la forme d'un solénoïde allongé susceptible de se mouvoir parallèlement à son axe, de façon à passer à l'intérieur d'un solénoïde fixe, plus grand et ayant le même axe, et si le courant traverse les deux solénoïdes dans le même sens, le solénoïde suspendu est aspiré à l'intérieur du solénoïde fixe avec une force qui reste à peu près uniforme tant que les extrémités des solénoïdes ne deviennent pas voisines.

728. Pour produire une force longitudinale uniforme sur une petite bobine placée entre deux bobines égales entre elles et de dimensions beaucoup plus grandes, on devra faire en sorte que le rapport du diamètre des grandes bobines à la distance de leurs plans soit de 2 à $\sqrt{3}$. Si l'on fait passer le même courant en sens inverse dans ces deux bobines, les termes qui renferment des puissances impaires de r disparaissent de l'expression de ω, et, puisque $\sin^2\alpha = \frac{1}{7}$ et $\cos^2\alpha = \frac{3}{7}$, le terme en r^4 disparaît aussi, et la partie variable de ω se réduit à

$$\frac{8}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\,\pi n\gamma\left[3\,\frac{r^2}{c^2}\,P^2(0) - \frac{11}{7}\,\frac{r^6}{c^6}\,P_6(0) + \ldots\right],$$

ce qui indique que la force qui agit sur la petite bobine suspendue est à peu près uniforme. Dans ce cas, la disposition des bobines est celle des deux bobines extérieures du galvanomètre à trois bobines, décrit au § 715 (voir *fig.* 50).

729. Si l'on veut suspendre une bobine entre deux autres suffisamment rapprochées pour que la distance des fils qui agissent l'un sur l'autre soit petite relativement au rayon des bobines, on obtiendra l'action la plus uniforme en prenant le rayon des bobines extérieures supérieur à celui de la bobine médiane de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ de la distance comprise entre le plan de la bobine médiane et celui d'une des bobines extérieures. Cela résulte de l'expression établie au § 704, relativement à l'induction mutuelle de deux courants circulaires.

CHAPITRE XVI.

OBSERVATIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

730. Parmi les mesures des quantités électriques, il y en a tant qui dépendent de l'observation des mouvements d'un corps oscillant, que nous devons accorder quelque attention à l'étude de ce mouvement et des méthodes qui conviennent le mieux à son observation.

Généralement, les petites oscillations d'un corps autour de sa position d'équilibre stable sont semblables à celles d'un point soumis à l'action d'une force variant proportionnellement à sa distance à un point fixe. Dans le cas des corps oscillants qui interviennent dans nos expériences, il y a aussi une résistance au mouvement qui dépend d'un certain nombre de causes, telles que la viscosité de l'air et celle du fil de suspension. Dans un grand nombre d'instruments électriques, il y a une autre cause de résistance, à savoir l'action réflexe des courants induits dans les circuits conducteurs voisins des aimants en mouvement. Ces courants étant induits par le mouvement de l'aimant, d'après la loi de Lenz, leur action sur l'aimant est invariablement opposée au mouvement. Dans bien des cas, c'est de là que vient la plus grande partie de la résistance.

Quelquefois, on place près de l'aimant un circuit métallique appelé *amortisseur*, qui a précisément pour objet d'éteindre et d'amortir ses oscillations. C'est pourquoi nous désignerons cette sorte de résistance sous le nom d'*extinction*.

Dans le cas des oscillations lentes, que l'on peut observer aisément, la résistance tout entière, quelles que soient les causes qui lui donnent naissance, paraît être proportionnelle à la vitesse. C'est seulement dans le cas de vitesses beaucoup plus grandes que celles des oscillations habituelles des appareils électromagnétiques, que l'on constate une résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

Nous avons donc à étudier le mouvement d'un corps soumis à une attraction proportionnelle à la distance, et à une résistance proportionnelle à la vitesse.

731. L'application suivante du principe de l'hodographe, due au

professeur Tait, nous permet d'étudier cette sorte de mouvement, d'une manière très simple, au moyen de la spirale équiangle.

Proposons-nous de trouver l'accélération d'un point matériel qui décrit une spirale logarithmique ou équiangle, en tournant autour du pôle avec une vitesse angulaire uniforme ω.

C'est la propriété de cette spirale, que la tangente PT fait avec le rayon vecteur PS un angle constant α.

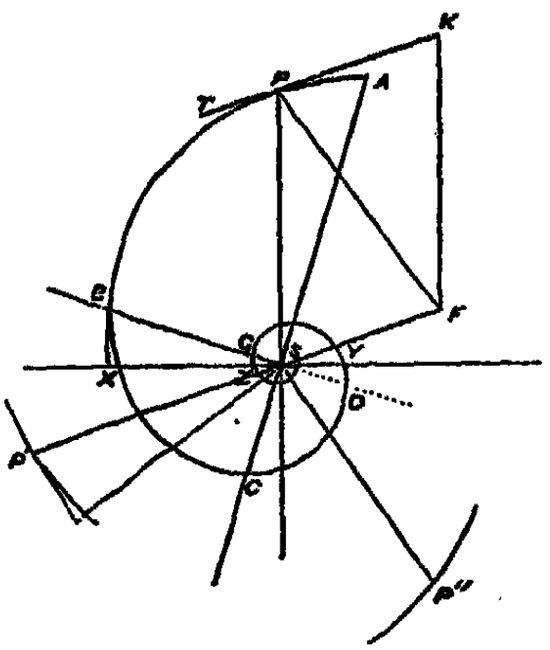
Si v est la vitesse au point P,

$$v \sin\alpha = \omega . SP.$$

Si donc nous menons SP′ parallèle à PT et égal à SP, la vitesse au point P nous sera donnée en grandeur et en direction par

$$v = \frac{\omega}{\sin\alpha} SP'.$$

Fig. 61.



P′ est donc un point de l'hodographe; mais SP′ n'est autre que SP ayant tourné de l'angle $\pi - \alpha$, c'est-à-dire que l'hodographe décrit par P′ n'est autre que la spirale primitive ayant tourné autour de son pôle de l'angle $\pi - \alpha$.

L'accélération de P est représentée en grandeur et en direction par la vitesse de P′, multipliée par le même facteur $\frac{\omega}{\sin\alpha}$.

Si donc on fait subir à SP′ la même rotation d'un angle $\pi - \alpha$, jusqu'à la position SP″, l'accélération de P sera égale, en grandeur et en

direction, à $\frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}$. SP″, où SP″ est égal à SP ayant tourné de l'angle $2\pi - 2\alpha$.

Si nous menons PF égal et parallèle à SP″, l'accélération sera $\frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}$. PF, que nous pouvons décomposer en

$$\frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}\,\mathrm{PS} \quad \text{et} \quad \frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}\,\mathrm{PK}.$$

La première de ces composantes est une force centrale, dirigée vers S, et proportionnelle à la distance.

La seconde est dirigée en sens contraire de la vitesse, et, puisque

$$\mathrm{PK} = 2\cos\alpha\,.\,\mathrm{PS} = -2\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\omega}\,v,$$

cette force peut s'écrire

$$-2\,\frac{\omega\cos\alpha}{\sin\alpha}\,v.$$

Ainsi, l'accélération du point matériel se compose de deux parties : l'une est une force attractive μr, dirigée vers S, et proportionnelle à la distance, l'autre est une résistance au mouvement $-2kv$, proportionnelle à la vitesse, avec

$$\mu = \frac{\omega^2}{\sin^2\alpha} \quad \text{et} \quad k = \omega\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Si, dans ces expressions, nous faisons $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la trajectoire devient un cercle, et nous avons $\mu_0 = \omega_0^2$ et $k = 0$.

Donc, si la loi de l'attraction reste la même,

$$\mu = \mu_0, \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 \sin\alpha,$$

c'est-à-dire que pour la même loi d'attraction la vitesse angulaire sur les différentes spirales est proportionnelle au sinus de l'angle de la spirale.

732. Si, maintenant, nous considérons le mouvement d'un point qui est la projection du point P sur la ligne horizontale XY, nous voyons que sa distance au point S et sa vitesse sont les composantes horizontales des mêmes éléments pour le point P. Donc, l'accélération de ce point se compose aussi : d'une accélération vers S égale à μ fois la distance à S, et d'un retard égal à $2k$ fois la vitesse.

Nous pouvons donc construire entièrement le mouvement recti-

ligne d'un point qui est soumis à une attraction proportionnelle à sa distance à un point fixe et à une résistance proportionnelle à la vitesse. Le mouvement d'un pareil point n'est autre que la composante horizontale du mouvement d'un autre point qui décrit une spirale logarithmique avec une vitesse angulaire constante.

733. L'équation de la spirale est

$$r = Ce^{-\varphi\cot\alpha}.$$

Pour déterminer la composante horizontale du mouvement, posons

$$\varphi = \omega t, \qquad x = a + r\sin\varphi,$$

a étant la valeur de x, pour laquelle le point est en équilibre.

Si nous menons BSD, faisant avec la verticale un angle α, les tangentes BX, DY, GZ, etc., seront verticales, et X, Y, Z seront les extrémités des oscillations successives.

734. Dans les corps oscillants, on a lieu d'observer les éléments suivants :

1° Lectures de l'échelle correspondant aux points où la vitesse change de signe : c'est ce qu'on appelle les *élongations;*

2° Époque du passage à une division déterminée de l'échelle, dans le sens positif ou dans le sens négatif;

3° Lectures de l'échelle à certaines époques déterminées. On fait rarement des observations de cette nature, sauf dans le cas d'oscillations à longue période (1).

Les quantités que nous avons à déterminer sont donc :

1° La lecture de l'échelle pour la position d'équilibre;

2° Le décroissement logarithmique des oscillations;

3° La période d'oscillation.

D'après trois élongations consécutives, déterminer la lecture qui correspond à la position d'équilibre.

735. Soient x_1, x_2, x_3 les lectures de l'échelle correspondant aux élongations X, Y et Z; soit a la lecture correspondant à la position d'équilibre S, et soit r_1 la valeur de SB,

$$x_1 - a = \quad r_1 \sin\alpha,$$
$$x_2 - a = -r_1 \sin\alpha e^{-\pi\cot\alpha},$$
$$x_3 - a = +r_1 \sin\alpha e^{-2\pi\cot\alpha}.$$

---

(1) *Voir* GAUSS, *Resultate des magnetischen Vereins*, II; 1836.

De ces valeurs nous tirons

$$(x_1 - a)(x_3 - a) = (x_2 - a)^2,$$

d'où

$$a = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 + x_3 - 2x_2}.$$

Si x_3 ne diffère pas beaucoup de x_1, on peut employer la formule approchée

$$a = \tfrac{1}{4}(x_1 + 2x_2 + x_3).$$

Déterminer le décroissement logarithmique.

736. On appelle *décroissement logarithmique* le logarithme du rapport de l'amplitude d'une oscillation à l'amplitude de l'oscillation suivante. Si nous désignons ce rapport par ρ,

$$\rho = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2}, \qquad \mathrm{L} = \log_{10}\rho, \qquad \lambda = \log_e \rho.$$

L est appelé *décroissement logarithmique vulgaire*, et λ *décroissement logarithmique népérien*. Il est évident que

$$\lambda = \mathrm{L}\log_e 10 = \pi \cot \alpha,$$

d'où

$$\alpha = \operatorname{arc\,cot} \frac{\lambda}{\pi},$$

ce qui détermine l'angle de la spirale logarithmique.

Lorsqu'on se propose spécialement de déterminer λ, on laisse le corps exécuter un nombre considérable d'oscillations. Si c_1 est l'amplitude de la première et c_n l'amplitude de la $n^{\text{ième}}$ oscillation,

$$\lambda = \frac{1}{n-1}\log_e\left(\frac{c_1}{c_n}\right).$$

Si l'on suppose que les observations des petites oscillations soient aussi précises que celles des grandes, on devra, pour obtenir la meilleure valeur de λ, laisser les oscillations s'éteindre jusqu'à ce que le rapport de c_1 à c_n devienne, à très peu près, égal à la base e du système des logarithmes népériens. C'est ce qui arrive lorsque n est le nombre entier le plus voisin de $\frac{1}{\lambda} + 1$.

Mais comme, dans la plupart des cas, le temps est précieux, il vaut mieux faire la seconde série d'observations avant que l'amplitude ait diminué jusque-là.

737. Dans certains cas, on peut avoir à déterminer la position d'équilibre d'après deux élongations consécutives, le décroissement logarithmique étant connu par une expérience spéciale. On a alors

$$a = \frac{x_1 + e^{\lambda} x_2}{1 + e^{\lambda}}.$$

Période d'oscillation.

738. Ayant déterminé la lecture de l'échelle qui correspond à la position d'équilibre, on met une marque bien visible en ce point de l'échelle ou, du moins, aussi près que possible; et, pendant plusieurs oscillations successives, on note l'époque du passage devant cette marque.

Supposons que la marque soit du côté positif du point d'équilibre, à une distance x inconnue, mais très petite, et soit t_1 l'époque observée du premier passage devant la marque, le mobile allant dans le sens positif, et soient $t_2, t_3, \ldots$ les époques des passages suivants.

Si T est la période d'oscillation, et si $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sont les époques du passage à la véritable position d'équilibre,

$$t_1 = P_1 + \frac{x}{v_1}, \qquad t_2 = P_2 + \frac{x}{v_2}, \qquad \ldots,$$

où $v_1, v_2, \ldots$ sont les vitesses lors des passages successifs, vitesses que l'on peut regarder comme uniformes sur le parcours très petit x.

Si ρ est le rapport de l'amplitude d'une oscillation à l'amplitude de l'oscillation suivante :

$$v_2 = -\frac{1}{\rho} v_1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{v_2} = -\rho \frac{x}{v_1}.$$

Si l'on a observé trois passages aux époques t_1, t_2 et t_3, on trouve

$$\frac{x}{v_1} = \frac{t_1 - 2t_2 + t_3}{(\rho + 1)^2}.$$

La période d'oscillation est donc

$$T = \frac{1}{2}(t_3 - t_1) - \frac{1}{2}\frac{\rho - 1}{\rho + 1}(t_1 - 2t_2 + t_3).$$

L'époque du second passage au véritable point d'équilibre est

$$P_2 = \frac{1}{4}(t_1 + 2t_2 + t_3) - \frac{1}{4}\frac{(\rho - 1)^2}{(\rho + 1)^2}(t_1 - 2t_2 + t_3).$$

Trois passages suffisent pour déterminer ces trois quantités, mais on peut en combiner un plus grand nombre par la méthode des moindres carrés. Ainsi, pour cinq passages,

$$T = \frac{1}{10}(2t_5 + t_4 - t_2 - 2t_1) - \frac{1}{10}(t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5) \times \frac{\rho - 1}{\rho + 1}\left(2 - \frac{\rho}{1 + \rho^2}\right).$$

L'époque du troisième passage est

$$P_3 = \frac{1}{5}(t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2t_4 + t_5) - \frac{1}{5}(t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5)\frac{(\rho - 1)^2}{(\rho + 1)^2}.$$

739. On peut étendre la même méthode à une série d'un nombre quelconque d'oscillations. Si la rapidité des oscillations ne permet pas de noter tous les passages, on peut noter tous les troisièmes ou tous les cinquièmes passages, en ayant soin que les passages successifs soient en sens contraires. Si les oscillations continuent régulièrement pendant longtemps, on n'a pas besoin de les observer tout ce temps. On peut commencer par observer un nombre de passages suffisant pour déterminer approximativement la période d'oscillation T et l'époque du passage moyen P, et l'on note si ce passage se fait dans la direction positive ou la direction négative. Puis on peut continuer de compter les oscillations, sans noter l'époque du passage, ou même on peut abandonner l'appareil à lui-même sans le surveiller. On observe ensuite une deuxième série de passages; on en déduit la période d'oscillation T' et l'époque du passage moyen P', et l'on note la direction de ce passage.

Si T et T', les périodes d'oscillation déduites des deux séries d'observations, sont à peu près égales, on peut passer à une détermination plus exacte de la période obtenue en combinant les deux séries d'observations.

Divisant P' — P par T, le quotient doit être très voisin d'un nombre entier, pair ou impair, suivant que les passages P et P' ont eu lieu dans la même direction ou dans des directions opposées. S'il n'en est point ainsi, la série d'observations ne vaut rien; si, au contraire, le résultat est très voisin d'un nombre entier n, on divise P' — P par n, et l'on trouve ainsi la valeur moyenne de P pour la durée entière des oscillations.

740. La période d'oscillation T, ainsi obtenue, est la durée moyenne des oscillations effectives, et l'on doit lui faire subir des corrections

si l'on veut en déduire la période des oscillations infiniment petites, sans amortissement.

Pour déduire de la période observée la période relative aux arcs infiniment petits, on remarque que la période d'une oscillation d'amplitude c est généralement de la forme

$$T = T_1(1 + kc^2),$$

k étant un coefficient qui, dans le cas du pendule ordinaire, est égal à $\frac{1}{64}$. Or, les amplitudes des oscillations successives sont c, $c\rho^{-1}$, $c\rho^{-2}$, $c\rho^{-3}$, ..., $c\rho^{1-n}$, de sorte que la durée totale de n oscillations est

$$nT = T_1\left(n + k\,\frac{c_1^2\rho^2 - c_n^2}{\rho^2 - 1}\right),$$

T étant la durée déduite des observations. Donc on aura la durée T_1, relative aux oscillations infiniment petites, par la formule approchée

$$T_1 = T\left(1 - \frac{k}{n}\,\frac{c_1^2\rho^2 - c_n^2}{\rho^2 - 1}\right).$$

Pour trouver la période T_0, dans le cas où il n'y a pas d'amortissement, nous avons

$$T_0 = T_1 \sin\alpha$$
$$= T_1\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}.$$

741. L'équation du mouvement rectiligne d'un corps, attiré vers un point fixe et soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse, est

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\,\frac{dx}{dt} + \omega^2(x - a) = 0, \tag{1}$$

x étant la coordonnée du point au temps t et a la coordonnée de la position d'équilibre.

Pour résoudre cette équation, posons

$$x - a = e^{-kt}y, \tag{2}$$

Alors, on a

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega^2 - k^2)y = 0, \tag{3}$$

dont la solution est

$$y = C\cos\left(\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t + \alpha\right) \quad \text{si } k < \omega, \tag{4}$$

$$y = A + Bt \quad \text{si } k = \omega, \tag{5}$$

$$y = C\cosh\left(\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t + \alpha'\right) \text{ si } k > \omega \tag{6}$$

La valeur de x se déduit de celle de y par l'équation (2). Si k est plus petit que ω, le mouvement consiste en une série infinie d'oscillations de période constante et d'amplitude constamment décroissante; k augmentant, la période devient plus longue et l'amplitude décroît plus rapidement.

Si k, moitié du coefficient de résistance, devient égal ou supérieur à ω, racine carrée de l'accélération à l'unité de distance de la position d'équilibre, le mouvement cesse d'être oscillatoire : le point ne passe qu'une fois par la position d'équilibre, puis atteint une position d'élongation maximum et revient ensuite vers la position d'équilibre, s'en approchant toujours, mais ne l'atteignant jamais.

Les galvanomètres, où la résistance est assez grande pour que le mouvement soit de cette nature, sont appelés *galvanomètres apériodiques*. Ils sont très utiles dans beaucoup d'expériences, mais surtout pour les transmissions télégraphiques, dans lesquelles des oscillations, se produisant librement, masqueraient entièrement les mouvements que l'on se propose d'observer.

Quelles que soient les valeurs de k et de ω, la valeur de la lecture a de l'échelle, qui correspond à la position d'équilibre, peut se déduire de cinq lectures p, q, r, s, t, prises à des intervalles de temps égaux, au moyen de la formule

$$a = \frac{q(rs - qt) + r(pt - r^2) + s(qr - ps)}{(p - 2q + r)(r - 2s + t) - (q - 2r + s)^2}.$$

Des observations au galvanomètre.

742. Pour mesurer un courant constant avec un galvanomètre des tangentes, on règle l'instrument de façon que le plan des bobines soit parallèle au méridien magnétique et l'on détermine le zéro. On fait alors passer le courant dans les bobines, et l'on observe la déviation de l'aimant dans sa nouvelle position d'équilibre. Désignons-la par φ.

Alors, si

H est la force magnétique horizontale;
G le coefficient du galvanomètre;
γ l'intensité du courant,

$$\gamma = \frac{H}{G} \operatorname{tang} \varphi. \tag{1}$$

Si le coefficient de torsion du fil de suspension est τMH (*voir* § 452),

nous devrons employer la formule corrigée

$$\gamma = \frac{H}{G}(\operatorname{tang}\varphi + \tau\varphi \sec\varphi). \tag{2}$$

Valeur la plus avantageuse de la déviation.

743. Dans certains galvanomètres, on peut faire varier à volonté le nombre des spires de la bobine à travers laquelle passe le courant. Dans d'autres, on peut détourner une fraction connue du courant dans un conducteur appelé *dérivation*. Dans les deux cas, on fait varier la valeur de G, c'est-à-dire l'effet produit sur l'aimant par un courant égal à l'unité.

Déterminons la valeur de G pour laquelle une erreur déterminée, faite dans l'observation de la déviation, donne lieu à la plus petite erreur possible sur la valeur de l'intensité du courant que l'on déduit de cette observation.

Différentiant l'équation (1), nous trouvons

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{H}{G}\sec^2\varphi. \tag{3}$$

Éliminant G,

$$\frac{d\varphi}{d\gamma} = \frac{1}{2\gamma}\sin 2\varphi. \tag{4}$$

Cette expression devient maximum, pour une valeur donnée de γ, quand la déviation est de 45°. On réglera donc la valeur de G jusqu'à ce que $G\gamma$ soit aussi voisin de H que possible; ainsi, pour des courants forts, il vaut mieux ne pas employer un galvanomètre trop sensible.

Sur la meilleure manière d'envoyer le courant.

744. Lorsque l'observateur peut, au moyen d'une clef, établir ou rompre, à chaque instant, les communications du circuit, il est bon de manœuvrer la clef de façon que l'aimant arrive à sa position d'équilibre avec la moindre vitesse possible. La méthode suivante a été indiquée dans ce but par Gauss.

Supposons l'aimant à sa position d'équilibre, sans courant. L'observateur donne un contact de courte durée; l'aimant se met en mouvement vers sa nouvelle position d'équilibre. On rompt le contact : la force qui agit alors est dirigée vers la position primitive d'équilibre et ralentit le mouvement. Si cette opération a été faite de façon que l'aimant arrive au repos exactement à sa nouvelle position d'équi-

libre, l'observateur peut donner un nouveau contact et le maintenir : l'aimant reste immobile dans sa nouvelle position.

Faisons abstraction de l'effet des résistances, ainsi que de l'inégalité des forces totales qui agissent dans la nouvelle et dans l'ancienne position : nous voulons que, pendant la durée de sa première action, la nouvelle force engendre autant d'énergie cinétique que la force primitive en détruira quand le circuit sera rompu; nous devons donc prolonger la première action du courant jusqu'à ce que l'aimant ait parcouru la moitié de la distance qui sépare l'ancienne de la nouvelle position d'équilibre. Alors, la force primitive, agissant pendant que l'aimant parcourt l'autre moitié de sa course, devra l'arrêter exactement. Or, le temps nécessaire pour passer d'une position d'élongation maximum à un point situé à mi-chemin de la position d'équilibre est de $\frac{1}{6}$ de période ou de $\frac{1}{3}$ d'oscillation simple.

Dès lors, l'observateur, ayant préalablement déterminé la durée d'une oscillation simple, établit le contact pendant un tiers de ce temps, rompt le contact pendant un autre tiers et, alors, rétablit le contact pour le reste de la durée de l'expérience. De la sorte, l'aimant reste de suite en repos, ou bien a des oscillations si petites que l'on peut faire la lecture immédiatement, sans attendre que les mouvements soient éteints. A cet effet, on règle un métronome de façon qu'il donne trois battements pendant une oscillation simple de l'aimant.

La règle est un peu plus compliquée, si les résistances sont assez grandes pour qu'on doive en tenir compte; mais alors les oscillations s'éteignent si vite, qu'il n'est pas nécessaire de corriger la règle précédente.

Pour ramener l'aimant à sa position de repos, on coupe le circuit pendant un tiers d'oscillation, on le rétablit pendant un autre tiers et on le coupe définitivement. On laisse ainsi l'aimant fixe dans sa première position. Si, immédiatement après la lecture directe, on doit prendre la lecture inverse, on coupe le circuit pendant la durée d'une oscillation simple, puis on le renverse : l'aimant se trouve ainsi amené au repos à la position inverse.

Mesure d'après la première élongation.

745. Quand on n'a pas le temps de faire plus d'une observation, le courant peut être mesuré par l'élongation extrême observée, lors de la première impulsion reçue par l'aimant. S'il n'y a point de résistance, la déviation permanente φ est la moitié de l'élongation. Si la résis-

stance est telle que le rapport d'une oscillation à la suivante soit égal à ρ, et si θ_0 est la lecture correspondant au zéro, θ_1 l'élongation extrême atteinte dans la première impulsion, la déviation φ, qui correspond à la position d'équilibre, est

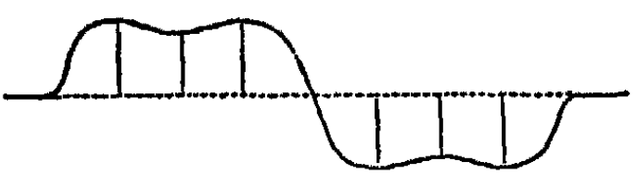
$$\varphi = \frac{\theta_0 + \rho\theta_1}{1+\rho}.$$

De cette manière, on peut calculer la déviation sans attendre que l'aimant vienne s'arrêter à sa position d'équilibre.

Comment doit se faire une série d'observations.

746. Si l'on a à faire un nombre considérable de mesures sur un courant constant, la meilleure manière de procéder est la suivante : on observe trois élongations avec le courant positif, on coupe le circuit pendant la durée d'une oscillation simple environ, de façon que l'aimant aille se placer en oscillant dans la position d'équilibre du côté négatif; on renverse alors le courant, et l'on observe trois élongations du côté négatif; on coupe de nouveau le circuit pendant la durée d'une oscillation, et l'on recommence les observations du côté positif, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait obtenu un nombre suffisant d'observations. De cette manière se trouvent éliminées les erreurs qui pourraient être dues à un changement dans la direction de la force magnétique terrestre survenu pendant la durée des observations. En réglant avec soin la durée des contacts et des interruptions, l'opérateur peut aisément régler l'étendue des oscillations et les rendre suffisamment petites, sans qu'elles cessent d'être distinctes. Le mouvement de l'aimant est figuré graphiquement sur la *fig.* 62, où

Fig. 62.



les abscisses représentent les temps et les ordonnées les déviations de l'aimant. Si $\theta_1, \ldots, \theta_6$ sont les élongations observées, la déviation est donnée par la formule

$$8\varphi = \theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - 2\theta_5 - \theta_6.$$

Méthode de multiplication.

747. Dans certains cas, la déviation de l'aimant du galvanomètre est très petite, et il peut être utile d'amplifier l'effet visible, en renversant le sens du courant à des instants convenablement choisis, pour imprimer à l'aimant un mouvement d'oscillation. A cet effet, on détermine d'abord la durée T d'une oscillation simple de l'aimant; alors on envoie le courant dans le sens positif pendant un temps T, puis dans le sens négatif pendant la même durée, et ainsi de suite. Quand le mouvement de l'aimant est devenu visible, on peut faire les inversions de courant aux instants où l'on observe les plus grandes élongations.

Supposons l'aimant donnant l'élongation positive θ_0, et envoyons le courant dans la bobine dans le sens négatif. La position d'équilibre est alors $-\varphi$, et l'aimant va s'écarter jusqu'à une élongation négative θ_1, telle que

$$-\rho(\varphi+\theta_1)=\theta_0+\varphi$$

ou

$$-\rho\theta_1=\theta_0+(\rho+1)\varphi.$$

De même, si, en rétablissant le courant positif, on donne à l'aimant une impulsion qui l'amène à l'élongation θ_2,

$$\rho\theta_2=-\theta_1+(\rho+1)\varphi$$

ou

$$\rho^2\theta_2=\theta_0+(\rho+1)^2\varphi,$$

et, si l'on renverse le courant n fois de suite, nous trouvons

$$(-1)^n\theta_n=\rho^{-n}\theta_0+\frac{\rho+1}{\rho-1}(1-\rho^{-n})\varphi;$$

d'où nous pouvons tirer φ sous la forme

$$\varphi=(\theta_n-\rho^{-n}\theta_0)\frac{\rho-1}{\rho+1}\frac{1}{1-\rho^{-n}}.$$

Si n est assez grand pour que l'on puisse négliger ρ^{-n}, l'expression devient

$$\varphi=\theta_n\frac{\rho-1}{\rho+1}.$$

Pour que l'on puisse appliquer cette méthode à des mesures de précision, il faut que l'on connaisse exactement ρ, rapport d'une oscillation de l'aimant à la suivante, sous l'influence des résistances auxquelles il est soumis. Comme il est difficile d'éviter des irrégularités

dans la valeur de ρ, les incertitudes qui résultent de ces irrégularités contrebalancent généralement l'avantage d'une forte déviation; et, en réalité, c'est seulement quand on veut mettre en évidence l'existence d'un faible courant, en lui faisant produire un mouvement visible de l'aiguille, que cette méthode présente quelque valeur.

Mesure des courants instantanés.

748. Quand la durée d'un courant n'est qu'une très petite fraction de la période d'oscillation de l'aimant du galvanomètre, la quantité totale d'électricité transmise par le courant peut se mesurer par la vitesse angulaire imprimée à l'aimant pendant le passage du courant, et cette vitesse peut se déduire de l'élongation atteinte par l'aimant dans sa première oscillation.

Si l'on néglige les résistances qui éteignent le mouvement de l'aimant, cette étude est très aisée.

Soient, à un instant quelconque, γ l'intensité du courant et Q la quantité d'électricité transmise; on a

$$(1) \qquad Q = \int \gamma \, dt.$$

Soient M le moment magnétique et A le moment d'inertie de l'aimant et du système suspendu,

$$(2) \qquad A_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + MH \sin\theta = MG\gamma \cos\theta.$$

Si la durée du passage du courant est très courte, nous pouvons intégrer, par rapport à t pendant cette durée, sans tenir compte de la variation de θ; nous trouvons

$$(3) \qquad A \frac{d\theta}{dt} = MG \cos\theta_0 \int \gamma \, dt + C = MGQ \cos\theta_0 + C.$$

On voit que le passage de la quantité d'électricité Q communique à l'aimant une quantité de mouvement angulaire $MGQ\cos\theta_0$, θ_0 étant la valeur de θ au moment du passage du courant. Si, primitivement, l'aimant était en équilibre, on peut faire $\theta_0 = 0$.

Ensuite l'aimant, oscillant librement, atteint une élongation θ_1. S'il n'y a point de résistance, le travail effectué dans cette oscillation contre la force magnétique est

$$MH(1 - \cos\theta_1).$$

L'énergie communiquée à l'aimant par le passage du courant est

$$\tfrac{1}{2}A\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Égalant ces deux quantités, nous avons

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\frac{MH}{A}(1-\cos\theta_1 \tag{4}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= 2\sqrt{\frac{MH}{A}}\sin\tfrac{1}{2}\theta_1\\ &= \frac{MG}{A}Q,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

d'après l'équation (3).

Mais, si T est la durée d'une oscillation simple de l'aimant,

$$T = \pi\sqrt{\frac{A}{MH}}, \tag{6}$$

et nous trouvons

$$Q = \frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin\tfrac{1}{2}\theta_1, \tag{7}$$

où H est la composante horizontale de la force magnétique terrestre; G, le coefficient du galvanomètre; T, la durée d'une oscillation simple, et θ_1, la première élongation de l'aimant.

749. Dans la plupart des expériences, l'élongation est un petit angle, et il est alors aisé de tenir compte des résistances, car on peut traiter l'équation du mouvement comme une équation linéaire.

Supposons l'aimant en repos dans sa position d'équilibre; on lui communique une vitesse angulaire instantanée v, et soit θ_1 la première élongation.

L'équation du mouvement est

$$\theta = Ce^{-\omega_1 t\tan\beta}\sin\omega_1 t, \tag{8}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = C\omega_1\sec\beta e^{-\omega_1 t\tan\beta}\cos(\omega_1 t+\beta). \tag{9}$$

Quand $t=0$,

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt} = C\omega_1 = v.$$

Quand $\omega_1 t+\beta = \frac{\pi}{2}$,

$$\theta = Ce^{-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\tan\beta}\cos\beta = \theta_1; \tag{10}$$

d'où

$$\theta_1 = \frac{\rho}{\omega_1} e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{tang}\beta} \cos\beta. \tag{11}$$

Or

$$\frac{MH}{A} = \omega^2 = \omega_1^2 \sec^2\beta, \tag{12}$$

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\lambda}{\pi}, \qquad \omega_1 = \frac{\pi}{T_1}, \tag{13}$$

$$\rho = \frac{MG}{A} Q. \tag{14}$$

D'où

$$\theta_1 = \frac{QG}{H} \frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{T_1} e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}} \tag{15}$$

et

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T_1}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}} e^{\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}} \theta_1, \tag{16}$$

ce qui donne la première élongation en fonction de la quantité d'électricité du courant instantané, et réciproquement, T_1 étant la durée observée d'une oscillation simple sous l'influence de la résistance qui produit l'extinction. Si λ est petit, on peut employer la formule approchée

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} \left(1+\tfrac{1}{2}\lambda\right)\theta_1. \tag{17}$$

Méthode de recul.

750. La méthode précédente suppose que l'aimant était au repos, dans sa position d'équilibre, au moment où le courant instantané a traversé la bobine. Si l'on veut répéter l'expérience, on doit donc attendre que l'aimant soit revenu au repos; mais, dans certains cas où l'on a le moyen de produire, à n'importe quel instant, des courants instantanés d'égale intensité, la méthode suivante, due à Weber (1), convient le mieux pour faire des séries prolongées d'observations.

Supposons que l'aimant ait été mis en oscillation par un courant instantané, dont la valeur est Q_0. Posons, pour abréger,

$$K = \frac{G\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{HT_1} e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}}. \tag{18}$$

(1) *Resultate des magnetischen Vereins;* 1838, p. 98.

la première élongation sera

$$\theta_1 = KQ_0, \tag{19}$$

que nous appellerons a_1. La vitesse instantanée imprimée à l'aimant au départ est

$$v_0 = \frac{MG}{A} Q_0. \tag{20}$$

Quand il repasse par la position d'équilibre, marchant dans la direction négative, sa vitesse est

$$v_1 = -v_0 e^{-\lambda}. \tag{21}$$

L'élongation négative suivante

$$\theta_2 = -\theta_1 e^{-\lambda} = b_1. \tag{22}$$

Quand l'aimant revient à sa position d'équilibre, sa vitesse est

$$v_2 = v_0 e^{-2\lambda}. \tag{23}$$

Faisons maintenant passer à travers la bobine un courant instantané, dans lequel la quantité totale d'électricité est — Q, au moment où l'aimant est à son zéro. La vitesse v_2 se change en $v_2 - v$, où

$$v = \frac{MG}{A} Q. \tag{24}$$

Si Q est plus grand que $Q_0 e^{-2\lambda}$, la nouvelle vitesse est négative et égale à

$$-\frac{MG}{A}(Q - Q_0 e^{-2\lambda}).$$

Le mouvement de l'aimant se trouve ainsi renversé, et l'élongation suivante devient négative:

$$\theta_3 = -K(Q - Q_0 e^{-2\lambda}) = c_1 = -KQ + \theta_1 e^{-2\lambda}. \tag{25}$$

Laissons alors l'aimant revenir à son élongation positive,

$$\theta_4 = -\theta_3 e^{-\lambda} = d_1 = e^{-\lambda}(KQ - a_1 e^{-2\lambda}), \tag{26}$$

et quand il atteint de nouveau sa position d'équilibre, envoyons un courant positif de quantité Q qui lance l'aimant dans le sens positif, jusqu'à l'élongation positive,

$$\theta_5 = KQ - \theta_3 e^{-2\lambda}; \tag{27}$$

et prenant cette élongation pour la première d'une nouvelle série de

quatre, nous l'appelons a_3,

$$a_3 = KQ(1 - e^{-2\lambda}) + a_1 e^{-4\lambda}, \tag{28}$$

En procédant de cette manière : observant deux élongations, l'une + et l'autre —, envoyant alors un courant négatif et observant deux élongations — et +, envoyant un nouveau courant positif, etc., on forme une série formée de groupes de quatre élongations; dans chaque groupe

$$\frac{d-b}{a-c} = e^{-\lambda} \tag{29}$$

et

$$KQ = \frac{(a-b)e^{-2\lambda} + (d-c)}{1+e^{-\lambda}}. \tag{30}$$

Si l'on a observé n groupes d'élongations, on obtient le décroissement logarithmique par l'équation

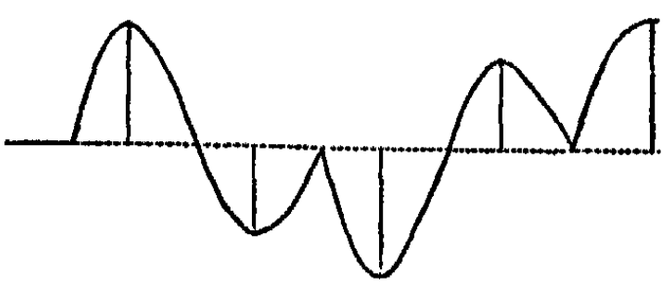
$$\frac{\Sigma(d) - \Sigma(b)}{\Sigma(a) - \Sigma(c)} = e^{-\lambda}, \tag{31}$$

et Q par l'équation

$$\begin{cases} KQ(1+e^{-\lambda})(2n-1) \\ \quad = \Sigma_n(a-b-c+d)(1+e^{-2\lambda}) - (a_1 - b_1) - (d_n - c_n)e^{-2\lambda}. \end{cases} \tag{32}$$

Les mouvements de l'aimant dans la méthode de recul sont représentés graphiquement par la *fig.* 63, dont les abscisses figurent le

Fig. 63.



temps, et les ordonnées les déviations de l'aimant (*voir* § 760).

Méthode de multiplication.

751. Si nous envoyons le courant instantané chaque fois que l'aimant passe par le point zéro et si nous accroissons ainsi chaque fois la vitesse de l'aimant, 0_1, 0_2, ... étant les élongations successives, on

aura

$$\theta_2 = -KQ - e^{-\lambda}\theta_1, \tag{33}$$

$$\theta_3 = -KQ - e^{-\lambda}\theta_2. \tag{34}$$

La valeur limite vers laquelle tend l'élongation, après un grand nombre d'oscillations, s'obtient en posant $\theta_n = -\theta_{n-1}$, d'où nous tirons

$$\theta = \pm \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} KQ. \tag{35}$$

Si λ est petit, la valeur de l'élongation finale peut devenir grande; mais cela suppose une expérience prolongée pendant longtemps et une détermination exacte de λ, car une petite erreur sur λ introduit une erreur considérable sur la détermination de Q. Aussi cette méthode est-elle rarement employée en vue de déterminations numériques : on la réserve pour faire ressortir l'existence ou la non-existence de courants trop faibles pour être observés directement.

Dans toutes les expériences où l'on fait agir des courants instantanés sur l'aiguille d'un galvanomètre, il est essentiel que la totalité du courant passe pendant que la distance de l'aimant à son zéro est encore une fraction minime de l'élongation totale. La durée d'oscillation doit donc être grande relativement au temps nécessaire pour produire le courant, et l'opérateur doit suivre de l'œil le mouvement de l'aimant, de façon à saisir, pour envoyer le courant, le moment où l'aimant passe par sa position d'équilibre.

Si l'opérateur manque à envoyer le courant au moment convenable, il s'introduit une erreur. Pour évaluer cette erreur, observons que l'effet d'une force pour accroître l'élongation varie proportionnellement à

$$e^{\varphi \tan\beta} \cos(\varphi + \beta);$$

cet effet est donc maximum pour $\varphi = 0$. Donc, si l'on n'envoie pas le courant au moment voulu, cette erreur conduira toujours à une évaluation trop faible, et la grandeur de l'erreur commise peut s'évaluer en comparant à l'unité le cosinus de la phase de l'oscillation au moment du passage du courant.

CHAPITRE XVII.

COMPARAISON DES BOBINES.

Détermination expérimentale des constantes électriques d'une bobine.

752. Nous avons vu, au § 717, que, dans un galvanomètre sensible, les bobines doivent avoir un petit rayon et renfermer un grand nombre de spires. Il serait très difficile de déterminer les constantes électriques d'une pareille bobine par la mesure directe de sa forme et de ses dimensions, et cela, lors même que l'on pourrait atteindre chaque spire pour la mesurer; mais, en fait, non seulement le plus grand nombre des spires sont complètement cachées par les spires extérieures, mais encore nous ne savons pas si la pression des spires extérieures n'a pas modifié la forme des spires intérieures après l'enroulement.

Dès lors, il vaut mieux déterminer les constantes électriques de la bobine, par comparaison électrique directe avec une bobine étalon dont les constantes sont connues.

Les dimensions de la bobine étalon devant être déterminées par des mesures directes, on doit lui donner une taille considérable, afin que l'erreur inévitable sur la mesure de la circonférence ou du diamètre soit aussi petite que possible relativement à la quantité mesurée. Le cadre sur lequel est enroulé le fil doit avoir une section rectangulaire, et les dimensions de cette section doivent être petites relativement au diamètre de la bobine : c'est là une condition nécessaire, non pas tant pour réduire la correction relative aux dimensions de la section, que pour ôter toute incertitude sur la position des spires qui sont cachées par les spires extérieures (1).

(1) On a fait quelquefois de grands galvanomètres des tangentes avec un seul anneau conducteur, de forme circulaire, très épais, et assez raide pour garder sa forme sans être appuyé par aucun support. Ce n'est point une bonne disposition pour un instrument étalon. La distribution du courant dans le conducteur dépend de la conductibilité relative des différentes parties. Ainsi, une soufflure cachée dans la masse du métal peut faire que la plus grande partie du courant soit ramenée vers le bord intérieur ou le bord extérieur de l'anneau circulaire. Par suite, le véritable chemin suivi par l'électricité devient incertain. En outre, si le courant ne circule qu'une seule fois autour du cercle, il faut des soins tout particuliers pour obtenir que l'aimant suspendu ne subisse aucune influence du cou-

Les principales constantes que nous avons à déterminer sont :

1° La force magnétique développée au centre de la bobine par l'unité de courant : c'est la quantité que l'on a désignée par G_1 au § 700;

2° Le moment magnétique de la bobine pour l'unité du courant : c'est la quantité g_1.

Détermination de G_1.

753. Puisque les bobines du galvanomètre dont on se sert sont bien plus petites que la bobine étalon, plaçons le galvanomètre dans la bobine étalon, de façon que les centres coïncident et que les plans des deux bobines soient verticaux et parallèles à la force magnétique terrestre : nous formons ainsi un galvanomètre différentiel, dont l'une des bobines est la bobine étalon, pour laquelle la valeur de G_1 est connue, tandis que ce que nous avons à déterminer est précisément la valeur de G'_1 relative à l'autre bobine.

L'aimant suspendu au centre du galvanomètre est soumis à l'action des courants qui traversent les deux bobines. Si les intensités sont γ dans la bobine étalon et γ' dans la bobine du galvanomètre, et si ces courants, circulant en sens opposés, produisent la déviation δ de l'aimant,

$$(1) \qquad H \tang \delta = G'_1 \gamma' - G_1 \gamma,$$

H étant la composante horizontale de la force magnétique terrestre.

Si l'on règle les courants de façon qu'il ne se produise point de déviation, nous trouverons G'_1 par l'équation

$$(2) \qquad G'_1 = \frac{\gamma}{\gamma'} G_1.$$

On peut s'y prendre de différentes manières pour déterminer le rapport de γ à γ'. Puisque la valeur de G_1 est généralement moins grande pour la bobine étalon que pour le galvanomètre, on peut disposer le circuit de façon que le courant total γ traverse la bobine étalon, puis

---

rant, dans son trajet d'aller vers le cercle ou de retour : car le courant qui traverse les électrodes est le même qui traverse le cercle. Dans la construction de bien des instruments on semble avoir complètement perdu de vue l'action de cette partie du courant. La meilleure disposition consiste à faire une des électrodes en forme de tube métallique; l'autre, en forme de fil métallique recouvert d'une matière isolante et placé intérieurement et concentriquement au tube. L'action d'électrodes ainsi disposées sur des points extérieurs est nulle, d'après le § 683.

qu'il se divise; qu'une partie seulement γ' traverse le galvanomètre et des bobines de résistance, formant une résistance d'ensemble R_1, tandis que l'autre partie $\gamma - \gamma'$ traverse une autre série de bobines de résistance totale R_2.

Nous avons alors, par le § 276,

$$\gamma' R_1 = (\gamma - \gamma') R_2 \tag{3}$$

ou

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}, \tag{4}$$

et

$$G'_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} G_1. \tag{5}$$

S'il y a quelque incertitude sur la résistance du galvanomètre (par exemple, en raison de quelque incertitude sur sa température), on peut lui ajouter des bobines de résistance, de façon que la résistance du galvanomètre lui-même ne forme plus qu'une faible partie de R_1, et ainsi n'introduise que peu d'incertitude dans le résultat définitif.

Détermination de g_1.

754. g_1 est le moment magnétique de la petite bobine lorsqu'elle est traversée par l'unité du courant. On suspend encore l'aimant au centre de la bobine étalon, puis on déplace la petite bobine parallèlement à elle-même le long de l'axe commun aux deux bobines, jusqu'à ce que le même courant, circulant en sens inverse dans les deux bobines, n'agisse plus sur l'aimant. Si r est la distance des centres des bobines, on a alors

$$G_1 = 2\frac{g_1}{r^3} + 3\frac{g_2}{r^4} + 4\frac{g_3}{r^5} + \dots. \tag{6}$$

En répétant l'expérience, la petite bobine étant placée de l'autre côté de la bobine étalon, et en mesurant la distance qui sépare les deux positions occupées par la petite bobine, on élimine l'erreur dépendant de l'incertitude sur la position des centres de l'aimant et de la petite bobine, et l'on se débarrasse des termes en $g_2, g_4, \dots$.

Si la bobine étalon est disposée de façon que l'on puisse envoyer le courant dans la moitié des spires seulement, de manière à donner à G_1 une valeur différente, on peut déterminer une nouvelle valeur de r et éliminer ainsi, comme au § 454, le terme qui renferme g_3.

Mais, souvent aussi, des mesures directes sur la petite bobine per-

mettent de déterminer la valeur de g_2 avec assez de précision pour qu'on puisse employer dans le calcul la correction à appliquer à g_1 dans l'équation

$$g_1 = \tfrac{1}{2} G_1 r^2 - 2 \frac{g_2}{r^2}, \tag{7}$$

où

$$g_2 = -\tfrac{1}{8}\pi a^2 (6a^2 + 3\zeta^2 - 2\eta^2),$$

d'après le § 700.

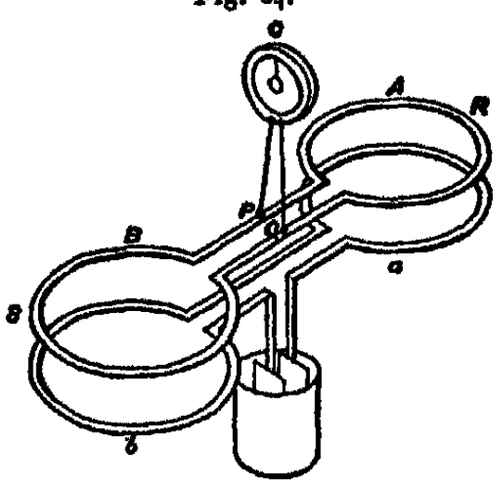
Comparaison des coefficients d'induction.

755. C'est seulement dans un petit nombre de cas que l'on peut, sans trop de difficultés, calculer directement les coefficients d'induction, d'après la forme et la position des circuits. En effet, pour que l'on obtienne un degré de précision suffisant, il faut que l'on puisse mesurer exactement la distance des circuits. Mais, si la distance des circuits est assez grande pour que les erreurs de mesure n'introduisent pas de graves erreurs dans les résultats, la grandeur du coefficient d'induction lui-même est forcément très réduite. Or, dans un grand nombre d'expériences, il est nécessaire de rendre le coefficient d'induction considérable, ce que l'on ne peut obtenir qu'en rapprochant les circuits, et ce qui, par conséquent, rend inapplicable la méthode de mesure directe. Alors, pour déterminer le coefficient d'induction, il faut le comparer à celui d'un couple de bobines disposées de façon que leur coefficient puisse être obtenu par des mesures directes et par le calcul.

C'est ce que l'on peut réaliser de la manière suivante :

Soient A et *a* les bobines étalons; B et *b* les bobines à leur com-

Fig. 64.



parer. Relions A et B dans un seul circuit, et mettons les électrodes

d'un galvanomètre G en P et Q, de façon que la résistance de PAQ soit R, et celle de QBP soit S, K étant la résistance du galvanomètre. Relions a et b dans un même circuit renfermant la pile.

Soient

$\dot{x}$ le courant dans A;
$\dot{y}$ le courant dans B;
$\dot{x}-\dot{y}$ le courant dans le galvanomètre;
γ étant le courant dans le circuit de la pile.

Alors, si M_1 est le coefficient d'induction entre A et a, M_2 le coefficient entre B et b, le courant d'induction total qui traverse le galvanomètre au moment où l'on rompt le circuit de pile est

$$x-y=\gamma\,\frac{\frac{M_2}{S}-\frac{M_1}{R}}{1+\frac{K}{R}+\frac{K}{S}}. \tag{8}$$

En réglant les résistances R et S jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de courant dans le galvanomètre quand on établit le circuit de pile ou qu'on le rompt, on pourra déduire le rapport de M_2 à M_1 du rapport mesuré de S à R.

(1) [La formule (8) peut se démontrer comme il suit :

Soient L_1, L_2, N et Γ les coefficients de self-induction des bobines A, B, ab et du galvanomètre. L'énergie cinétique du système est, approximativement,

$$\tfrac{1}{2}L_1\dot{x}^2+\tfrac{1}{2}L_2\dot{y}^2+\tfrac{1}{2}\Gamma(\dot{x}-\dot{y})^2+\tfrac{1}{2}N\gamma^2+M_1\dot{x}\gamma+M_2\dot{y}\gamma.$$

La fonction de dissipation F, qui exprime la proportion de l'énergie des courants perdue en échauffement des bobines, est (voir *Théorie du son*, de lord Rayleigh, p. 78, vol. I)

$$\tfrac{1}{2}\dot{x}^2R+\tfrac{1}{2}\dot{y}^2S+\tfrac{1}{2}(\dot{x}-\dot{y})^2K+\tfrac{1}{2}\gamma^2Q,$$

Q étant la résistance de la pile et des bobines placées dans son circuit.

L'équation des courants, relative à une variable quelconque x, est

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=\xi,$$

où ξ est la force électromotrice correspondante.

---

(1) L'étude comprise entre crochets et tirée de notes prises par M. Fleming au cours du professeur Clerk Maxwell possède un triste intérêt : elle fait partie de la dernière Leçon qu'ait faite le professeur. Sur les notes de M. Fleming, la disposition de l'expérience diffère de celle qui est donnée dans le texte en ce que les positions de la pile et du galvanomètre sont échangées.

Nous avons donc

$$L_1\ddot{x} + \Gamma(\ddot{x} - \ddot{y}) + M_1\dot{\gamma} + R\dot{x} + K(\dot{x} - \dot{y}) = 0,$$
$$L_2\ddot{y} - \Gamma(\ddot{x} - \ddot{y}) + M_2\dot{\gamma} + S\dot{y} - K(\dot{x} - \dot{y}) = 0.$$

Ces équations peuvent être immédiatement intégrées par rapport à t. Remarquant qu'à l'origine $x, \dot{x}, y, \dot{y}$ et γ sont nuls, et posant $x - y = z$, nous avons, en éliminant y, une équation de la forme

$$(8') \qquad A\ddot{z} + B\dot{z} + Cz = D\dot{\gamma} + E\gamma.$$

Très peu de temps après qu'on a donné le contact de pile, le courant γ devient constant et le courant $\dot{z}$ s'éteint; d'où

$$Cz = E\gamma;$$

ce qui donne l'expression (8) indiquée plus haut, et ce qui montre que, quand la quantité totale d'électricité qui traverse le galvanomètre est nulle, nous devons avoir $E = 0$ ou $M_2R - M_1S = 0$. L'équation (8') montre aussi que, s'il n'y a point de courant dans le galvanomètre, nous devons aussi avoir

$$D = 0 \quad \text{ou} \quad M_2L_1 - M_1L_2 = 0 \quad (^1).$$

Comparaison d'un coefficient de self-induction avec un coefficient d'induction mutuelle.

756. Dans la branche AF d'un pont de Wheatstone, introduisons la bobine dont nous voulons connaître le coefficient de self-induction L.

Sur le fil qui relie A à la pile, mettons une autre bobine; le coeffi-

---

(1) [En intégrant par rapport au temps ces équations, et désignant par X_1, Y_1 et γ_0 les valeurs de x_1, y_1 et γ pour t infini, époque à laquelle $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{\gamma}$ sont nuls, comme pour $t = 0$, on a

$$M_1\gamma_0 + RX + K(X - Y) = 0,$$
$$M_2\gamma_0 + SY - K(X - Y) = 0;$$

d'où l'on déduit l'équation (8) et la condition $SM_1 = RM_2$ pour que l'impulsion de l'aiguille du galvanomètre, supposé à longue période, soit nulle. La condition $M_1L_2 = M_2L_1$ n'est nécessaire que si l'on s'impose la condition $z = 0$ à tout instant. Les équations différentielles peuvent s'obtenir immédiatement en écrivant, pour les deux contours fermés comprenant le galvanomètre et chacune des bobines, les formules dites de Kirchhoff, ou écrivant pour chaque conducteur les équations du § 280, comme le fait Maxwell dans les exemples suivants.] (P.)

cient d'induction mutuelle de cette bobine et de la bobine AF est M et peut se mesurer par la méthode décrite au § 755.

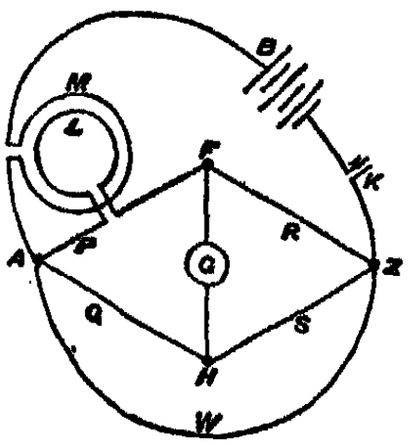
Si x est le courant qui va de A à F, y celui qui va de A à H, celui qui va de Z à A par B sera $x + y$. La force électromotrice extérieure agissant de A vers F est

$$A - F = Px + L\frac{dx}{dt} + M\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right). \tag{9}$$

La force électromotrice extérieure agissant suivant AH est

$$A - H = Qy. \tag{10}$$

Fig. 65.



Si le galvanomètre placé entre H et F n'accuse aucun courant, ni permanent ni instantané, $H - F = 0$; et alors, d'après (9) et (10),

$$Px = Qy, \tag{11}$$

$$L\frac{dx}{dt} + M\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 0, \tag{12}$$

d'où

$$L = -\left(1 + \frac{P}{Q}\right)M. \tag{13}$$

Puisque L est toujours positif, M doit être négatif, et le courant doit circuler en sens contraires dans les bobines placées en P et en B. Quand on fait l'expérience, on peut commencer par régler les résistances, de façon que

$$PS = QR, \tag{14}$$

ce qui est la condition pour qu'il n'y ait point de courant permanent; ensuite, on règle la distance de la bobine de façon que le galvano-

mètre cesse d'indiquer un courant instantané lorsqu'on établit ou qu'on coupe le contact de pile; si l'on ne peut régler cette distance, on peut faire disparaître ces courants instantanés en changeant les résistances Q et S, le rapport de Q à S restant toujours constant.

Si l'on trouve ce double réglage trop difficile, on peut employer une troisième méthode. On commence par s'arranger de façon que le courant dû à la self-induction soit un peu supérieur à celui qui est dû à l'induction mutuelle, et l'on fait disparaître cette inégalité en introduisant, entre A et Z, un conducteur de résistance W. L'introduction de W ne change en rien la condition qui doit être remplie pour qu'il ne passe point de courant permanent dans le galvanomètre. Nous pouvons donc faire disparaître les courants instantanés en réglant la résistance de W seulement. Cela fait, la valeur de L est

$$L = -\left(1 + \frac{P}{Q} + \frac{P + R}{W}\right) M. \tag{15}$$

Comparaison des coefficients de self-induction de deux bobines.

757. Mettons les deux bobines dans les branches adjacentes d'un pont de Wheatstone. Soient L et N les coefficients de self-induction des bobines mises dans les branches P et R : la condition pour qu'il n'y ait point de courant dans le galvanomètre est

$$\left(Px + L\frac{dx}{dt}\right)Sy = Qy\left(Rx + N\frac{dx}{dt}\right), \tag{16}$$

d'où

$$PS = RQ \quad \text{pour les courants permanents,} \tag{17}$$

et

$$\frac{L}{P} = \frac{N}{R} \quad \text{pour les courants instantanés.} \tag{18}$$

Donc, en réglant convenablement les résistances, on peut faire disparaître et les courants permanents et les courants instantanés, et alors le rapport de L à N peut être déterminé par une comparaison de résistances.

CHAPITRE XVIII.

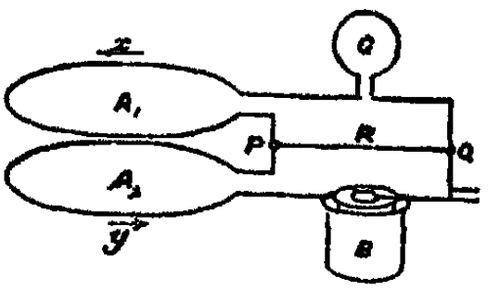
UNITÉ ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE RÉSISTANCE.

Détermination de la résistance d'une bobine en mesure électromagnétique.

758. Par définition, la résistance d'un conducteur est le rapport de la valeur numérique de la force électromotrice à la valeur numérique du courant produit dans le conducteur. La valeur numérique d'un courant peut être déterminée en mesure électromagnétique, au moyen d'un galvanomètre étalon, quand on connaît la valeur de la force magnétique terrestre. Il est plus difficile de déterminer la valeur de la force électromotrice; car le seul cas où nous puissions calculer directement sa valeur est celui où elle est due au mouvement d'un circuit relativement à un système magnétique connu.

759. La première détermination de la résistance d'un fil métallique, en mesure électromagnétique, est due à Kirchhoff (1). Il employait deux bobines de forme connue, A_1 et A_2, et calculait leur coefficient

Fig. 66.



d'induction mutuelle d'après leurs éléments géométriques de forme et de position. Ces bobines étaient mises en circuit avec un galvanomètre G et une pile B; deux points du circuit, P pris entre les bobines, et Q situé entre la pile et le galvanomètre, étaient reliés par le fil dont on voulait mesurer la résistance R.

(1) *Bestimmung der Constanten von welcher die Intensität inducirter elektrischer Ströme abhängt.* (*Pogg. Ann.*, LXXVI, avril 1849.)

Lorsque le courant a pris son régime permanent, il se partage entre le fil et le circuit du galvanomètre et produit une certaine déviation permanente du galvanomètre. Si alors on éloigne rapidement la bobine A_1 et qu'on l'amène dans une position pour laquelle le coefficient d'induction mutuelle de A_1 et A_2 est zéro (§ 538), il se produira, dans les deux circuits, un courant d'induction, et l'aiguille du galvanomètre recevra une impulsion qui produit une certaine déviation passagère.

Comparant la déviation permanente due au courant permanent, et la déviation instantanée due au courant d'induction, on déduit la résistance R du fil.

Soient

K la résistance de QGA_1P;
B celle de PA_2BQ;
R celle de PQ;
L, M, N les coefficients d'induction de A_1 et A_2:
$\dot{x}$ le courant dans G;
$\dot{y}$ le courant dans B;
$\dot{x} - \dot{y}$ le courant qui va de P vers Q;
E la force électromotrice de la pile;

on a

$$(1) \qquad (K+R)\dot{x} - R\dot{y} + \frac{d}{dt}(L\dot{x} + M\dot{y}) = 0,$$

$$(2) \qquad -R\dot{x} + (R+B)\dot{y} + \frac{d}{dt}(M\dot{x} + N\dot{y}) = E.$$

Quand les courants sont constants et les parties du circuit en repos,

$$(3) \qquad (K+R)\dot{x} - R\dot{y} = 0.$$

Si M devient subitement nul, par suite du déplacement de A_1 et de A_2, on a, en intégrant par rapport à t,

$$(4) \qquad (K+R)x - Ry - M\dot{y} = 0.$$

$$(5) \qquad -Rx + (R+B)y - M\dot{x} = \int E\,dt = 0,$$

d'où

$$(6) \qquad x = M\frac{(B+R)\dot{y} + R\dot{x}}{(B+R)(K+R) - R^2}.$$

Substituant la valeur de y en fonction de x, tirée de (3), on trouve

$$\frac{x}{\dot{x}} = \frac{M}{R}\frac{(B+R)(K+R)+R^2}{(B+R)(K+R)-R^2}, \tag{7}$$

$$= \frac{M}{R}\left[1+\frac{2R^2}{(B+R)(K+R)}+\cdots\right]. \tag{8}$$

Si, comme dans l'expérience de Kirchhoff, B et K sont grands relativement à R, cette équation se réduit à

$$\frac{x}{\dot{x}} = \frac{M}{R}.$$

De ces quantités, x est connu par l'impulsion du galvanomètre due au courant d'induction (*voir* § 748); l'intensité permanente $\dot{x}$ se déduit de la déviation permanente due au courant de régime (*voir* § 746); M s'obtient soit par un calcul direct au moyen de données géométriques, soit par comparaison avec une paire de bobines pour lesquelles ce calcul a été fait (*voir* § 755); et avec ces trois quantités on peut déterminer R en mesure électromagnétique.

Cette méthode suppose que l'on a déterminé la période d'oscillations de l'aimant du galvanomètre et le décroissement logarithmique de ses oscillations.

Méthode de Weber (1) pour les courants instantanés.

760. Une bobine de grandes dimensions est montée sur un axe et peut tourner autour d'un diamètre vertical. Le fil de cette bobine est relié à celui d'un galvanomètre des tangentes, de manière à ne former qu'un seul circuit. Soit R la résistance de ce circuit. Plaçons cette grande bobine sa face positive perpendiculaire au méridien magnétique, et faisons-la tourner rapidement d'une demi-révolution. Il y aura un courant induit dû à la force magnétique terrestre, et la quantité totale d'électricité transmise par ce courant sera, en mesure électromagnétique,

$$Q = \frac{2g_1 H}{R}, \tag{1}$$

où g_1 est le moment magnétique de la bobine pour l'unité de courant. Dans le cas d'une grande bobine, cet élément peut se déterminer directement, en mesurant les dimensions de la bobine et en calculant

(1) *Elekt. Maasb.*, et *Pogg. Ann.*, LXXXII, p. 337; 1851.

la somme des aires de ses spires. H est la composante horizontale de la force magnétique terrestre, et R est la résistance du circuit formé par la bobine et le galvanomètre. Le courant produit met en mouvement l'aimant du galvanomètre.

Si l'aimant est primitivement en repos et si le mouvement de la bobine ne dure qu'une faible fraction de la période d'oscillation du galvanomètre, nous avons, en négligeant la résistance au mouvement de l'aimant (§ 748),

$$(2) \qquad Q = \frac{H}{G}\frac{T}{\pi} 2 \sin \tfrac{1}{2}\theta,$$

où G est la constante du galvanomètre, T la période d'oscillation, et θ l'élongation observée.

De cette équation, on tire

$$(3) \qquad R = \pi G g_1 \frac{I}{T \sin \frac{1}{2}\theta}.$$

La valeur de H n'apparaît pas dans ce résultat, à condition qu'elle soit la même au lieu où se trouve la bobine et à celui où est le galvanomètre; et c'est ce que l'on ne doit point admettre, mais bien vérifier en observant aux deux endroits successivement la durée des oscillations du même aimant.

761. Pour faire une série d'observations, Weber commençait par placer la bobine parallèlement au méridien magnétique; puis il faisait tourner la face positive vers le nord et observait la première élongation due au courant négatif, puis la deuxième élongation de l'aimant oscillant librement, et, au moment où l'aimant repassait par sa position d'équilibre, il faisait tourner la bobine, la face positive au sud. Ce faisant, l'aimant revenait du côté positif, et la série se continuait comme au § 750 : les résultats étaient corrigés de la résistance. De cette façon, on déterminait la résistance du circuit total, comprenant la bobine et le galvanomètre.

Dans toutes ces expériences, pour obtenir des déviations suffisamment grandes, il faut employer un fil de cuivre; mais ce métal, s'il est le meilleur conducteur, a le désavantage que sa résistance varie beaucoup par les changements de température. Or il est bien difficile de déterminer la température de toutes les parties de l'appareil. Par suite, pour tirer de semblables expériences un résultat ayant une valeur permanente, il est nécessaire de comparer, avant et après chaque expérience, la résistance du circuit des appareils à celle d'une bobine de résistance soigneusement construite.

Méthode de Weber, par l'observation du décroissement des oscillations d'un aimant.

762. Un aimant, ayant un moment magnétique considérable, est suspendu au centre de la bobine d'un galvanomètre. On observe la période et le décroissement logarithmique des oscillations, d'abord lorsque le circuit du galvanomètre est ouvert, et ensuite lorsque ce circuit est fermé, et l'on déduit la conductibilité du galvanomètre de l'effet que les courants induits par le mouvement de l'aimant ont pour contrarier ce mouvement.

Soient T la durée observée d'une oscillation simple, λ le décroissement logarithmique népérien pour chaque oscillation simple. Si nous posons

$$\omega = \frac{\pi}{T} \tag{1}$$

et

$$\varkappa = \frac{\lambda}{T}, \tag{2}$$

l'équation du mouvement de l'aimant est de la forme

$$\varphi = Ce^{-\varkappa t}\cos(\omega t + \beta). \tag{3}$$

Cette expression représente le mouvement, tel que l'observation nous le montre : nous allons la comparer avec l'équation dynamique du mouvement.

Soit M le coefficient d'induction relatif à la bobine du galvanomètre et à l'aimant suspendu. Il est de la forme

$$M = G_1 g_1 P_1(\theta) + G_2 g_2 P_2(\theta) + \ldots, \tag{4}$$

où $G_1, G_2, \ldots$ sont les coefficients relatifs à la bobine; $g_1, g_2, \ldots$ les coefficients relatifs à l'aimant, et $P_1(\theta), P_2(\theta), \ldots$ des harmoniques zonaux de l'angle compris entre l'axe de la bobine et celui de l'aimant. (*Voir* § 700.)

En disposant convenablement les bobines du galvanomètre et en formant l'aimant suspendu d'une série d'aimants placés les uns à côté des autres, à des distances convenables, on peut rendre négligeables devant le premier tous les termes suivants de M. Si nous posons aussi $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, nous pouvons écrire

$$M = Gm\sin\varphi, \tag{5}$$

où G est le coefficient principal du galvanomètre; m le moment ma-

gnétique de l'aimant; φ l'angle compris entre l'axe de l'aimant et le plan de la bobine, angle qui, dans ces expériences, est toujours petit.

Si L est le coefficient de self-induction de la bobine, R sa résistance, γ le courant qui la traverse, on a

$$\frac{d}{dt}(L\gamma + M) + R\gamma = 0 \tag{6}$$

ou bien

$$L\frac{d\gamma}{dt} + R\gamma + Gm\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = 0. \tag{7}$$

Le moment de la force avec laquelle le courant γ agit sur l'aimant est $\gamma\frac{dM}{d\varphi}$ ou $Gm\gamma\cos\varphi$. L'angle φ est si petit dans ces expériences, qu'on peut supposer $\cos\varphi = 1$.

Supposons que l'équation du mouvement de l'aimant, quand le circuit est fermé, soit

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} + B\frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = 0, \tag{8}$$

où A est le moment d'inertie du système suspendu; $\frac{Bd\varphi}{dt}$ représente la résistance due à la viscosité de l'air et du fil de suspension, etc., et $C\varphi$ exprime le moment de la force due au magnétisme terrestre, à la torsion du système de suspension, etc., laquelle tend à ramener l'aimant à sa position d'équilibre.

L'équation du mouvement, modifié par le courant, sera

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} + B\frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = Gm\gamma. \tag{9}$$

Pour déterminer le mouvement de l'aimant, nous devons combiner cette équation avec l'équation (7) et éliminer γ. Le résultat est

$$\left(L\frac{d}{dt} + R\right)\left(A\frac{d^2}{dt^2} + B\frac{d}{dt} + C\right)\varphi + G^2m^2\frac{d\varphi}{dt} = 0, \tag{10}$$

équation différentielle linéaire du troisième ordre. Mais nous n'avons pas lieu de résoudre cette équation; car les données du problème sont les éléments observés du mouvement de l'aimant, et c'est d'après eux que nous devons déterminer R.

Soient α_0 et ω_0 les valeurs de α et ω de l'équation (3), lorsque le circuit est rompu. Dans ce cas, R est infini et l'équation se réduit à la forme (8). On trouve ainsi

$$B = 2A\alpha_0, \qquad C = A(\alpha_0^2 + \omega_0^2). \tag{11}$$

Résolvant l'équation (10) par rapport à R et posant

$$\frac{d}{dt} = -(\alpha + i\omega) \quad \text{où} \quad i = \sqrt{-1}, \tag{12}$$

nous avons

$$R = \frac{G^2 m^2}{A} \frac{\alpha + i\omega}{\alpha^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega - 2\alpha_0(\alpha + i\omega) + \alpha_0^2 - \omega_0^2} + L(\alpha + i\omega). \tag{13}$$

Comme la valeur de ω est, en général, bien plus grande que celle de α, la meilleure valeur de R s'obtiendra en égalant les termes en $i\omega$.

$$R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + \frac{1}{2} L\left(3\alpha - \alpha_0 - \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha - \alpha_0}\right). \tag{14}$$

On peut aussi obtenir une valeur de R en égalant les termes qui ne renferment pas i; mais, comme ces termes sont petits, cette équation ne peut guère servir qu'à vérifier l'exactitude des observations. De ces équations, nous tirons la suivante comme vérification :

$$\begin{cases} G^2 m^2 (\alpha^2 + \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2) \\ \quad = LA[(\alpha - \alpha_0)^2 + 2(\alpha - \alpha_0)^2(\omega + \omega_0)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2]. \end{cases} \tag{15}$$

Puisque $LA - \omega^2$ est petit relativement à $G^2 m^2$, cette équation donne

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \alpha_0^2 - \alpha^2, \tag{16}$$

et l'équation (14) peut s'écrire

$$R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + 2L\alpha. \tag{17}$$

Dans cette expression, on peut déterminer G par la mesure des dimensions linéaires de la bobine du galvanomètre ou, même encore, par comparaison avec une bobine étalon, suivant la méthode indiquée au § 753. A est le moment d'inertie de l'aimant et du système de suspension, et doit être déterminé par la méthode dynamique convenable : ω, ω_0, α et α_0 sont fournis par l'observation.

La partie la plus difficile de cette étude est la détermination du moment magnétique m de l'aimant suspendu, parce qu'il dépend de la température, de la force magnétique terrestre et des efforts mécaniques. On doit donc avoir grand soin que, au moment où l'on mesure cette quantité, l'aimant soit dans les mêmes conditions que quand il oscille.

Le second terme de R, qui contient L, a généralement moins d'importance; car il est généralement petit, relativement au premier. La valeur de L peut se déterminer par le calcul, d'après la forme connue

de la bobine, ou par une expérience sur l'extra-courant d'induction. (*Voir* le § 756.) (1).

Méthode de Thomson par la bobine tournante.

763. Cette méthode a été proposée, par Sir W. Thomson, au Comité des Unités électriques de l'Association britannique, et les expériences furent faites, en 1863, par MM. Balfour Stewart, Fleeming Jenkin et Clerk Maxwell (2).

Une bobine circulaire tourne, avec une vitesse uniforme, autour d'un axe vertical. Un petit aimant est suspendu par un fil de soie au centre de la bobine. Un courant électrique est induit dans la bobine par le magnétisme terrestre, ainsi que par l'aimant suspendu. Ce courant est périodique et circule, en sens contraire, dans le fil de la bobine, aux différentes époques de sa révolution; mais son effet sur l'aimant suspendu est de le dévier du méridien magnétique, dans le sens de la rotation de la bobine.

764. Soient

H la composante horizontale du magnétisme terrestre;
γ l'intensité du courant dans la bobine;
g l'aire totale comprise dans toutes les spires du fil;
G la force magnétique produite au centre de la bobine par l'unité de courant;
L le coefficient de self-induction de la bobine;
M le moment magnétique de l'aimant suspendu;
θ l'angle du plan de la bobine et du méridien magnétique;
φ l'angle de l'axe de l'aimant suspendu et du méridien magnétique;
A le moment d'inertie de l'aimant suspendu;
$MH\tau$ le coefficient de torsion du fil de suspension;
α l'azimut de l'aimant quand il n'y a pas de torsion;
R la résistance de la bobine.

L'énergie cinétique du système est

$$(1)\qquad T = \tfrac{1}{2} L\gamma^2 - Hg\gamma \sin\theta - MG\gamma \sin(\theta - \varphi) + MH\cos\varphi + \tfrac{1}{2} A\dot{\varphi}^2.$$

---

(1) [On néglige ainsi les effets dus aux courants induits qui se développent dans l'aimant par suite de son mouvement, et l'action de la terre sur l'aimantation transversale produite par les courants induits.] (P.)

(2) Voir *Report of the British Association*, pour 1863.

Le premier terme, $\frac{1}{2}L\gamma^2$, exprime l'énergie du courant, en tant qu'elle dépend de la bobine elle-même; le deuxième dépend de l'action réciproque du courant et du magnétisme terrestre; le troisième, de l'action réciproque du courant et du magnétisme de l'aimant suspendu; le quatrième, de l'action réciproque de l'aimant suspendu et du magnétisme terrestre, et le dernier représente l'énergie cinétique de la matière qui forme l'aimant et le système de suspension mobile avec lui.

L'énergie potentielle du système suspendu, due à la torsion du fil, est

$$V = \frac{MH}{2}\tau(\varphi^2 - 2\varphi\alpha). \tag{2}$$

La quantité de mouvement électromagnétique du courant est

$$p = \frac{dT}{d\gamma} = L\gamma - Hg\sin\theta - MG\sin(\theta - \varphi), \tag{3}$$

et, si R est la résistance de la bobine, l'équation du courant est

$$R\gamma + \frac{d^2T}{dt\,d\gamma} = 0 \tag{4}$$

ou bien, puisque

$$\theta = \omega t, \tag{5}$$

$$\left(R + L\frac{d}{dt}\right)\gamma = Hg\omega\cos\theta + MG(\omega - \phi)\cos(\theta - \varphi). \tag{6}$$

765. C'est un résultat de la théorie aussi bien que de l'expérience, que l'azimut φ de l'aimant est soumis à deux sortes de variations périodiques. L'une de ces oscillations s'effectue librement; sa durée dépend de l'intensité du magnétisme terrestre et, dans les expériences faites, elle était de plusieurs secondes. L'autre est une oscillation forcée, dont la période est la moitié de la période de révolution de la bobine; son amplitude est, ainsi qu'on le verra, très faible. On peut donc, dans la détermination de γ, considérer φ comme sensiblement constant.

On trouve ainsi

$$\gamma = \frac{HG\omega}{R^2 + L^2\omega^2}(R\cos\theta + L\omega\sin\theta), \tag{7}$$

$$+ \frac{MG\omega}{R^2 + L^2\omega^2}[R\cos(\theta - \varphi) + L\omega\sin(\theta - \varphi)], \tag{8}$$

$$+ Ce^{-\frac{R}{L}t}. \tag{9}$$

Le dernier terme de cette expression disparaît bientôt, si l'on maintient la rotation uniforme.

L'équation du mouvement de l'aimant suspendu est

$$\frac{d^2T}{dt\,d\dot{\varphi}} - \frac{dT}{d\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0; \tag{10}$$

d'où

$$A\ddot{\varphi} - MG\gamma\cos(\theta - \varphi) + MH[\sin\varphi + \tau(\varphi - \alpha)] = 0. \tag{11}$$

Substituons la valeur de γ et ordonnons les termes suivant les fonctions des multiples de θ; l'expérience nous montre que

$$\varphi = \varphi_0 + be^{-lt}\cos nt - c\cos 2(\theta - \beta), \tag{12}$$

où φ_0 est la valeur moyenne de φ; où le second terme exprime l'oscillation libre qui décroît graduellement, et où le troisième terme représente l'oscillation forcée due à la variation du courant agissant.

Commençons par les termes de (11) qui ne renferment pas θ et dont l'ensemble doit s'annuler, nous trouvons approximativement

$$\begin{cases} \dfrac{MG\omega}{R^2 + L^2\omega^2}[Hg(R\cos\varphi_0 + L\omega\sin\varphi_0) + GMR] \\ \quad = 2MH[\sin\varphi_0 + \tau(\varphi - \alpha)]. \end{cases} \tag{13}$$

Puisque $L\tan\varphi_0$ est généralement petit relativement à Gg, en résolvant l'équation quadratique (13), nous avons approximativement

$$\begin{cases} R = \dfrac{Gg\omega}{2\tan\varphi_0\left(1 + \tau\dfrac{\varphi_0 - \alpha}{\sin\varphi_0}\right)} \\ \quad \times\left[1 + \dfrac{GM}{gH}\sec\varphi_0 - \dfrac{2L}{Gg}\left(\dfrac{2L}{Gg} - 1\right)\tan^2\varphi_0\right. \\ \qquad\qquad \left. - \left(\dfrac{2L}{Gg}\right)^2\left(\dfrac{2L}{Gg} - 1\right)^2\tan^4\varphi_0\right]. \end{cases} \tag{14}$$

Si nous introduisons dans les équations (7), (8) et (11) le principal terme de cette expression, nous trouvons pour valeur de n, dans l'équation (12),

$$\sqrt{\frac{HM}{A}\sec\varphi_0}.$$

La valeur de l'amplitude forcée c est

$$\frac{1}{4}\frac{n^2}{\omega^2}\sin\varphi_0.$$

Donc, si la bobine fait un grand nombre d'évolutions pendant la durée

d'une oscillation libre de l'aimant, l'amplitude des vibrations forcées sera très petite, et nous pourrons négliger dans (11) les termes qui contiennent c.

766. La résistance se trouve ainsi déterminée en fonction de la vitesse ω et de la déviation φ. Il n'est pas nécessaire de déterminer la composante horizontale H de la force magnétique terrestre, pourvu qu'elle reste constante pendant la durée de l'expérience.

Pour déterminer $\frac{M}{H}$, on doit se servir de l'aimant suspendu pour dévier l'aimant du magnétomètre, ainsi que cela a été décrit au § 454. Dans cette expérience, M doit être petit, ce qui rend cette correction de médiocre importance.

Pour les autres corrections que comporte cette expérience, voir le *Report of the British Association* pour 1863, p. 168.

Méthode calorimétrique de Joule.

767. La chaleur développée par un courant γ qui traverse un conducteur de résistance R est, d'après la loi de Joule, § 242,

$$h = \frac{1}{J}\int R\gamma^2 dt, \tag{1}$$

où J est l'équivalent en mesure dynamique de l'unité de chaleur que l'on emploie.

Donc, si R est constant pendant l'expérience, sa valeur est

$$R = \frac{Jh}{\int \gamma^2 dt}. \tag{2}$$

Cette méthode de détermination de R suppose la détermination de la chaleur h engendrée par le courant dans l'unité de temps et celle du carré γ^2 de l'intensité du courant.

Dans les expériences de Joule (1), h était déterminé par l'élévation de température de l'eau d'un vase où était plongé le fil conducteur. On corrigeait les effets de la radiation en faisant des expériences croisées dans lesquelles aucun courant ne traversait le fil.

L'intensité du courant était mesurée par un galvanomètre des tangentes. Cette méthode suppose la détermination de l'intensité du ma-

(1) *Report of the British Association* pour 1867.

gnétisme terrestre, que l'on faisait par la méthode décrite au § 457. Ces mesures étaient aussi contrôlées au moyen de l'électrodynamomètre à poids, qui mesure directement γ^2. Mais la manière la plus directe de mesurer $\int \gamma^2 dt$ consiste à faire passer le courant dans un électrodynamomètre à indications automatiques (§ 725), avec une échelle donnant des lectures proportionnelles à γ^2, et à faire les observations à intervalles égaux; ce que l'on peut faire, à peu près, en prenant les lectures à la fin de chacune des oscillations de l'instrument pendant toute la durée de l'expérience.

CHAPITRE XIX.

COMPARAISON DES UNITÉS ÉLECTROSTATIQUES ET DES UNITÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Détermination du nombre d'unités électrostatiques contenues dans une unité électromagnétique.

768. La grandeur absolue des unités électriques dépend, dans les deux systèmes, des unités de longueur, de temps et de masse, qui ont été adoptées; la façon dont elles dépendent de ces unités n'est pas la même dans les deux systèmes; par suite, le nombre qui exprime le rapport des unités électriques est différent, suivant que l'on emploie les différentes unités de longueur et de temps.

On voit, par le Tableau des dimensions des unités, donné au § 628, que le nombre des unités électrostatiques d'électricité contenues dans une unité électromagnétique varie en raison inverse de la grandeur de l'unité de longueur, et en raison directe de la grandeur de l'unité de temps qui ont été adoptées.

Si donc on détermine une vitesse qui soit numériquement représentée par ce nombre, et qu'ensuite on vienne à adopter de nouvelles unités de longueur et de temps, le nombre qui représente cette vitesse restera, dans le nouveau système de mesures, le nombre des unités électrostatiques d'électricité contenues dans une unité électromagnétique.

Dès lors, cette vitesse, qui indique la relation des phénomènes électrostatiques et des phénomènes électromagnétiques, est une quantité naturelle de grandeur déterminée, et la mesure de cette quantité constitue l'une des plus importantes recherches de l'électricité.

Pour montrer que cette quantité que nous cherchons est bien réellement une vitesse, remarquons que, dans le cas de deux courants parallèles, l'attraction à laquelle est soumise la longueur a d'un des courants est, d'après le § 686,

$$F = 2CC' \frac{a}{b},$$

où C et C′ sont les valeurs numériques des intensités, en mesure électromagnétique, et b est la distance des conducteurs. Si nous fai-

sons $b = 2a$,

$$F = CC'.$$

Or, la quantité d'électricité transmise dans le temps t par le courant C est, en mesure électromagnétique, Ct, et, en mesure électrostatique, nCt, n étant le nombre des unités électrostatiques contenues dans une unité électromagnétique.

Supposons deux petits conducteurs chargés des quantités d'électricité que transmettent les deux courants dans le temps t, et plaçons-les à la distance r l'un de l'autre. La répulsion qui s'exerce entre eux est

$$F' = \frac{CC' n^2 t^2}{r^2}.$$

Choisissons la distance r, de façon que cette répulsion soit égale à l'attraction des deux courants,

$$\frac{CC' n^2 t^2}{r^2} = CC';$$

d'où

$$r = nt,$$

c'est-à-dire que la distance r doit croître n fois plus vite que le temps. Donc n est une vitesse dont la grandeur absolue est la même, quelles que soient les unités adoptées.

769. Pour nous former une conception physique de cette vitesse, imaginons une surface plane chargée d'électricité, à la densité superficielle électrostatique σ, et se mouvant dans son propre plan avec la vitesse v. Cette surface électrisée mobile équivaudra à une nappe de courant, dont l'intensité serait, pour chaque unité de largeur de la surface électrisée, σv en mesure électrostatique ou $\frac{1}{n}\sigma v$ en mesure électromagnétique, n étant le nombre des unités électrostatiques contenues dans l'unité électromagnétique. Si une deuxième surface plane, parallèle à la première et électrisée à la densité superficielle σ', se meut dans la même direction avec la vitesse v', elle sera équivalente à une deuxième nappe de courant.

La répulsion électrostatique entre les deux surfaces électrisées est, d'après le § 124, $2\pi\sigma\sigma'$ par unité d'aire de chacune des surfaces opposées.

L'attraction électromagnétique entre les deux courants superficiels est, d'après le § 658, $2\pi uu'$ par unité d'aire, u et u' étant les densités superficielles de deux courants en mesure électromagnétique.

Mais

$$u = \frac{1}{n}\sigma v, \qquad u' = \frac{1}{n}\sigma' v',$$

de sorte que l'attraction est

$$2\pi\sigma\sigma'\frac{vv'}{n^2}.$$

Le rapport de l'attraction à la répulsion est celui de vv' à n^2. Donc, puisque l'attraction et la répulsion sont des quantités de même espèce, n doit être une quantité de même espèce que v, c'est-à-dire une vitesse. Si nous supposons que la vitesse des deux surfaces mobiles soit *égale à n*, l'attraction sera égale à la répulsion, et il n'y aura pas d'action mécanique entre les surfaces. Donc nous pouvons définir le rapport des unités électriques comme une vitesse telle qu'il ne s'exerce point d'action mécanique entre deux surfaces électrisées se mouvant avec cette vitesse dans la même direction. Comme cette vitesse est d'environ 288000^{km} par seconde, il est impossible de réaliser l'expérience que l'on vient de décrire (1).

770. Si l'on pouvait rendre la densité électrique superficielle et la vitesse assez grande pour que la force magnétique devienne mesurable, on pourrait au moins vérifier notre hypothèse qu'un corps électrisé en mouvement est équivalent à un courant électrique.

Nous pouvons admettre (2) que, dans l'air, une surface électrisée commence à se décharger en émettant des étincelles quand la force électrique $2\pi\sigma$ atteint la valeur 130. La force magnétique, due à un courant superficiel, est $2\pi\sigma\frac{v}{n}$. En Angleterre, la force magnétique horizontale est d'environ 0,175. Donc, une surface, électrisée au plus haut degré et se mouvant à la vitesse de 100^m par seconde, agirait sur un aimant avec une force égale à $\frac{1}{1000}$ environ de la force horizontale terrestre, ce qui est une quantité mesurable. La surface électrisée pourrait être celle d'un disque non conducteur tournant dans le plan du méridien magnétique; l'aimant pourrait être placé près de la partie montante ou de la partie descendante du disque, et serait protégé de l'action électrostatique par un écran métallique. Je ne sache pas que cette expérience ait été essayée jusqu'à ce jour (3).

---

(1) [Maxwell omet de dire par rapport à quoi les deux surfaces doivent avoir cette vitesse commune.] (P.)

(2) Sir W. Thomson, *R. S. Proc.*, ou *Reprint*, Chap. XIX.

(3) [Cette expérience a été faite par Rowland (*American Journal*, 1878) et a donné des résultats conformes à l'hypothèse de Maxwell.] (P.)

I. — Comparaison des unités d'électricité.

771. Puisque le rapport de l'unité électromagnétique à l'unité électrostatique est représenté par une vitesse, nous le désignerons dorénavant par v. La première détermination numérique de cette vitesse a été faite par Weber et Kohlrausch (1).

Leur méthode consiste à mesurer une même quantité d'électricité, d'abord en mesure électrostatique, et ensuite en mesure électromagnétique.

La quantité d'électricité qu'ils mesuraient était la charge d'une bouteille de Leyde. On la mesure en unités électrostatiques, comme étant le produit de la capacité de la bouteille par la différence des potentiels de ses armatures. On détermine la capacité de la bouteille en la comparant à celle d'une sphère suspendue dans un espace libre, à une grande distance de tout autre corps. La capacité d'une pareille sphère s'exprime, en mesure électrostatique, par son rayon. Ainsi, la capacité de la bouteille peut être obtenue et exprimée comme une certaine longueur. (*Voir* § 227.)

On mesure la différence de potentiel des armatures de la bouteille en les reliant aux électrodes d'un électromètre dont les constantes avaient été déterminées avec soin : on connaît ainsi la différence de potentiel E en mesure électrostatique.

En multipliant E par la capacité c de la bouteille, la charge de la bouteille est exprimée en mesure électrostatique.

Pour mesurer cette charge en mesure électromagnétique, on décharge la bouteille à travers la bobine d'un galvanomètre. Le courant instantané agissant sur l'aimant du galvanomètre lui communique une certaine vitesse angulaire, et l'aimant s'écarte jusqu'à une certaine élongation, pour laquelle sa vitesse se trouve entièrement détruite par la résistance due au magnétisme terrestre.

Si l'on observe cette élongation extrême de l'aimant, on peut déterminer, en mesure électromagnétique, la quantité d'électricité transmise par le courant; ainsi qu'on l'a vu au § 748, la formule est

$$Q = \frac{H}{G}\frac{T}{\pi} 2 \sin \tfrac{1}{2}\theta,$$

(1) *Electrodynamische Maasbestimmungen*, et *Pogg. Ann.*, XCIX, 10 août 1856.

où Q est la quantité d'électricité en mesure électromagnétique. Nous avons donc à déterminer les quantités suivantes :

H intensité de la composante horizontale du magnétisme terrestre, (*voir* § 456);
G constante principale du galvanomètre (*voir* § 700);
T durée d'une oscillation simple de l'aimant;
θ déviation due au courant instantané.

La valeur de v, obtenue par MM. Weber et Kohlrausch, était de

$$U = 310740000^{m} \text{ par seconde.}$$

Il est difficile d'évaluer exactement la capacité de la bouteille de Leyde, en raison de la propriété des diélectriques solides appelée *absorption électrique*. La capacité apparente varie suivant le temps qui s'écoule entre l'origine de la charge ou de la décharge et l'instant où l'on mesure le potentiel : plus ce temps est long, plus grande est la valeur que l'on trouve pour la capacité de la bouteille.

Or le temps nécessaire pour obtenir une lecture à l'électromètre est grand relativement au temps pendant lequel la décharge se produit à travers le galvanomètre; par suite, l'évaluation de la décharge en mesure électrostatique est probablement trop grande, et la valeur de v que l'on en déduit est, sans doute aussi, trop grande.

II. — Expression de v sous forme de résistance.

772. Deux autres méthodes de détermination de v conduisent à exprimer sa valeur en fonction de la résistance d'un conducteur donné, résistance qui, dans le système électromagnétique, s'exprime aussi par une vitesse.

Dans la forme expérimentale adoptée par Sir W. Thomson, on fait passer un courant constant à travers un fil de grande résistance. On mesure en unités électrostatiques la force électromotrice qui détermine le passage du courant dans le fil, en reliant les bouts du fil aux électrodes d'un électromètre absolu (§ 217 et 218). L'intensité du courant dans le fil est mesurée en mesure électromagnétique, par la déviation de la bobine d'un électrodynamomètre qui est traversé par le courant § 725. Enfin, on détermine la résistance du circuit, en mesure électromagnétique, par comparaison avec une bobine ou un ohm étalon. En multipliant l'intensité du courant par cette résistance, nous obtenons, en mesure électromagnétique, la force électromotrice, et,

en comparant cette valeur à la valeur électrostatique, on obtient la valeur de v.

Cette méthode exige que l'on détermine à la fois deux forces, au moyen de l'électromètre et de l'électrodynamomètre, et ce n'est que le rapport de ces forces qui paraît dans le résultat.

773. L'auteur a employé une autre méthode dans laquelle ces forces, au lieu d'être mesurées séparément, sont directement opposées. Les bouts d'une bobine de grande résistance sont reliés à deux disques parallèles, dont l'un est mobile. La même différence de potentiels, qui détermine le courant dans la résistance, produit une attraction des disques. En même temps, un courant électrique qui, dans les expériences, était différent du courant principal, traverse, en sens contraire, deux bobines fixées au dos, l'une du disque fixe et l'autre du disque mobile : ces bobines se repoussent l'une l'autre. En réglant la distance des disques, on peut équilibrer exactement l'attraction par la répulsion, en même temps qu'un autre observateur détermine, au moyen d'un galvanomètre différentiel muni de dérivations, le rapport du courant principal au courant auxiliaire.

Dans cette expérience, la seule mesure qui doive être rapportée à un étalon matériel est celle de la grande résistance, qu'il faut déterminer en mesure absolue par comparaison avec l'ohm. Les autres mesures ne servent qu'à déterminer des rapports et peuvent être faites en fonction de n'importe quelle unité arbitraire.

Ainsi, le rapport des deux forces est un rapport d'égalité.

Le rapport des deux intensités se déduit de la comparaison des résistances qu'il faut interposer pour qu'il n'y ait point de déviation au galvanomètre différentiel.

La force attractive dépend du carré du rapport du diamètre des disques à leur distance.

La force répulsive dépend du rapport du diamètre des bobines à leur distance.

La valeur de v s'exprime donc directement en fonction de la résistance de la grande bobine, qui elle-même a été comparée à l'ohm.

La valeur de v, trouvée par la méthode de Thomson, est de 28,2 ohms (1); par la méthode de Maxwell, elle est de 28,8 ohms (2).

---

(1) *Report of the British Association*, p. 434; 1869.

(2) *Phil. Trans.*, p. 643, 1868, et *Report of the British Association*, p. 436; 1869.

III. — Capacité électrostatique en mesure électromagnétique.

774. La capacité d'un condensateur peut être déterminée en mesure électromagnétique, en comparant la force électromotrice qui produit la charge et la quantité d'électricité contenue dans le courant de décharge. Au moyen d'une pile, on établit un courant dans un circuit comprenant une bobine de grande résistance. On charge le condensateur en mettant ses électrodes en contact avec celles de la bobine. Le courant qui traverse la bobine est mesuré par la déviation qu'il produit dans un galvanomètre. Soit φ cette déviation ; alors, d'après le § 742,

$$\gamma = \frac{H}{G} \operatorname{tang} \varphi,$$

où H est la composante horizontale du magnétisme terrestre et G la constante principale du galvanomètre.

Si R est la résistance de la bobine à travers laquelle on fait passer le courant, la différence des potentiels, aux extrémités de cette bobine, est

$$E = R\gamma,$$

et la charge électrique accumulée dans le condensateur dont la capacité, en mesure électromagnétique, est C, est

$$Q = EC.$$

Détachons alors du circuit les électrodes du condensateur et ensuite celles du galvanomètre, et, quand l'aimant du galvanomètre sera devenu immobile à sa position d'équilibre, relions les électrodes du condensateur à celles du galvanomètre. Un courant instantané traverse le galvanomètre, et lance l'aimant jusqu'à l'élongation extrême θ. Alors, si la décharge est égale à la charge, on doit avoir, d'après le § 748,

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} 2 \sin \tfrac{1}{2}\theta.$$

Nous obtenons ainsi, pour valeur de la capacité du condensateur, en mesure électromagnétique,

$$C = \frac{T}{\pi} \frac{1}{R} \frac{2 \sin \frac{1}{2}\theta}{\operatorname{tang} \varphi}.$$

La capacité du condensateur se trouve ainsi déterminée en fonction des quantités suivantes :

T, durée d'oscillation de l'aimant du galvanomètre, de sa position d'équilibre à sa position d'équilibre ;

R, résistance de la bobine ;

θ, limite extrême de l'oscillation produite par la décharge; φ, déviation constante due au courant qui traverse la bobine R.

Cette méthode a été employée, par le professeur Fleeming Jenkin, pour déterminer la capacité de condensateurs en mesure électromagnétique.

Si c est la capacité, en mesure électrostatique, du même condensateur, capacité obtenue par comparaison avec un condensateur dont on puisse calculer la capacité d'après ses éléments géométriques,

$$c = v^2 C,$$

d'où

$$v^2 = \pi R \frac{c}{T} \frac{\operatorname{tang} \varphi}{2 \sin \frac{1}{2} \theta}.$$

La quantité v peut donc être trouvée de cette manière. Elle dépend de la détermination de R, en mesure électromagnétique; mais, comme elle ne renferme que la racine carrée de R, une erreur sur cette détermination n'affecterait pas autant la valeur de v que dans les méthodes des § 772, 773.

Courant intermittent.

775. Si le fil d'un circuit de pile est coupé en un certain point et que l'on relie les deux bouts aux armatures d'un condensateur, le courant entrera dans le condensateur avec une intensité qui diminuera à mesure que la différence des potentiels du condensateur augmentera; et, quand le condensateur aura reçu toute la charge qui correspond à la force électromotrice qui agit sur le fil, le courant cessera entièrement.

Si l'on détache les électrodes du condensateur des bouts du fil et qu'on les rattache dans l'ordre inverse, le condensateur commencera par se décharger dans le fil, puis se chargera de nouveau en sens inverse; de sorte que le fil sera parcouru par un courant instantané, représentant en tout le double de la charge du condensateur.

Au moyen d'un organe mécanique appelé *commutateur* (*wippe*), l'inversion des communications du condensateur peut être reproduite à des intervalles de temps réguliers, chaque intervalle étant égal à T. Si cet intervalle est suffisamment long pour permettre au condensateur de se décharger entièrement, la quantité d'électricité transmise dans le fil à chaque intervalle sera $2EC$, E étant la force électromotrice et C la capacité du condensateur.

Si l'aimant du galvanomètre compris dans le circuit est lesté de

façon que ses oscillations soient assez lentes pour qu'un grand nombre de décharges du condensateur puissent se produire pendant la durée d'une oscillation de l'aimant, cette série de décharges agit sur l'aimant comme un courant permanent d'intensité,

$$\frac{2EC}{T}.$$

Si maintenant on retire le condensateur, et qu'on mette à sa place une résistance dont on règle la valeur jusqu'à ce que le courant permanent qui traverse le galvanomètre produise la même déviation que la série de décharges, et si, dans ce cas, la résistance du circuit total est R,

$$\frac{E}{R} = \frac{2EC}{T}, \tag{1}$$

ou

$$R = \frac{T}{2C}. \tag{2}$$

On peut ainsi comparer un condensateur pourvu de son commutateur en mouvement à un fil d'une certaine résistance électrique; et, pour mesurer cette résistance électrique, on peut se servir d'une quelconque des méthodes décrites aux § 345 à 357 pour la mesure des résistances.

770. A cet effet, on peut substituer un condensateur et son commutateur à l'un quelconque des fils, dans la méthode du galvanomètre différentiel (§ 346) ou dans celle du pont de Wheatstone (§ 347). Dans l'une ou l'autre méthode, supposons que l'on ait obtenu une déviation nulle du galvanomètre, d'abord avec le condensateur et son commutateur, et ensuite avec une bobine de résistance R_1 mise à sa place; la quantité $\frac{T}{2C}$ sera mesurée par la résistance du circuit dont fait partie la bobine R_1 et qui comprend en outre la pile et le reste des conducteurs. Donc la résistance R, que nous avons à calculer, est égale à R_1, résistance de la bobine, plus R_2, résistance du reste du circuit, y compris la pile, les extrémités de la bobine de résistance étant prises pour électrodes de ce système.

Dans le cas du galvanomètre différentiel et du pont de Wheatstone, il n'est pas nécessaire de faire une seconde expérience en substituant une bobine de résistance au condensateur. La valeur de la résistance équivalente au condensateur peut se calculer d'après les autres résistances données du système.

Employant les notations du § 347, et supposant le condensateur et son commutateur substitués au conducteur AC du pont de Wheatstone, le galvanomètre en OA, et la déviation nulle. Nous savons que la résistance d'une bobine qui, placée en AC, donnerait une déviation nulle, est donnée par la formule

$$b = \frac{C\gamma}{\beta} = R_1. \tag{3}$$

L'autre partie R_2 de la résistance est celle du système de conducteurs AO, OC, AB, BC et OB, les points A et C étant considérés comme les électrodes. On a donc

$$R_2 = \frac{\beta(c+a)(\gamma+a)+ca(\gamma+a)+\gamma a(c+a)}{(c+a)(\gamma+a)+\beta(c+a+\gamma+a)}. \tag{4}$$

Dans cette expression, a représente la résistance intérieure de la pile et de ses connexions, dont on ne peut déterminer la valeur avec précision; mais, si on la rend faible relativement aux autres résistances, cette incertitude n'affectera que légèrement la valeur de R_2.

La valeur de la capacité du condensateur, en mesure électromagnétique, est

$$C = \frac{T}{2(R_1+R_2)}. \tag{5}$$

777. Si le condensateur a une grande capacité et que le commutateur ait un mouvement très rapide, le condensateur peut n'être pas entièrement déchargé à chaque inversion. L'équation du courant électrique pendant la décharge est

$$Q + R_2 C\frac{dQ}{dt} + EC = 0, \tag{6}$$

Q étant la charge, C la capacité du condensateur, R_2 la résistance du reste du système compris entre les électrodes, E la force électromotrice due aux communications avec la pile; d'où

$$Q = (Q_0 + EC)e^{-\frac{t}{R_2C}} - EC, \tag{7}$$

où Q_0 est la valeur initiale de Q.

Si τ est le temps pendant lequel le contact est maintenu à chaque décharge, la quantité qui passe dans chaque décharge est

$$Q = 2EC\frac{1-e^{-\frac{\tau}{R_2C}}}{1+e^{-\frac{\tau}{R_2C}}}. \tag{8}$$

Faisant dans l'équation (4) c et γ considérables relativement à β, α ou α, le temps représenté par R_2C peut être rendu assez petit, par rapport à τ, pour que l'on puisse calculer la valeur de l'exponentielle en se servant de la valeur de C tirée de l'équation (5). On trouve ainsi

$$\frac{\tau}{R_2 C} = 2\,\frac{R_1 + R_2}{R_2}\,\frac{\tau}{T}, \tag{9}$$

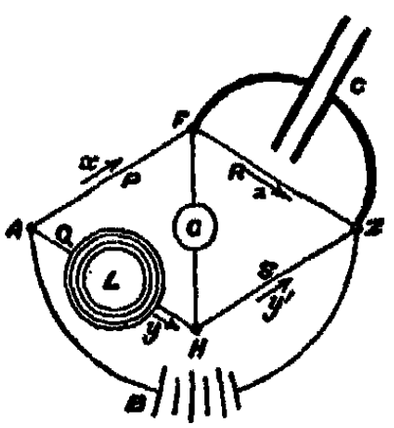
où R_1 est la résistance qui doit être substituée au condensateur pour produire un effet équivalent. R_2 est la résistance du reste du système; T est l'intervalle de temps compris entre le commencement de deux décharges consécutives, et τ est la durée de chaque décharge. On obtient ainsi, pour valeur corrigée de C, en mesure électromagnétique,

$$C = \frac{1}{2}\,\frac{T}{R_1 + R_2}\,\frac{1 + e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}{1 - e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}. \tag{10}$$

IV. — Comparaison de la capacité électrostatique d'un condensateur avec la capacité électromagnétique de self-induction d'une bobine.

778. Si deux points d'un circuit, entre lesquels la résistance est R, sont reliés aux électrodes d'un condensateur de capacité C, et qu'une force électromotrice agisse dans le circuit, une partie du courant, au

Fig. 67.



lieu de passer dans la résistance R, est employée à charger le condensateur. Par suite, le courant qui traverse R, partant de zéro, n'atteindra sa valeur finale que d'une manière graduelle. Il résulte de la théorie mathématique qu'une formule exactement de la même nature représente les variations du courant qui traverse R, depuis zéro jusqu'à sa valeur finale, et celles d'un courant émis par une force élec-

tromotrice constante à travers la bobine d'un électro-aimant. On peut donc placer dans les branches opposées d'un pont de Wheatstone un condensateur et un électro-aimant, de telle sorte que le courant du galvanomètre reste nul, même au moment où l'on ouvre ou l'on ferme le circuit de pile.

Soient, dans la figure, P, Q, R, S les résistances respectives des quatre branches d'un pont de Wheatstone. Plaçons dans la branche AH, dont la résistance est Q, une bobine dont le coefficient de self-induction est L, et relions aux points P et z, par des pièces de faible résistance, les électrodes d'un condensateur de capacité C. Pour plus de simplicité, supposons qu'il n'y a point de courant dans le galvanomètre G, dont les électrodes sont reliées à F et à H. Nous devons donc déterminer la condition pour que le potentiel de F soit égal à celui de H. Et c'est seulement quand nous voudrons apprécier la sensibilité de la méthode que nous aurons besoin de calculer le courant qui traverse le galvanomètre quand cette condition n'est pas remplie.

Soient x la quantité totale d'électricité qui a traversé la branche AF; z celle qui a traversé la branche Fz, au temps t. La charge du condensateur sera $x - z$. La force électromotrice qui agit entre les armatures du condensateur est, d'après la loi de Ohm, $R\frac{dz}{dt}$; si donc la capacité du condensateur est C,

$$x - z = RC\frac{dz}{dt}. \tag{1}$$

Soit y la quantité totale d'électricité qui a traversé la branche AH; la force électromotrice qui agit de A vers H doit être égale à celle qui agit de A vers F, ou

$$Q\frac{dy}{dt} + L\frac{d^2y}{dt^2} = P\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Puisqu'il n'y a point de courant dans le galvanomètre, la quantité qui traverse Hz doit aussi être y, et nous trouvons

$$S\frac{dy}{dt} = R\frac{dz}{dt}. \tag{3}$$

Substituant dans (2) la valeur de x tirée de (1) et comparant à (3), nous trouvons que la condition pour qu'il ne passe point de courant dans le galvanomètre est

$$RQ\left(1 + \frac{L}{Q}\frac{d}{dt}\right)z = SP\left(1 + RC\frac{d}{dt}\right)z. \tag{4}$$

La condition pour qu'en régime permanent il n'y ait point de courant est, comme dans un pont de Wheatstone ordinaire,

$$QR = SP. \tag{5}$$

Pour qu'il n'y ait point de courant quand on ouvre ou qu'on ferme la communication de pile, il faut, en outre,

$$\frac{L}{Q} = RC. \tag{6}$$

Ici, $\frac{L}{Q}$ et RC sont les constantes relatives au temps des branches Q et R, et si, en faisant varier Q et R, on peut régler les branches du pont de Wheatstone, de façon que le galvanomètre n'accuse de courant ni quand on ouvre, ni quand on ferme le circuit, ni quand on maintient le courant, on sait que la constante de temps de la bobine est égale à celle du condensateur.

Le coefficient de self-induction L peut être déterminé en mesure électromagnétique, par comparaison avec le coefficient d'induction mutuelle de deux circuits dont on connaît les éléments géométriques (§ 756). C'est une quantité de la dimension d'une ligne.

La capacité du condensateur peut se déterminer, en mesure électrostatique, par comparaison avec un condensateur dont on connaît les éléments géométriques (§ 229). Cette quantité est aussi une longueur c. La mesure électromagnétique de la capacité est

$$C = c\frac{1}{v^2}, \tag{7}$$

Substituant cette valeur dans l'équation (6), nous avons pour valeur de v^2

$$v^2 = \frac{cQR}{L}, \tag{8}$$

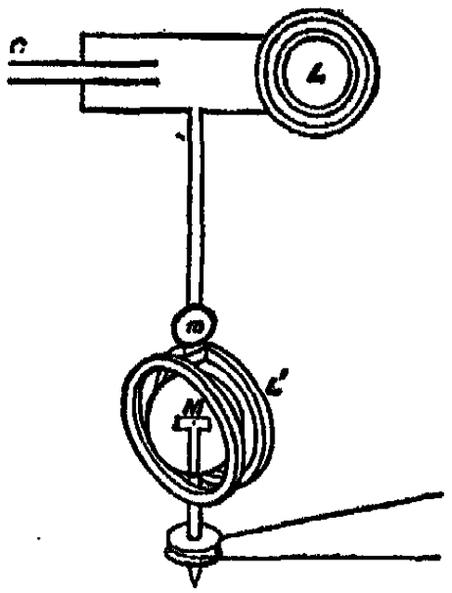
où c est la capacité du condensateur en mesure électromagnétique; L est le coefficient de self-induction de la bobine en mesure électromagnétique; Q et R sont des résistances en mesure électromagnétique. La valeur de v, déterminée par cette méthode, dépend, comme dans la seconde méthode, de la détermination de l'unité de résistance (§ 772, 773).

V. — Combinaison de la capacité électrostatique d'un condensateur avec la capacité électromagnétique de self-induction d'une bobine.

779. Soit C la capacité d'un condensateur dont les armatures sont reliées par un fil de résistance R comprenant les deux bobines L et L',

et soit L la somme de leurs capacités de self-induction. La bobine L′ est suspendue par une suspension bifilaire, et est formée de deux bobines à plans verticaux; entre elles passe un axe vertical portant un aimant M dont l'axe décrit un plan horizontal entre les bobines L et L′ (*fig.* 68). La bobine L a un coefficient de self-induction considé-

Fig. 68.



rable; elle est fixe. On protège la bobine suspendue L′ contre les courants d'air causés par la rotation de l'aimant, en renfermant les pièces mobiles dans une boîte creuse.

Le mouvement de l'aimant induit des courants dans la bobine; ceux-ci sont influencés par l'aimant, de telle sorte que le plan de la bobine suspendue est dévié dans le sens de la rotation de l'aimant. Déterminons l'intensité de ces courants induits et la grandeur de la déviation de la bobine suspendue.

Soit x la charge de l'armature supérieure du condensateur. Si E est la force électromotrice qui produit cette charge, on doit avoir, par la théorie du condensateur,

$$x = CE. \tag{1}$$

On a aussi, par la théorie des courants électriques,

$$R\dot{x} + \frac{d}{dt}(L\dot{x} + M\cos\theta) + E = 0, \tag{2}$$

où M est la quantité de mouvement électromagnétique du circuit L′ lorsque l'axe de l'aimant est normal au plan de la bobine, et θ est l'angle entre l'axe de l'aimant et cette normale.

L'équation qui détermine x est donc

$$(3) \qquad CL\frac{d^2x}{dt^2} + CR\frac{dx}{dt} + x = CM\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Si la bobine est dans une position d'équilibre et si la rotation de l'aimant s'effectue avec une vitesse angulaire uniforme n,

$$(4) \qquad \theta = nt.$$

L'expression du courant est formée de deux parties : l'une est indépendante du second membre de l'équation et diminue suivant une fonction exponentielle du temps; l'autre, que l'on peut appeler le *courant forcé,* dépend entièrement du terme en θ et peut s'écrire

$$(5) \qquad x = A\sin\theta + B\cos\theta.$$

On trouve les valeurs de A et B en substituant dans l'équation (3), et l'on obtient

$$(6) \qquad x = -MCn\frac{RCn\cos\theta - (1 - CLn^2)\sin\theta}{R^2C^2n^2 + (1 - CLn^2)^2}.$$

Le moment de la force avec laquelle l'aimant agit sur la bobine L′, traversée par le courant x, est de sens inverse à celui qui agirait sur l'aimant, la bobine étant supposée fixe; il est donc donné par

$$(7) \qquad \Theta = -x\frac{d}{d\theta}(M\cos\theta) = M\sin\theta\frac{dx}{dt}.$$

Intégrant cette expression par rapport à t pour la durée d'une révolution et divisant par cette durée, nous trouvons, pour valeur moyenne de Θ,

$$(8) \qquad \overline{\Theta} = -\frac{1}{2}\frac{M^2RC^2n^3}{R^2C^2n^2 + (1 - CLn^2)^2}.$$

Si la bobine a un moment d'inertie considérable, ses oscillations forcées seront très petites, et sa déviation moyenne sera proportionnelle à $\overline{\Theta}$.

Soient D_1, D_2, D_3 les déviations observées pour les vitesses angulaires n_1, n_2, n_3 de l'aimant; alors on a, en général,

$$(9) \qquad P\frac{n}{D} = \left(\frac{1}{n} - CLn\right)^2 + R^2C^2,$$

où P est constant.

Éliminant P et R entre trois équations de cette forme, on trouve

$$(10)\qquad C^2L^2=\frac{1}{n_1^2n_2^2n_3^2}\,\frac{\dfrac{n_1^2}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\dfrac{n_2^2}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\dfrac{n_3^2}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}{\dfrac{n_1}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\dfrac{n_2}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\dfrac{n_3}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}.$$

Si n_2 est tel que $CLn_2^2=1$, la valeur de $\frac{n}{D}$ sera minimum pour cette valeur de n. On prendra les autres valeurs de n, l'une plus grande, l'autre plus petite que n_2.

La valeur de CL, tirée de cette équation, a pour dimensions le carré d'un temps. Appelons-la τ^2.

Si C_s est la mesure électrostatique de la capacité du condensateur et si L_m est la mesure électromagnétique de la self-induction de la bobine, C_s et L_m sont des lignes, et le produit

$$(11)\qquad C_sL_m=v^2C_sL_s=v^2C_mL_m=v^2\tau^2$$

et

$$(12)\qquad v^2=\frac{C_sL_m}{\tau^2},$$

où τ^2 est la valeur de C^2L^2 trouvée par l'expérience. L'expérience que l'on propose ici, comme méthode pour la détermination de v, est de la même nature que celle décrite par sir W.-R. Grove (*Phil. Mag.*, mars 1868, p. 184). *Voir* aussi les remarques de l'auteur, sur cette expérience, dans le numéro de mai 1868.

VI. — Mesure électrostatique de la résistance. (*Voir* § 355.)

780. Déchargeons un condensateur de capacité C à travers un conducteur de résistance R; si x est à chaque instant la charge,

$$(1)\qquad \frac{x}{C}+R\frac{dx}{dt}=0,$$

d'où

$$(2)\qquad x=x_0e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Si, par une méthode quelconque, on peut donner des contacts de durée très courte et exactement connue, de façon que le courant traverse le conducteur pendant le temps t, et si E_0 et E_1 sont les lectures d'un électromètre relié au condensateur avant et après l'opération,

$$(3)\qquad RC(\log_eE_0-\log_eE_1)=t.$$

Si l'on connaît C, en mesure électrostatique, comme quantité linéaire, R peut être déduit de cette expression, en mesure électrostatique, comme l'inverse d'une vitesse.

Si R_s est la valeur numérique ainsi déterminée de la résistance et R_m la valeur numérique en mesure électromagnétique,

$$(4) \qquad v^2 = \frac{R_m}{R_s}.$$

Comme il est nécessaire pour cette expérience que R soit très grand, et que R doit être petit dans les expériences électromagnétiques des § 763 et suivants, les expériences doivent être faites sur des conducteurs différents, dont les résistances sont comparées par les méthodes ordinaires.

CHAPITRE XX.

THÉORIE ÉLECTROMAGNÈTIQUE DE LA LUMIÈRE.

781. En plusieurs passages de ce Traité, on a tenté d'expliquer les phénomènes électromagnétiques par une action mécanique transmise d'un corps à un autre par l'intermédiaire d'un milieu qui remplirait l'espace compris entre les corps. La théorie ondulatoire de la lumière suppose aussi l'existence d'un milieu. Nous avons maintenant à montrer que le milieu électromagnétique a des propriétés identiques à celles du milieu où se propage la lumière.

Remplir l'espace d'un nouveau milieu toutes les fois que l'on doit expliquer un nouveau phénomène ne serait point un procédé bien philosophique; au contraire, si, étant arrivés indépendamment par l'étude de deux branches différentes de la Science à l'hypothèse d'un milieu, les propriétés qu'il faut attribuer à ce milieu pour rendre compte des phénomènes électromagnétiques se trouvent être de la même nature que celles que nous devons attribuer à l'éther lumineux pour expliquer les phénomènes de la lumière, nos raisons de croire à l'existence physique d'un pareil milieu se trouveront sérieusement confirmées.

Mais les propriétés des corps sont susceptibles de mesures quantitatives. Nous obtenons ainsi la valeur numérique de certaines propriétés du milieu, par exemple de la vitesse avec laquelle s'y propage une perturbation, vitesse que nous pouvons calculer d'après les expériences électromagnétiques et que nous pouvons observer directement dans le cas de la lumière. Si l'on trouve que la vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques est la même que la vitesse de la lumière, et cela, non seulement dans l'air, mais dans tous les autres milieux transparents, nous aurons de fortes raisons de croire que la lumière est un phénomène électromagnétique, et, par la combinaison des preuves optiques et électriques, nous nous convaincrons de la réalité de ce milieu, absolument comme, dans le cas des autres espèces de matière, nous nous convainquons par le témoignage combiné des sens.

782. Lorsque de la lumière est émise, le corps lumineux dépense

une certaine quantité d'énergie, et, si cette lumière est absorbée par un autre corps, ce corps s'échauffe, témoignant ainsi qu'il reçoit de l'énergie du dehors. Durant le temps que la lumière, ayant déjà quitté le premier corps, n'a pas encore atteint le second, elle doit exister à l'état d'énergie dans le milieu intermédiaire.

Dans la théorie de l'émission, le transport de l'énergie s'effectue par le transport effectif des particules de lumière allant du corps lumineux au corps éclairé et emportant avec elles leur énergie cinétique, ainsi que toute autre espèce d'énergie dont elles pourraient être le siège.

Dans la théorie des ondulations, il y a un milieu matériel qui remplit tout l'espace compris entre les deux corps, et c'est par l'action des parties contiguës de ce milieu que l'énergie se transmet de proche en proche, jusqu'à ce qu'elle atteigne le corps éclairé.

Donc, pendant le passage de la lumière, le milieu lumineux renferme de l'énergie. Dans la théorie ondulatoire, telle que l'ont développée Huygens, Fresnel, Young, Green, etc., on suppose que cette énergie est en partie potentielle, en partie cinétique. On suppose que l'énergie potentielle est due à la déformation des parties élémentaires du milieu, ce qui entraîne que ce milieu comme élastique, et que l'énergie cinétique est due au mouvement vibratoire du milieu, d'où la conséquence que ce milieu a une densité finie.

Dans la théorie de l'électricité et du magnétisme, adoptée dans cet Ouvrage, on reconnaît deux formes d'énergie, électrostatique et électrocinétique (*voir* § 630 et 636), et l'on suppose qu'elles ont leur siège non seulement sur les corps électrisés ou magnétisés, mais aussi en tout point de l'espace environnant où l'on observe une action de la force électrique ou magnétique. Ainsi, notre théorie est d'accord avec la théorie ondulatoire sur ce point, qu'elle admet l'existence d'un milieu susceptible de devenir le siège de deux sortes d'énergie (1).

738. Déterminons maintenant dans quelles conditions se propage

(1) « Pour ma part, lorsque je considère la relation qui pourrait exister entre un espace vide et la force magnétique, ainsi que le caractère général des phénomènes magnétiques en dehors de l'aimant, je penche à croire que la transmission de la force se fait par une certaine action extérieure à l'aimant, et non que ces effets sont simplement des attractions et des répulsions à distance. Une telle action pourrait être une fonction de l'éther; car il n'est pas du tout invraisemblable que l'éther, s'il existe, ait d'autres usages que d'être simplement le véhicule des radiations. » (*Recherches expérimentales* de Faraday, 3075).

une perturbation électromagnétique dans un milieu que nous supposerons en repos, c'est-à-dire n'ayant d'autres mouvements que ceux qui peuvent faire partie de la perturbation électromagnétique.

Soient

C la conductibilité spécifique du milieu;
K son pouvoir spécifique pour l'induction électrostatique;
μ sa *perméabilité* magnétique.

Pour obtenir l'équation générale d'une perturbation électromagnétique, nous allons exprimer le courant vrai $\mathfrak{C}$ en fonction du potentiel vecteur $\mathfrak{A}$ et du potentiel électrique Ψ.

Le courant vrai $\mathfrak{C}$ se compose du courant de conduction $\mathfrak{K}$ et de la variation de déplacement électrique $\mathfrak{D}$; et, puisque ces deux éléments dépendent l'un et l'autre de la force électromotrice $\mathfrak{E}$, nous trouvons, comme au § 611,

$$\mathfrak{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathfrak{E}; \tag{1}$$

mais, puisqu'il n'y a point de mouvement dans le milieu, nous pouvons exprimer la force électromotrice comme au § 599,

$$\mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi, \tag{2}$$

d'où

$$\mathfrak{C} = -\left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla\Psi\right). \tag{3}$$

Mais nous pouvons déterminer autrement une relation entre $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{U}$, ainsi qu'on l'a vu au § 616, dont les équations (4) peuvent s'écrire

$$4\pi\mu\mathfrak{C} = \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J, \tag{4}$$

où

$$J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}. \tag{5}$$

En combinant les équations (3) et (4), nous avons

$$\mu\left(4\pi C + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla\Psi\right) + \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J = 0, \tag{6}$$

ce que nous pouvons exprimer par les trois équations suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} \mu\left(4\pi C + K\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \nabla^2 F + \dfrac{\partial J}{\partial x} = 0, \\ \mu\left(4\pi C + K\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\left(\dfrac{\partial G}{\partial t} + \dfrac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \nabla^2 G + \dfrac{\partial J}{\partial y} = 0, \\ \mu\left(4\pi C + K\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\left(\dfrac{\partial H}{\partial t} + \dfrac{\partial \Psi}{\partial z}\right) + \nabla^2 H + \dfrac{\partial J}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Telles sont les équations générales des perturbations électromagnétiques.

Si nous différentions ces équations par rapport à x, y et z, respectivement, et que nous les ajoutions, nous avons

$$(8)\qquad \mu\left(4\pi C + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial J}{\partial t} - \nabla^2 \Psi\right) = 0.$$

Si le milieu n'est pas conducteur, $C = 0$ et $\nabla^2\Psi$, qui est proportionnel à la densité de volume de l'électricité libre, est indépendant de t. Donc J doit être une fonction linéaire de t, ou une constante ou zéro, et nous pouvons ne tenir compte ni de J ni de Ψ, si nous considérons des perturbations périodiques.

Propagation des ondes dans un milieu non conducteur.

784. Dans ce cas, $C = 0$ et les équations deviennent

$$(9)\qquad \begin{cases} K\mu\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \nabla^2 F = 0, \\ K\mu\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \nabla^2 G = 0, \\ K\mu\dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \nabla^2 H = 0. \end{cases}$$

Sous cette forme, ces équations sont semblables à celles du mouvement d'un corps élastique, et, quand des conditions initiales sont données, la solution peut être obtenue sous une forme indiquée par Poisson (1) et appliquée par Stokes à la théorie de la diffraction (2).

Posons

$$(10)\qquad V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}.$$

Si, pour l'époque $t = 0$, nous connaissons, en chaque point de l'espace,

(1) *Mémoires de l'Académie*, t. III, p. 130, et Note à la fin du Chapitre.
(2) *Cambridge Transactions*, vol. IX, p. 10; 1850.

les valeurs de F, G, H et de $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial G}{\partial t}$, $\frac{\partial H}{\partial t}$, nous pourrons déterminer ces valeurs, pour une époque quelconque, de la manière suivante :

Soit O le point pour lequel nous voulons déterminer la valeur de F au temps t. De O comme centre, avec un rayon égal à Vt, décrivons une sphère. Cherchons la valeur initiale de F en chacun des points de cette surface, et prenons la valeur moyenne $\overline{F}$. Cherchons aussi la valeur initiale de $\frac{dF}{dt}$ en chacun des points de la surface, et soit $\overline{\frac{dF}{dt}}$ la moyenne de ces valeurs.

Alors la valeur de F au point O, au temps t, est

$$(11)\quad \begin{cases} F = \frac{d}{dt}(\overline{F}t) + t\,\overline{\frac{dF}{dt}}, \\ \text{De même} \\ G = \frac{d}{dt}(\overline{G}t) + t\,\overline{\frac{dG}{dt}}, \\ H = \frac{d}{dt}(\overline{H}t) + t\,\overline{\frac{dH}{dt}}. \end{cases}$$

783. On voit donc qu'à chaque instant l'état des choses au point O dépend de l'état de choses qui existait à une distance Vt, à une époque antérieure de t; c'est-à-dire qu'une perturbation se propage dans le milieu avec la vitesse V.

Supposons qu'au temps $t = 0$ les quantités $\mathfrak{A}$ et $\dot{\mathfrak{A}}$ soient nulles, sauf dans un certain espace S. Leur valeur en O, au temps t, sera zéro, à moins que la sphère, décrite de O comme centre avec Vt comme rayon, ne se trouve comprise en tout ou en partie dans l'espace S. Si O est extérieur à l'espace S, il n'y a point de perturbation en O avant que Vt soit devenu égal à la plus courte distance de O à l'espace S. Alors la perturbation commence à se produire en O et y dure jusqu'à ce que Vt soit devenu égal à la plus longue distance du point O à un point quelconque de l'espace S : à ce moment, la perturbation cesse pour toujours en O.

786. La quantité V, qui exprime la vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques dans un milieu non conducteur, est, d'après l'équation (9) du § 784, égale à $\frac{1}{\sqrt{K\mu}}$.

Si le milieu est l'air, et si nous employons le système de mesure

électrostatique, $K = 1$ et $\mu = \frac{1}{v^2}$; de sorte que $V = v$, ou la vitesse de propagation est numériquement égale au nombre des unités électrostatiques d'électricité contenues dans une unité électromagnétique. Si nous prenons le système de mesure électromagnétique, $K = \frac{1}{v^2}$ et $\mu = 1$, de sorte que l'équation $V = v$ reste vraie.

Si l'on se place dans la théorie qui fait de la lumière une perturbation électromagnétique se propageant dans le même milieu qui transmet les autres actions électromagnétiques, V doit être la vitesse de la lumière, quantité dont la valeur a été mesurée par plusieurs méthodes. D'autre part, v est le nombre des unités électrostatiques d'électricité qui sont contenues dans une unité électromagnétique, et l'on a décrit, au Chapitre précédent, les méthodes permettant de déterminer cette quantité. Or ces méthodes sont entièrement indépendantes de celles qui servent à mesurer la vitesse de la lumière. Donc l'accord ou le désaccord des valeurs de V et de v fournit une vérification de la théorie électromagnétique de la lumière.

787. Dans la Table suivante, on met en regard les principaux résultats d'observations directes faites sur la vitesse de la lumière dans l'air ou les espaces planétaires, et les principaux résultats obtenus dans la comparaison des unités électriques :

Vitesse de la lumière (en mètres, par seconde).		Rapport des unités électriques.	
Fizeau.....	314000000	Weber.....	310740000
Aberration, etc., parallaxe du Soleil..	308000000	Maxwell (1).....	288000000
Foucault.....	298360000	Thomson (1).....	282000000

Il est manifeste que la vitesse de la lumière et le rapport des unités sont des quantités de même ordre de grandeur; mais, jusqu'à ce jour, on ne saurait dire qu'aucune des deux ait été déterminée avec assez de précision pour que l'on puisse affirmer que l'une est plus grande

(1) [Les expériences faites par le Comité de l'Association britannique, en vue de déterminer l'unité de résistance en mesure absolue, ont été répétées dernièrement, au laboratoire Cavendish, par lord Rayleigh et le Dr Schuster: ils ont trouvé que l'ohm est d'environ 1 pour 100 plus petit qu'on n'avait l'intention de le faire. Pour tenir compte de cette correction, il y aurait à diminuer de 1 pour 100 environ les nombres donnés par Maxwell et Thomson comme rapport des unités électriques.]

que l'autre. Il est à souhaiter que de nouvelles expériences déterminent, avec plus de précision, le rapport de grandeur de ces deux quantités.

En attendant, notre théorie, qui affirme l'égalité de ces deux quantités et qui donne une raison physique de cette égalité, ne se trouve certainement pas contredite par la comparaison de ces résultats, tels qu'ils sont.

788. Dans les milieux autres que l'air, la vitesse V est inversement proportionnelle à la racine carrée du produit du pouvoir inducteur diélectrique et du pouvoir inducteur magnétique. Dans la théorie ondulatoire, la vitesse de la lumière dans les différents milieux est inversement proportionnelle aux indices de réfraction de ces milieux.

Il n'y a point de milieu transparent dont le pouvoir magnétique diffère du pouvoir magnétique de l'air de plus d'une très petite fraction. La plus grande partie de la différence qui existe entre ces milieux doit donc tenir à leur pouvoir diélectrique. Donc, d'après notre théorie, le pouvoir diélectrique d'un milieu transparent doit être égale au carré de son indice de réfraction.

Mais l'indice de réfraction a des valeurs différentes pour les différentes sortes de lumière, et il est d'autant plus grand que la lumière a des vibrations plus rapides. Nous devons donc choisir l'indice de réfraction qui correspond aux ondes dont la période est la plus longue, ces ondes étant les seules dont le mouvement puisse se comparer aux opérations lentes à l'aide desquelles nous déterminons la capacité d'un diélectrique.

789. Le seul diélectrique dont la capacité ait été, jusqu'à présent, déterminée avec une exactitude suffisante, est la paraffine; MM. Gibson et Barclay ont trouvé pour cette substance, à l'état solide (1),

$$K = 1,975.$$

Le Dr Gladstone a trouvé pour la paraffine fondue, de densité 0,779, les valeurs suivantes des indices de réfraction relatifs aux lignes A, D et H :

Température.	A.	D.	H.
54° C	1,4306	1,4357	1,4499
57° C	1,4294	1,4343	1,4493

(1) *Phil. Trans.*, 1871, p. 573.

De là on tire, pour l'indice de réfraction des ondes de longueur infinie,

$$1,422.$$

La racine carrée de K est

$$1,405.$$

La différence entre ces deux nombres dépasse ce que l'on peut attribuer aux erreurs d'observation, et montre que nos théories sur la structure des corps doivent être encore bien perfectionnées, avant que nous puissions déduire les propriétés électriques des propriétés optiques des corps. En même temps, je crois que l'accord de ces nombres est tel que, si les nombres obtenus pour les propriétés électriques et optiques d'un grand nombre de corps ne présentaient pas de plus grandes différences, nous serions en droit de conclure que la racine carrée de K forme, sinon l'expression complète, au moins le terme le plus important de l'indice de réfraction (1).

Ondes planes.

790. Bornons maintenant notre attention aux ondes planes que nous supposerons normales à l'axe des z. Toutes les quantités, dont la variation constitue ces ondes, seront uniquement fonctions de z et de t et ne dépendront pas de x et y. Les équations de l'induction magnétique (A), § 591, se réduisent à

$$(13) \qquad a = -\frac{\partial G}{\partial z}, \qquad b = \frac{\partial F}{\partial z}, \qquad c = 0;$$

c'est-à-dire que la perturbation magnétique est dans le plan de l'onde. Résultat conforme à ce que nous savons sur la nature de la perturbation qui constitue la lumière.

Posant $\mu\alpha$, $\mu\beta$ et $\mu\gamma$ au lieu de a, b, ..., les équations des courants

---

(1) [Dans un Mémoire lu à la Société royale, le 14 janvier 1877, M. le Dr Hopkinson donne les résultats d'expériences faites pour déterminer le pouvoir inducteur spécifique de différentes espèces de verre. Ces résultats ne concordent pas avec les conclusions théoriques auxquelles on arrive dans le texte : toujours la valeur de K est supérieure au carré de l'indice de réfraction. Dans une Note ultérieure, lue à la Société royale le 6 janvier 1881, le Dr Hopkinson trouve que, en désignant par μ_∞ l'indice de réfraction relatif aux ondes de longueur infinie, $\mu_\infty^2 = K$ pour les hydrocarbures et $K < \mu_\infty^2$ pour les huiles végétales ou animales.]

électriques deviennent

$$(14)\qquad \begin{cases} 4\pi\mu u = -\dfrac{\partial b}{\partial z} = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial x}, \\ 4\pi\mu v = \dfrac{\partial a}{\partial z} = -\dfrac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial x}, \\ 4\pi\mu w = 0. \end{cases}$$

Ainsi, l'ébranlement électrique est aussi dans le plan de l'onde, et, si la perturbation magnétique se produit suivant une seule direction, celle de x par exemple, la perturbation électrique ne se produit que suivant la direction perpendiculaire, c'est-à-dire celle des y.

Mais nous pouvons calculer autrement la perturbation électrique : si f, g, h sont les composantes du déplacement électrique dans un milieu non conducteur,

$$(15)\qquad u = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial g}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial h}{\partial t};$$

si P, Q, R sont les composantes de la force électromotrice,

$$(16)\qquad f = \frac{K}{4\pi} P, \qquad g = \frac{K}{4\pi} Q, \qquad h = \frac{K}{4\pi} R;$$

et, puisqu'il n'y a point de mouvement dans le milieu, les équations (B) du § 598 deviennent

$$(17)\qquad P = -\frac{\partial F}{\partial t}, \qquad Q = -\frac{\partial G}{\partial t}, \qquad R = -\frac{\partial H}{\partial t};$$

d'où

$$(18)\qquad u = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \qquad v = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \qquad w = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.$$

Comparant ces valeurs à celles que donne l'équation (14), on a

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = K\mu\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = K\mu\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \\ 0 = K\mu\dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \end{cases}$$

La première et la deuxième de ces équations sont les équations de la propagation d'une onde plane, et elles sont de la forme bien connue

$$(20)\qquad \begin{cases} F = f_1(z - Vt) + f_2(z + Vt), \\ G = f_3(z - Vt) + f_4(z + Vt). \end{cases}$$

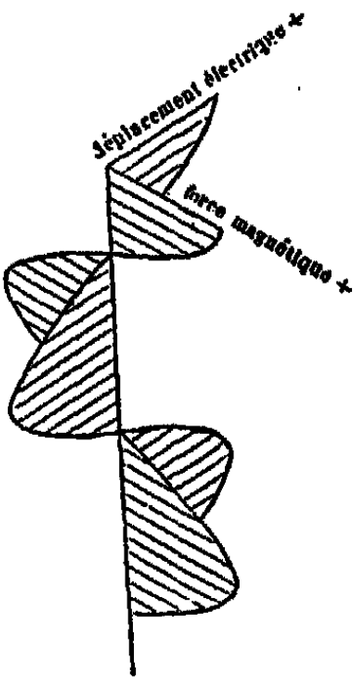
La solution de la troisième équation est

$$H = A + Bt, \tag{21}$$

où A et B sont des fonctions de z. Donc H est constant, ou varie proportionnellement au temps, mais, dans aucun cas, n'a part à la propagation de l'onde.

791. Il résulte de là que les perturbations électrique et magnétique sont dans le plan de l'onde; et la forme mathématique de ces perturbations, comme celle des perturbations qui constituent la lumière, est transversale à la direction de propagation.

Fig. 73.



Si nous supposons $G = 0$, la perturbation correspondra à un rayon de lumière polarisée dans un plan.

Dans ce cas, la force magnétique est parallèle à l'axe des y et égale à $\frac{1}{\mu}\frac{dF}{dz}$, et la force électromotrice est parallèle à l'axe des x et égale à $-\frac{dF}{dt}$. La force magnétique est donc dans un plan perpendiculaire à celui qui contient la force électrique.

La *fig.* 73 représente, pour le cas d'une perturbation harmonique simple dans un plan, les valeurs que prennent, à un instant donné, la force magnétique et la force électromotrice en un point quelconque du rayon. C'est le cas qui correspond à un rayon de lumière polarisée

dans un plan; mais il reste à voir si le plan de polarisation correspond au plan de la perturbation magnétique ou au plan de la perturbation électrique. (*Voir* le § 797.)

Énergie et déformation de la radiation.

792. En un point de l'onde, dans un milieu non conducteur, l'énergie électrostatique par unité de volume est

$$\frac{1}{2}fP = \frac{K}{8\pi}P^2 = \frac{K}{8\pi}\left|\frac{\overline{dF}}{dt}\right|^2. \tag{22}$$

L'énergie électrocinétique, au même point, est

$$\frac{1}{8\pi}b\beta = \frac{1}{8\pi\mu}b^2 = \frac{1}{8\pi\mu}\left|\frac{\overline{dF}}{dz}\right|^2. \tag{23}$$

En vertu de l'équation (20), ces deux expressions sont égales pour une onde isolée, de sorte qu'en chaque point de l'onde l'énergie intérieure du milieu est pour moitié électrostatique, et pour moitié électrocinétique.

Soit p la valeur de l'une ou l'autre de ces quantités, énergie électrostatique ou énergie électrocinétique, par unité de volume : en vertu de l'état électrostatique du milieu, il y a une tension de grandeur p, dans une direction parallèle à x, en même temps qu'une pression aussi égale à p et parallèle à y et à z. (*Voir* § 107.)

En vertu de l'état électrocinétique, il y a une tension égale à p, dans une direction parallèle à y, combinée à une pression aussi égale à p, dans les directions parallèles à x et à z. (*Voir* § 643.)

Donc, l'effet combiné des actions électrostatique et électrocinétique consiste en une pression égale à $2p$, dans le sens de la propagation de l'onde. Or $2p$ exprime la totalité de l'énergie contenue dans l'unité de volume. Donc, dans un milieu où se propagent des ondes, il y existe suivant la direction normale aux ondes une pression numériquement égale à l'énergie contenue dans l'unité de volume.

793. Ainsi, si l'énergie de la lumière qu'un fort rayon de soleil envoie sur un espace d'un pied carré est de 83,4 livres-pieds ($0^{kgm},01241$ par centimètre carré) par seconde, l'énergie moyenne contenue dans un pied cube de l'espace traversé par le rayon de soleil est d'environ 0,0000000882 livre-pied ($0^{kgm},00004322$3 par centimètre cube), et la pression moyenne par pied carré est de 0,0000000882 livre

(0,000000044o7 par centimètre carré). Un corps plan, exposé à la lumière solaire, subirait cette pression sur sa face éclairée et serait ainsi repoussé loin de la source lumineuse. Il est probable que l'on pourrait obtenir une bien plus grande énergie de radiation en concentrant les rayons d'une lampe électrique. De pareils rayons, tombant sur un disque métallique léger, suspendu d'une manière très sensible au milieu d'un espace vide, pourraient peut-être déterminer un effet mécanique appréciable. Lorsqu'une perturbation, de nature quelconque, est formée de termes qui comprennent les sinus ou les cosinus d'angles variant avec le temps, l'énergie maximum est double de l'énergie moyenne. Si donc P est la force électromotrice maximum, et β la force magnétique maximum mise en jeu pendant la propagation de la lumière,

$$(24) \qquad \frac{K}{8\pi} P^2 = \frac{\mu}{8\pi} \beta^2 = \text{l'énergie moyenne par unité de volume.}$$

En admettant pour l'énergie de la lumière solaire les chiffres de Pouillet, cités par sir W. Thomson (*Trans. R. S. E.*, 1854), on trouve, en mesure électromagnétique,

$P = 6000000$ ou 600 daniells environ par mètre,

$\beta = 0,193$, ou un peu plus du dixième de la force magnétique horizontale en Angleterre (1).

Propagation d'une onde plane dans un milieu cristallisé.

794. Lorsque nous avons calculé, au moyen de données fournies par les expériences électromagnétiques ordinaires, les phénomènes électriques qui résulteraient de perturbations périodiques se produisant par millions de millions en l'espace d'une seconde, nous avons soumis notre théorie à une épreuve qui est sévère, même si nous supposons que le milieu soit l'air ou le vide. Mais, si nous essayons d'étendre

(1) Les formules relatives à la réflexion et à la réfraction sont trop connues pour être reproduites ici; on fera observer seulement que, pour les retrouver dans l'hypothèse de Maxwell, il suffit d'écrire 1° que les valeurs de $\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}$, $\frac{dG}{dz} - \frac{dH}{dy}$ doivent être les mêmes des deux côtés de la surface de séparation des deux milieux, supposée plane et normale à l'axe des z; c'est-à-dire que l'induction magnétique est une fonction continue des coordonnées; et 2° que l'énergie des ondes induites est égale à la somme des énergies des ondes réfléchies et réfractées en supposant μ le même dans les deux milieux. (A. P.)

notre théorie au cas des milieux denses, nous nous trouvons aux prises, non seulement avec les difficultés habituelles des théories moléculaires, mais encore avec la question, bien autrement obscure, de la relation qui existe entre les molécules et le milieu électromagnétique.

Pour échapper à ces difficultés, nous admettrons que, dans certains milieux, le pouvoir inducteur spécifique électrostatique n'est pas le même dans toutes les directions; en d'autres termes, nous supposerons que le déplacement électrique, au lieu d'être dirigé dans le même sens que la force électromotrice et de lui être proportionnel, lui soit lié par un système d'équations linéaires semblables à celles du § 297. On peut montrer, comme au § 436, que le système des coefficients doit être symétrique, en sorte que, pour un choix d'axes convenable, les équations deviennent

$$(1)\qquad f = \frac{1}{4\pi} K_1 P, \qquad g = \frac{1}{4\pi} K_2 Q, \qquad h = \frac{1}{4\pi} K_3 R,$$

où K_1, K_2, K_3 sont les pouvoirs inducteurs principaux du milieu. Les équations de la propagation des perturbations seront donc

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial x} = K_1\mu\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x\,\partial t}\right), \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial z} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = K_2\mu\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial y\,\partial t}\right), \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x} - \dfrac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial z} = K_3\mu\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial z\,\partial t}\right). \end{cases}$$

795. Si l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale au plan de l'onde, V la vitesse de l'onde,

$$(3)\qquad w = lx + my + nz - Vt,$$

et si nous désignons par F'', G'', H'', Ψ'' les dérivées secondes de F, G, H, Ψ par rapport à w; enfin, si nous posons

$$(4)\qquad K_1\mu = \frac{1}{a^2}, \qquad K_2\mu = \frac{1}{b^2}, \qquad K_3\mu = \frac{1}{c^2},$$

où a, b, c sont les trois vitesses principales de propagation, les équations deviennent

$$(5)\quad \begin{cases} \left(m^2 + n^2 - \dfrac{V^2}{a^2}\right)F'' - lmG'' - nlH'' - V\Psi''\dfrac{l}{a^2} = 0, \\ -lmF'' + \left(n^2 + l^2 - \dfrac{V^2}{b^2}\right)G'' - mnH'' - V\Psi''\dfrac{m}{b^2} = 0, \\ -nlF'' - mnG'' + \left(l^2 + m^2 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)H'' - V\Psi''\dfrac{n}{c^2} = 0. \end{cases}$$

796. Si nous posons

$$\frac{l^2}{V^2-a^2}+\frac{m^2}{V^2-b^2}+\frac{n^2}{V^2-c^2}=U, \tag{6}$$

nous tirons de ces équations les suivantes :

$$\begin{cases} VU(VF''-lP'')=0, \\ VU(VG''-mP'')=0, \\ VU(VH''-nP'')=0. \end{cases} \tag{7}$$

Donc, ou bien $V=0$, auquel cas l'onde ne se propage pas du tout ; ou bien $U=0$, ce qui conduit pour V à l'équation donnée par Fresnel ; ou bien les quantités entre parenthèses s'annulent, auquel cas le vecteur, dont les composantes sont F'', G'', H'', est normal au plan de l'onde et proportionnel à la densité de volume de l'électricité. Or, le milieu n'étant pas conducteur, la densité électrique en un point donné est constante, et, par suite, la perturbation représentée par ces équations n'est pas périodique et ne peut donner lieu à une onde. Nous pouvons donc considérer P'' comme égal à zéro dans l'étude de l'onde.

797. La vitesse de propagation de l'onde est donc entièrement déterminée par l'équation $U=0$, c'est-à-dire

$$\frac{l^2}{V^2-a^2}+\frac{m^2}{V^2-b^2}+\frac{n^2}{V^2-c^2}=0. \tag{8}$$

Il y a donc deux valeurs de U, et seulement deux qui correspondent à une direction donnée du plan de l'onde.

Si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs du courant électrique dont les composantes sont u, v, w,

$$\lambda:\mu:\nu :: \frac{1}{a^2}F'':\frac{1}{b^2}G'':\frac{1}{c^2}H''; \tag{9}$$

d'où

$$l\lambda+m\mu+n\nu=0; \tag{10}$$

c'est-à-dire que le courant est dans le plan de l'onde, et sa direction dans ce plan est déterminée par l'équation

$$\frac{l}{\lambda}(b^2-c^2)+\frac{m}{\mu}(c^2-a^2)+\frac{n}{\nu}(a^2-b^2)=0. \tag{11}$$

Ces équations sont identiques à celles qu'a données Fresnel, si l'on définit le plan de polarisation comme étant un plan passant par le rayon et perpendiculaire au plan de la perturbation électrique.

Suivant cette théorie électromagnétique de la double réfraction, l'onde de perturbation normale, c'est-à-dire propageant des vibrations normales à son plan ou longitudinales, qui constitue une des principales difficultés de la théorie ordinaire, n'existe pas, et il ne faut pas introduire de nouvelle hypothèse pour rendre compte de ce fait, qu'un rayon polarisé dans le plan principal d'un cristal est réfracté de la manière ordinaire (1).

Relations entre l'opacité et la conductibilité électrique.

798. Si le milieu, au lieu d'être un isolant parfait, est un conducteur dont la conductibilité, par unité de volume, est C, la perturbation consistera non seulement en déplacements électriques, mais aussi en courants de conduction, en sorte que l'énergie électrique se transforme en chaleur et que le mouvement ondulatoire est absorbé par le milieu.

Si la perturbation est exprimée par une fonction circulaire, on peut écrire

$$F = e^{-px}\cos(nt - qx); \tag{1}$$

car cette fonction satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \mu K \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 4\pi\mu C \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{2}$$

pourvu que

$$q^2 - p^2 = \mu K n^2 \tag{3}$$

et

$$2pq = 4\pi\mu C n. \tag{4}$$

La vitesse de propagation est

$$V = \frac{n}{q}, \tag{5}$$

et le coefficient d'absorption est

$$p = 2\pi\mu CV. \tag{6}$$

---

(1) *Voir* Stokes, *Rapport sur la double réfraction* (*Brit. Assoc. Reports*, 1862; p. 255).

Soit R la résistance, en mesure électromagnétique, d'une lame de longueur l, de largeur b, d'épaisseur z;

$$R = \frac{l}{bzC}. \tag{7}$$

La proportion de la lumière incidente, qui sera transmise par cette lame, sera

$$e^{-2pz} = e^{-4\pi\mu\frac{l}{b}\frac{V}{R}}. \tag{8}$$

799. La plupart des corps solides transparents sont de bons isolants. Tous les bons conducteurs sont très opaques. Toutefois, il y a un grand nombre d'exceptions à cette règle, que plus un corps est opaque et plus il est conducteur.

Les électrolytes laissent passer le courant, et pourtant un grand nombre d'entre elles sont transparentes. Toutefois, on peut supposer que dans le cas des forces inverses, qui se succèdent rapidement pendant la propagation de la lumière, la force électromotrice agit pendant trop peu de temps dans une même direction pour pouvoir séparer entièrement les molécules combinées. La force électromotrice, de sens contraire, qui agit pendant la seconde partie de la vibration, ne fait que détruire ce qui a été fait pendant la première partie de la vibration. Ainsi, il n'y a pas conduction proprement dite dans l'électrolyte, il n'y a pas perte d'énergie électrique, et il n'y a, par conséquent, pas absorption de la lumière.

800. L'or, l'argent, le platine sont de bons conducteurs, et cependant, réduits en lame très mince, ils laissent passer la lumière. De certaines expériences que j'ai faites sur un morceau de feuille d'or, dont la résistance avait été déterminée par M. Hockin, il semble résulter que la transparence en est beaucoup plus grande que ne le voudrait notre théorie, à moins, toutefois, que nous n'admettions que la perte d'énergie est moins grande lorsque la force électromotrice est renversée à chaque demi-vibration, que quand elle agit dans le même sens pendant un temps appréciable, comme dans nos expériences ordinaires.

801. Considérons maintenant le cas d'un milieu dans lequel la conductibilité est grande relativement au pouvoir inducteur spécifique.

Nous pouvons alors négliger les termes renfermant K dans les

équations du § 788, qui deviennent

$$(1)\qquad \begin{cases} \nabla^2 F + 4\pi\mu C \dfrac{\partial F}{\partial t} = 0, \\ \nabla^2 G + 4\pi\mu C \dfrac{\partial G}{\partial t} = 0, \\ \nabla^2 H + 4\pi\mu C \dfrac{\partial H}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Chacune de ces équations est de la forme de l'équation de diffusion de la chaleur donnée par Fourier dans son *Traité de la Chaleur*.

802. Ainsi, prenant pour exemple la première, la composante F du potentiel vecteur varie avec le temps et la position, de la même manière que la température d'un corps solide homogène varie avec le temps et la position, les conditions initiales et les conditions à la surface se correspondant dans les deux cas, et la quantité $4\pi\mu C$ étant numériquement égale à la conductibilité thermométrique de la substance, c'est-à-dire *au nombre d'unités de volume de la substance qui seraient échauffées de un degré par la chaleur qui traverse un cube de la substance, ayant pour côté l'unité et ayant deux de ses faces opposées à des températures différant de un degré, les autres faces étant imperméables à la chaleur* (1).

Les différents problèmes sur la conduction thermique, dont Fourier a donné la solution, peuvent être transformés en problèmes sur la diffusion des quantités électromagnétiques, en se souvenant que F, G, H sont les composantes d'un vecteur, tandis que, dans les problèmes de Fourier, la température est une quantité scalaire.

Prenons un des cas dont Fourier a donné la solution complète (2) : celui d'un milieu indéfini dont on donne l'état initial.

L'état d'un point quelconque du milieu au temps t s'obtient en prenant la moyenne des états de chacune des parties du milieu, le

---

(1) *Voir* MAXWELL, *Théorie de la chaleur*, p. 235 de la première édition, p. 255 de la quatrième.

(2) *Traité de la chaleur*, § 384. L'équation qui détermine la température v au temps t d'un point (x, y, z), en fonction de la température initiale $f(\alpha, \beta, \gamma)$ d'un point (α, β, γ) est

$$v = \iiint \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{2^3\sqrt{k^3\pi^3 t^3}}\, e^{-\left[\frac{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}{4kt}\right]} f(\alpha, \beta, \gamma),$$

k étant la conductibilité thermométrique.

poids assigné à chacune de ces parties, dans le calcul de la moyenne, étant

$$e^{-\frac{\pi\mu C r^2}{t}},$$

où r est la distance de cette partie au point considéré. Dans le cas de quantités vectorielles, cette moyenne s'obtient plus aisément en considérant séparément chacune des composantes du vecteur.

803. En premier lieu, nous remarquerons que, dans ce problème, la conductibilité thermique du milieu de Fourier doit être prise inversement proportionnelle à la conductibilité électrique de notre milieu, de sorte que le temps nécessaire pour atteindre un état déterminé est d'autant plus grand que la conductibilité électrique est plus élevée. Ce résultat ne paraîtra pas paradoxal, si l'on se souvient du résultat obtenu au § 635, à savoir qu'un milieu de conductibilité infinie constitue une barrière infranchissable à la propagation de la force magnétique.

En second lieu, dans le phénomène de la diffusion, le temps nécessaire pour atteindre un état déterminé est proportionnel au carré des dimensions linéaires du système.

Il n'y a pas de vitesse déterminée que l'on puisse définir comme étant la vitesse de diffusion. Si nous essayons de mesurer cette vitesse en déterminant le temps nécessaire pour qu'une perturbation de grandeur donnée se produise à une distance donnée de l'origine des perturbations, nous trouvons que plus petite est la valeur choisie de la perturbation, plus grande paraît être la vitesse; car, si grande que soit la distance, si petit que soit le temps, au point de vue mathématique, la valeur de la perturbation diffère de zéro.

Cette particularité distingue la diffusion de la propagation par ondes, laquelle s'effectue avec une vitesse déterminée. Il n'y a point de perturbation en un point avant que l'onde y soit parvenue, et, une fois qu'elle l'a passé, la perturbation cesse pour toujours.

804. Examinons maintenant ce qui se passe lorsqu'un courant électrique commence et continue de circuler dans un circuit linéaire entouré par un milieu de conductibilité électrique finie. (*Comparer* au § 660.)

Lorsque le courant commence, son premier effet est de produire un courant d'induction dans la partie du milieu qui avoisine le fil. Le sens de ce courant est inverse de celui du courant d'origine; et, dans

le premier moment, la quantité totale d'électricité y est égale à celle du courant d'origine, en sorte que l'effet électromagnétique sur les parties plus éloignées du milieu est d'abord nul, et n'atteint sa valeur finale que quand le courant d'induction s'est éteint, en raison de la résistance électrique du milieu.

Mais, à mesure que le courant d'induction s'éteint dans le voisinage du fil, un nouveau courant d'induction se produit plus loin dans le milieu, de sorte que l'espace occupé par le courant d'induction va constamment s'élargissant, et que l'intensité de ce courant diminue constamment.

Cette diffusion et cette extinction du courant d'induction sont un phénomène exactement analogue à la diffusion de la chaleur, à partir d'une partie d'un milieu primitivement plus chaude ou plus froide que le reste. Mais il faut nous rappeler que le courant est une quantité vectorielle, et que, dans un circuit, il a une direction opposée en des points opposés. Aussi, lorsque nous calculons une composante donnée du courant d'induction, devons-nous comparer le problème à celui où des quantités égales de chaleur et de froid se diffusent à partir de places voisines, auquel cas l'effet produit sur les points éloignés est d'un plus petit ordre de grandeur.

805. Si le courant se maintient constant dans le circuit linéaire, les courants d'induction qui dépendent de l'état initial se diffusent et s'éteignent peu à peu, laissant le milieu dans son état permanent qui est analogue à l'état permanent pour un flux de chaleur. Dans cet état, on a

$$\nabla^2 F = \nabla^2 G = \nabla^2 H = 0, \tag{2}$$

en tous les points du milieu, sauf ceux qui sont occupés par le circuit. Là, on a

$$\begin{cases} \nabla^2 F = 4\pi u, \\ \nabla^2 G = 4\pi v, \\ \nabla^2 H = 4\pi w. \end{cases} \tag{3}$$

Et ces équations suffisent à déterminer F, G, H en tous les points du milieu. Elles indiquent qu'il n'y a de courant que dans le circuit, et que les seules forces magnétiques sont celles qui sont dues au courant d'après la théorie ordinaire. La rapidité avec laquelle s'établit cet état permanent est si grande, qu'elle ne pourrait être mesurée par nos méthodes expérimentales, sauf peut-être dans le cas d'une

très grande masse d'un milieu très conducteur, de cuivre par exemple.

NOTE. — Dans un Mémoire publié aux *Annales de Poggendorff* (juin 1867), M. Lorenz a ajouté à l'équation de Kirchhoff sur les courants électriques (*Pogg. Ann.*, CII, 1856) certains termes qui ne modifient aucun résultat expérimental; et il a déduit ainsi une nouvelle série d'équations qui montrent que l'on peut concevoir la distribution de la force dans le champ électromagnétique comme due aux actions mutuelles d'éléments contigus, et que des ondes, consistant en courants électriques transversaux, peuvent se propager dans les milieux non conducteurs avec une vitesse comparable à celle de la lumière. Il en conclut que l'ébranlement qui constitue la lumière est identique à ces courants électriques, et il montre que les corps conducteurs doivent être opaques aux radiations.

Ces résultats sont semblables à ceux qui ont été obtenus dans ce Chapitre, quoiqu'ils aient été atteints par une tout autre méthode. La théorie donnée dans ce Chapitre a été publiée, pour la première fois, dans les *Phil. Trans.* pour 1865.

NOTE I

Relative au § 784;

PAR M. A. POTIER.

Voici comment Poisson (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1818) vérifie que les équations (11) représentent les intégrales des équations (9).

Soient u, u', u'' les angles que forment une direction avec les axes coordonnés; $d\omega$ l'élément de la sphère de rayon *un*, dont la position est définie par ces trois angles, et v, v', v'' les azimuts des plans passant par cet élément et les trois axes, de sorte qu'on a indifféremment

$$\begin{aligned}
&\cos u' = \sin u \sin v, && \cos u'' = \sin u \cos v, && d\omega = \sin u\, du\, dv,\\
&\cos u' = \sin u' \sin v', && \cos u'' = \sin u' \cos v', && d\omega = \sin u'\, du'\, dv',\\
&\cos u = \sin u'' \sin v'', && \cos u' = \sin u'' \cos v'', && d\omega = \sin u''\, du''\, dv''.
\end{aligned}$$

L'intégrale

$$\varphi = \iint f(x + \mathrm{V} t \cos u,\ y + \mathrm{V} t \cos u',\ z + \mathrm{V} t \cos u'')\, t\, d\omega$$

étendue à la sphère entière, satisfait à l'équation (9); car on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \iint f\, d\omega + \mathrm{V} \iint t \left(\cos u \frac{\partial f}{\partial x} + \cos u' \frac{\partial f}{\partial y} + \cos u'' \frac{\partial f}{\partial z} \right) d\omega$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = {} & 2\mathrm{V} \iint \left(\cos u \frac{\partial f}{\partial x} + \cos u' \frac{\partial f}{\partial y} + \cos u'' \frac{\partial f}{\partial z} \right) d\omega \\
& + \mathrm{V}^2 t \iint \left(\cos^2 u \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos^2 u' \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \cos^2 u'' \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \cos u \cos u' \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \right. \\
& \left. + 2 \cos u \cos u'' \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} + 2 \cos u' \cos u'' \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} \right) d\omega,
\end{aligned}$$

Mais l'intégrale

$$2 \iint \cos u \frac{\partial f}{\partial x}\, d\omega = 2 \iint \cos u \frac{\partial f}{\partial x} \sin u\, du\, dv$$

peut se transformer; en intégrant par parties d'abord, par rapport à u, en observant que les variables sous le signe f sont

$$x + \mathrm{V} t \cos u,\quad y + \mathrm{V} t \sin u \sin v,\quad z + \mathrm{V} t \sin u \cos v,$$

on a

$$2\int\frac{\partial f}{\partial x}\sin u\cos u\,du$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}\sin^2 u+Vt\int\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin u-\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cos u\sin v-\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\cos u\cos v\right)\sin^2 u\,du;$$

l'intégrale doit être prise de $u=0$ à $u=\pi$, ce qui annule le premier terme; multipliant par dv et intégrant,

$$2\iint\frac{\partial f}{\partial x}\cos u\,d\omega$$
$$=Vt\iint\left(\sin^2 u\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\cos u\cos u'\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}-\cos u\cos u''\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)d\omega.$$

Des transformations identiques s'appliquent aux intégrales

$$\iint\cos u'\,\frac{\partial f}{\partial y}\,d\omega\quad\text{et}\quad\iint\cos u''\,\frac{\partial f}{\partial z}\,d\omega$$

qui entrent dans la valeur de $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$, et il reste alors

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=V^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right).$$

D'ailleurs, si une fonction φ satisfait à cette équation, sa dérivée par rapport au temps y satisfait aussi, et en posant

$$\varphi=\iint f(x+Vt\cos u,\ y+Vt\cos u',\ z+Vt\cos u'')\,t\,d\omega$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\iint F(x+Vt\cos u,\ y+Vt\cos u',\ z+Vt\cos u'')\,t\,d\omega,$$

on satisfera encore à l'équation proposée, et, sous cette forme, il est clair que les valeurs de la fonction φ et de sa dérivée pour $t=0$ sont

$$\varphi=4\pi F(x,y,z),\qquad\frac{\partial\varphi}{\partial t}=4\pi f(x,y,z)$$

NOTE II

Sur la réflexion;

PAR M. A. POTIER.

I.

Le lecteur est prié de se reporter aux §§ 611, 615 et 616, dont on adoptera les notations; Maxwell y supposant μ constant, on le fera égal à l'unité, et l'on étudiera d'abord de véritables diélectriques pour lesquels $C = 0$, K pouvant être variable, de sorte qu'on aura

$$(1) \qquad f = \frac{K}{4\pi} P \ldots, \qquad u = \frac{df}{dt} \ldots, \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{dx} \ldots,$$

et

$$(2) \qquad 4\pi u = \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \ldots, \qquad a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \ldots;$$

on déduit de là

$$(3) \qquad \frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} \ldots,$$

et

$$(4) \quad \begin{cases} K \dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right), \\ K \dfrac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial y}\right), \\ K \dfrac{\partial^2 R}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial R}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right). \end{cases}$$

On suppose que le plan $z = 0$ divise l'espace en deux parties, qu'au-dessus de ce plan $K = K_1$, tandis qu'au-dessous $K = K_2$, et qu'enfin K passe très rapidement d'une valeur à l'autre au voisinage du plan $z = 0$, les quantités P, Q, R ne pourront rester finies que si

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial t}$$

ont des dérivées finies; si l'on suppose que l'épaisseur de la couche de transition aille en diminuant indéfiniment, les valeurs de $\frac{\partial a}{\partial t}$ et de $\frac{\partial b}{\partial t}$ seront les mêmes des deux côtés du plan $z = 0$.

De même, pour que a et b restent finis, il faudra que les valeurs de P et Q soient aussi les mêmes des deux côtés du plan.

On conclut de là que, si l'espace est occupé par deux diélectriques séparés par le plan $z = 0$, les forces électromotrices devront satisfaire dans chacun d'eux aux équations (4), que leurs composantes parallèles à la surface de séparation, ainsi que les forces magnétiques, devront être continues. Il en résultera que, si une onde électromagnétique rencontre cette surface, les rapports des amplitudes des forces électromotrices dans les ondes incidentes et réfléchies seront données par les formules de Fresnel, les déplacements électriques étant perpendiculaires au plan de polarisation.

On peut encore établir ces conditions de continuité par un raisonnement tout différent. Les quantités F, G, H sont les potentiels en un point de l'espace de distributions matérielles représentées par u, v et w; si en aucun point les courants ne deviennent infinis, F, G, H doivent être finis et continus, ainsi que leurs dérivées. La force magnétique, que la distribution des courants soit continue ou non, sera donc continue. D'autre part, dans tout diélectrique homogène, $\Delta_2\Psi$ est nul ou indépendant de t, ce qui revient au même pour les perturbations périodiques étudiées ici : il ne peut y avoir d'électrisation (de la nature de celle que Maxwell nomme *apparente*, § 83) qu'aux surfaces de contact des diélectriques entre eux, et il y en a nécessairement quand le déplacement n'est pas tangent à la surface; le potentiel Ψ dû à cette électrisation est continu, ainsi que ses dérivées suivant des directions tangentes à cette surface, mais la dérivée suivant la normale est discontinue, la charge électrique apparente étant $\frac{1}{4\pi}$ de la variation de cette dérivée. Par suite, dans le cas particulier traité plus haut, P et Q devront être continus et R discontinu à travers la surface $z = 0$. Le déplacement h normal à la surface doit avoir la même valeur des deux côtés du plan $z = 0$; si R_1 et R_2 représentent ces deux valeurs de R, on a donc

$$4\pi h = K_1 R_1 = K_2 R_2,$$

et, comme on a aussi

$$R_1 = -\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}, \qquad R_2 = -\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z},$$

il en résulte

$$R_1 - R_2 = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\right)_0 = -4\pi\sigma' = 4\pi h\left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right),$$

en représentant par σ' la densité apparente.

D'ailleurs, P et Q étant continus, l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

montre que $\frac{\partial R}{\partial z}$ est aussi continu; mais ces nouvelles conditions de continuité rentrent dans les précédentes.

II.

Le problème de la réflexion ordinaire consiste à trouver dans le milieu supérieur P, Q, R conciliables avec la propagation d'une onde unique dans le milieu inférieur. Le plan des xz étant pris perpendiculaire au plan de cette onde,

les variables sont dans le milieu inférieur des fonctions périodiques de $lx - n_2 z - \alpha t$ et seront les parties réelles d'imaginaires de la forme $Ae^{i(lx-p_2z-\alpha t)}$; expressions où

$$\alpha = \frac{2\pi}{\tau}, \qquad l = \frac{2\pi \sin i_2}{\lambda_2}, \qquad n_2 = \frac{2\pi \cos i_2}{\lambda_2},$$

en désignant par τ la période, λ_2 la longueur d'onde, et i_2 l'angle de l'onde avec le plan $z = 0$.

On satisfera aux équations (4) pour le milieu inférieur, en prenant pour P, Q, R des expressions de cette forme; en désignant par p_2, q_2, r_2 les coefficients de l'exponentielle, on devra avoir les relations

$$(5) \qquad K_2\lambda_2^2 = \tau^2 \qquad \text{ou} \qquad K_2\alpha^2 = l^2 + n_2^2, \qquad p_2 l - r_2 n_2 = 0.$$

Pour le milieu supérieur, on posera

$$P_1 = p_1 e^{i(l_1 x - p_1 z - \alpha t)} + p'_1 e^{i(l_1 x + n_1 z - \alpha t)},$$

et de même pour Q_1 et R_1; ces expressions satisferont aux équations (4) si

$$(6) \qquad K_1\alpha^2 = l_1^2 + n_1^2, \qquad p_1 l_1 - r_1 n_1 = p'_1 l_1 + r'_1 n_1 = 0$$

ou, si l'on pose

$$l_1 = \frac{2\pi \sin i_1}{\lambda_1}, \qquad n_1 = \frac{2\pi \cos i_1}{\lambda_1},$$

$$K_1\lambda_1^2 = \tau^2.$$

Pour la surface de séparation $z = 0$, on devra avoir

$$P_1 = P_2, \qquad Q_1 = Q_2, \qquad \left(\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x}\right),$$

soit

$$l_1 = l_2$$

et

$$(7) \qquad p_1 + p'_1 = p_2, \qquad n_1(p_1 - p'_1) + l(r_1 + r'_1) = n_2 p_2 + l r_2,$$

$$(8) \qquad q_1 + q'_1 = q_2, \qquad n_1(q_1 - q'_1) = n_2 q_2.$$

Comme il a été annoncé plus haut, en écrivant les conditions

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)_0 = \left(\frac{dR_2}{dz}\right)_0 \qquad \text{et} \qquad K_1 R_1 = K_2 R_2,$$

on aurait

$$(9) \qquad K_1(r_1 + r'_1) = K_2 r_2, \qquad n_1(r_1 - r'_1) = n_2 r_2,$$

qui se réduisent aux relations (7) quand on remplace les r par leurs valeurs déduites des équations (5) et (6).

Ces relations (7) et (8) sont les formules de Fresnel; si l'on désigne par ϖ l'amplitude de la composante de la force électromotrice parallèle au plan d'inci-

dence, on a

$$p_1 = \varpi_1 \cos i, \qquad p' = \varpi'_1 \cos i, \qquad r_1 = \varpi_1 \sin i, \qquad r'_1 = \varpi'_1 \sin i,$$

tandis que q est l'amplitude de la composante parallèle à ce plan; les équations (7) et (8) s'écrivent alors

$$\frac{p_1 - p'_1}{p_1 + p_1} = \frac{\varpi_1 - \varpi'_1}{\varpi_1 + \varpi'_1} = \frac{n_2}{n_1}\frac{K_1}{K_2} = \frac{\cos i_2 \sin i_2}{\cos i_1 \sin i_1},$$

$$\frac{q_1 - q'_1}{q_1 + q'_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos i_2 \sin i_2}{\cos i_1 \sin i_1}.$$

Lorsque les rapports de p'_1 à p', de q'_1 à q sont réels, les forces électromotrices dans les ondes électriques incidentes et réfléchies sont représentées par

$$p_1 \cos(lx - pz - \alpha t), \qquad p'_1 \cos(lx + pz - \alpha t)$$

et n'ont pas de différence de phase.

Mais si n_2 est imaginaire, il n'en est plus de même; si l^2 est plus grand que $K_2\alpha^2$, on posera

$$n_2 = \nu_2 i = i\sqrt{l^2 - K_2\alpha^2} = i\frac{2\pi}{\lambda_1}\sqrt{\sin^2 i - \frac{K_2}{K_1}}$$

et l'on aura

$$\frac{q'_1}{q_1} = \frac{n_1 - \nu_2 i}{n_1 + \nu_2 i} = \frac{(n_1 - \nu_2 i)^2}{n_1^2 + \nu_2^2} = e^{-2\pi i\varphi},$$

si $\operatorname{tang}\pi\varphi = \frac{\nu_2}{n}$.

La partie réelle de Q_1 sera alors

$$q_1[\cos(lx - pz - \alpha t) + \cos(lx - pz - \alpha t - 2\pi\varphi)].$$

De même,

$$\frac{p'_1}{p_1} = \frac{\varpi'_1}{\varpi_1} = \frac{K_2 n_1 - K_1 \nu_2 i}{K_2 n_1 + K_1 \nu_2 i} = e^{-2\pi i\psi},$$

si $\operatorname{tang}\pi\psi = \frac{K_1\nu_2}{K_2 n_1}$, et la partie réelle de P_1 sera

$$p_1[\cos(lx - n_1 z - \alpha t) + \cos(lx - n_1 z - \alpha t - 2\pi\psi)],$$

c'est-à-dire que la réflexion sera totale, que la composante de la force électromotrice réfléchie aura un retard φ ou ψ sur la composante incidente, suivant qu'on considère la composante perpendiculaire ou parallèle au plan d'incidence. Dans le milieu inférieur, il n'y aura pas d'onde proprement dite, les composantes de la force électromotrice admettant le facteur $e^{p_2 z}$, où p_2 est imaginaire. Ce sont encore les formules de Fresnel pour la réflexion totale.

III.

Pour achever la résolution du problème au point de vue électrique, il reste à déterminer les F, G, H et Ψ. Or Ψ est continu à travers la surface $z = 0$, $\nabla^2\Psi$ est nul dans les deux milieux, et

$$\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\right)_0 = 4\pi\left(\frac{1}{K} \qquad \frac{1}{K_2}\right)K_2 r_2 e^{i(lx-\alpha t)};$$

on en déduit, pour le milieu supérieur,

$$\Psi_1 = \frac{1}{2l} K_2 r_2 e^{-lx+i(lz-at)} \times \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right),$$

et, pour le milieu inférieur,

$$\Psi_2 = \frac{1}{2l} K_2 r_2 e^{lx+i(lz-at)} \times \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} aF_1 &= -iP_1 + l\Psi_1, \\ aG_1 &= -iQ_1, \\ aH_1 &= -i(R_1 - l\Psi_1), \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} aF_2 &= -iP_2 + l\Psi_2, \\ aG_2 &= -iQ_2, \\ aH_2 &= -i(R_2 + l\Psi_2), \end{aligned}$$

les parties réelles de ces expressions devant être seules prises en considération avec celles des P, Q, R.

IV.

Les équations de condition établissant la continuité des P, Q, α, b sont encore nécessaires et suffisantes lorsque le milieu inférieur est cristallin; si l'on se donne la direction d'une onde, dans le milieu cristallin, et celle du déplacement qu'elle propage, la vitesse de propagation est déterminée également dans les équations (7) et (8); n, l, p_2, r_2 étant données, on en déduira aisément p_1, p'_1, q_1, q'_1, c'est-à-dire l'orientation qu'il faut donner à la force électromotrice dans l'onde incidente pour qu'une seule onde réfractée prenne naissance; on trouvera deux orientations satisfaisant à cette condition, comme l'indique l'expérience lorsqu'il s'agit de vibrations lumineuses.

V.

Si le milieu inférieur a, avec un pouvoir inducteur K_2, une conductibilité C, on devra poser

$$u = CP + \frac{K_2}{4\pi} \frac{\partial P}{\partial t},$$

et les équations (4) deviendront

$$(4\,bis) \qquad 4\pi C \frac{\partial P}{\partial t} + K_2 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right).$$

Elles admettent encore, pour des variations périodiques de la force électromotrice, des intégrales de la forme

$$P_2 = p_2 e^{i(l_2 x - n_2 z - at)},$$

les constantes l_2, n_2, α satisfaisant à la condition

$$(5\,bis) \qquad l_2^2 + n_2^2 = K_2 \alpha^2 + 4\pi C i \alpha,$$

tandis qu'on devra avoir

$$p_2 l = n_2 r_2;$$

n_1 est donc imaginaire, et, pour que les forces s'annulent pour de grandes valeurs négatives de z, le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans n devra être positif.

Dans le milieu supérieur, on a

$$l = \sin i \times \alpha\sqrt{K_1}, \qquad n = \cos i \times \alpha\sqrt{K_1};$$

on posera

$$K_1\Theta^2 e^{2ui} = K_2 + \frac{4\pi C i}{\alpha} = K_2 + 2\tau C i,$$

$$n_1 = U e^{ui}\alpha\sqrt{K_1},$$

U et u étant positifs et déterminés par l'équation (5 *bis*) qui devient

$$U^2 e^{2ui} = \Theta^2 e^{-2ti} - \sin^2 i.$$

Les conditions de continuité seront toujours les mêmes, et l'on devra encore avoir

$$\frac{p_1 - p'_1}{p_1 + p'_1} = \frac{n_2}{\Theta^2 e^{2ti} n_1},$$

$$\frac{q_1 - q'_1}{q_1 + q'_1} = \frac{n_2}{n_1};$$

d'où

$$\frac{p'_1}{p_1} = \frac{n_1\Theta^2 e^{2ti} - n_2}{n_1\Theta^2 e^{2ti} + n_2} = \frac{\cos i\,\Theta^2 e^{2ti} - U e^{ui}}{\cos i\,\Theta^2 e^{2ti} - U e^{ui}} = A' e^{-2i\pi\psi},$$

$$\frac{q'_1}{q_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{\cos i - U e^{ui}}{\cos i + U e^{ui}} = A e^{-2i\pi\varphi}.$$

Les phases des forces électromotrices dans l'onde réfractée seront donc différentes ; si l'onde incidente est représentée par

$$p_1 \cos(lx - n_1 z - \alpha t),$$

$$q_1 \cos(lx - n_1 z - \alpha t),$$

les forces électromotrices dans l'onde réfléchie seront représentées par

$$A' p_1 \cos(lx - n_1 z - \alpha t - 2\pi\psi),$$

$$A\, q_1 \cos(lx - n_1 z - \alpha t - 2\pi\varphi).$$

Les valeurs de A et A' sont données par les formules

$$A'^2 = \frac{\Theta^4\cos^2 i + U^2 - 2U\Theta^2\cos i\cos(2t - u)}{\Theta^4\cos^2 i + U^2 + 2U\Theta^2\cos i\cos(2t - u)},$$

$$A^2 = \frac{\cos^2 i + U^2 - 2U\cos i\cos u}{\cos^2 i + U^2 + 2U\cos i\cos u}$$

et

$$\frac{A'^2}{A^2} = \frac{\sin^4 i + U^2\cos^2 i - 2U\cos i\sin^2 i\cos u}{\sin^4 i + U^2\cos^2 i + 2U\cos i\sin^2 i\cos u},$$

et enfin $\psi - \varphi$ sera déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang} 2\pi(\psi - \varphi) = \frac{2U\cos i\sin^2 i\sin u}{\sin^4 i - U^2\cos^2 i},$$

qui s'obtient facilement en écrivant que $2\pi(\psi - \varphi)$ est l'argument de

$$\frac{q_1'}{q_1} : \frac{p_1'}{p_1} = \frac{l^2 + n_1 n_2}{l^2 - n_1 n_2} = \frac{\sin^2 i + \cos i\, U e^{\omega i}}{\sin^2 i - \cos i\, U e^{\omega i}}.$$

Ces formules sont celles données par Cauchy et vérifiées par Jamin pour la réflexion métallique. Si l'on observe l'incidence principale I pour laquelle la différence de phase est $\frac{1}{4}$ et la valeur, pour cette incidence, du rapport $\frac{A'}{A} = \tan\beta$,

$$U \cos I = \sin^2 I \qquad \text{et} \qquad \beta = 2u;$$

d'où l'on déduit

$$\Theta^2 \cos 2\varepsilon = \sin^2 I (\tan^2 I \cos\tfrac{1}{2}\beta + 1) = \frac{K_2}{K_1},$$

$$\Theta^2 \sin 2\varepsilon = \sin^2 I (\tan^2 I \sin\tfrac{1}{2}\beta) = \frac{4\pi C}{K_1 \omega}.$$

VI.

L'identité des formules déduites de la théorie de Maxwell, avec des formules vérifiées par l'expérience, en ce qui concerne les vibrations lumineuses, est un argument de grande importance en faveur de cette théorie. Cependant, les valeurs numériques des constantes, déterminées par les méthodes optique et électrométrique, ne s'accordent pas; le désaccord, notable pour les diélectriques transparents, est encore plus marqué pour les métaux. Pour l'argent, par exemple, les valeurs de K_2, déduites des valeurs observées de I et β, seraient négatives, ce qui paraît dépourvu de sens. La théorie ne peut donc être considérée comme complète; elle ne tient, d'ailleurs, pas compte de la dispersion qu'on pourrait introduire en suivant la voie indiquée par Maxwell lui-même, dans les Chapitres IX et X, ce qui reviendrait à considérer les diverses constantes K et C comme fonctions de la longueur d'onde. (A. P.)

CHAPITRE XXI.

ACTION DES AIMANTS SUR LA LUMIÈRE.

806. Lorsqu'on cherche à établir une relation entre les phénomènes électriques et magnétiques et ceux de la lumière, le progrès le plus important que l'on puisse faire consiste à découvrir quelque cas où une des séries de phénomènes est modifiée par l'autre. Pour rechercher de pareils phénomènes, nous devons être guidés par la connaissance que nous avons pu acquérir précédemment, des formes mathématiques ou géométriques des quantités que nous voulons comparer. Ainsi, si nous essayons, comme Mme Somerville, d'aimanter une aiguille par l'action de la lumière, nous devons nous souvenir que la distinction du nord et du sud magnétique est une simple affaire de direction, et que tout serait immédiatement inversé si l'on changeait certaines conventions relatives à l'usage des signes mathématiques. En magnétisme, il n'y a rien d'analogue à ces phénomènes d'électrolyse, qui nous permettent de distinguer l'électricité positive de l'électricité négative par ce fait que l'oxygène se dégage à un pôle de la pile et l'hydrogène à l'autre.

Ainsi, nous ne devons pas attendre qu'en faisant tomber de la lumière sur un des bouts d'une aiguille, ce bout deviendra un pôle d'un certain nom; car les deux pôles ne diffèrent pas l'un de l'autre, comme la lumière diffère de l'obscurité.

Nous pourrions attendre un meilleur résultat, en faisant tomber sur les bouts de l'aiguille de la lumière polarisée circulairement, de la lumière dextrogyre à un bout, de la lumière lévogyre à l'autre bout; car on peut dire qu'à certains égards il y a la même relation entre ces deux sortes de lumière qu'entre les deux pôles d'un aimant. Et cependant l'analogie est encore incomplète, car ces deux rayons, en se combinant, ne se neutralisent pas, mais donnent un rayon polarisé rectiligne.

Faraday, qui était tout à fait familier avec la méthode consistant à étudier les déformations des corps transparents au moyen de la lumière polarisée, fit un grand nombre d'expériences dans l'espoir de découvrir quelque action produite sur la lumière polarisée, à son passage dans des milieux où se produit la conduction électrolytique

ou l'induction diélectrique (¹). Il ne réussit à découvrir aucun effet de ce genre, quoique ces expériences fussent dans les meilleures conditions pour découvrir des effets de tension, la force électrique ou le courant étant perpendiculaire à la direction du rayon, et à 45° du plan de polarisation. Faraday répéta ces expériences de bien des manières, sans découvrir aucune action exercée sur la lumière par les courants électrolytiques ou l'induction électrostatique.

Mais il réussit à établir une relation entre le magnétisme et la lumière, et les expériences qu'il fit en ce sens sont décrites dans la dix-neuvième série de ses *Experimental researches*. Nous prendrons la découverte de Faraday comme point de départ pour continuer notre étude de la nature du magnétisme : nous allons donc décrire le phénomène qu'il a observé.

807. Un rayon de lumière polarisée rectiligne est transmis à travers un milieu diamagnétique transparent; on détermine la position du plan de polarisation à la sortie du milieu, en cherchant la position pour laquelle un analyseur éteint le rayon. On fait alors agir une force magnétique de façon que la direction de la force coïncide dans le milieu avec la direction du rayon. La lumière reparaît aussitôt, et s'éteint de nouveau si l'on fait tourner l'analyseur d'un certain angle : c'est-à-dire que la force magnétique a pour effet de faire tourner le plan de polarisation autour de la direction du rayon comme axe, d'un angle mesuré par l'angle dont il faut faire tourner l'analyseur pour éteindre de nouveau le rayon.

808. L'angle dont a tourné le plan de polarisation est proportionnel :

1° A la distance parcourue par le rayon dans le milieu. Donc la position du plan de polarisation change, d'une manière continue, depuis l'entrée jusqu'à la sortie du milieu;

2° A l'intensité de la composante de la force magnétique suivant la direction du rayon;

3° La grandeur de la rotation dépend de la nature du milieu. On n'a point encore observé de rotation quand le milieu est de l'air ou un autre gaz (²).

(¹) *Experimental researches*, p. 951-954 et 2216-2220.

(²) [Cette rotation a été observée dans l'air et les gaz par MM. Henri Becquerel, Bichat, Lippich, Kundt et Röntgen]. (P.)

809. Dans les milieux diamagnétiques, le plan de polarisation tourne dans le sens dans lequel un courant positif devrait circuler autour du rayon pour produire une force de même sens que celle qui existe effectivement dans le milieu.

Mais Verdet a découvert que dans certains milieux ferromagnétiques, par exemple dans une solution concentrée de perchlorure de fer, dans l'éther ou l'esprit-de-bois, la rotation s'effectue en sens inverse du courant qui produirait la force magnétique.

Il résulte de là que les substances ferromagnétiques et diamagnétiques ne diffèrent pas seulement en ce que la « perméabilité magnétique » est chez les unes plus grande, et chez les autres plus petite que dans l'air, mais que les propriétés de ces deux classes de corps sont réellement opposées.

La propriété qu'acquiert une substance, sous l'influence de la force magnétique, de faire tourner le plan de polarisation de la lumière, n'est pas exactement proportionnelle à sa propriété ferromagnétique ou diamagnétique. Il y a, en effet, des exceptions à cette règle que la rotation est positive pour les diamagnétiques, et négative pour les ferromagnétiques. Ainsi, le chromate neutre de potasse est diamagnétique et produit une rotation négative.

810. Il y a d'autres substances qui, sans intervention d'une force magnétique, font tourner vers la droite ou vers la gauche le plan de polarisation du rayon qui les traverse. Chez les unes, cette propriété est liée à l'existence d'un axe : c'est le cas du quartz. Dans d'autres, la propriété est indépendante de la direction du rayon : telles sont la térébenthine, la solution du sucre, etc. Mais, dans toutes ces substances, si le plan de polarisation du rayon transmis tourne dans le milieu suivant une hélice à droite, il tourne encore suivant une hélice à droite s'il est transmis dans le milieu en sens inverse. Lorsque l'observateur a interposé le milieu sur le trajet du rayon, le sens dans lequel il doit tourner son analyseur pour éteindre le rayon reste le même relativement à lui, observateur, que le rayon lui vienne du nord ou du sud, c'est-à-dire que le sens de la rotation est renversé dans l'espace lorsque la direction du rayon est elle-même renversée. Mais, quand la rotation est produite par la force magnétique, le sens de cette rotation reste le même dans l'espace, que le rayon aille vers le nord ou vers le sud. Si le milieu appartient à la classe positive, la rotation est toujours dans le sens du courant positif qui produit ou qui pourrait produire l'état magnétique actuel du champ; si le milieu ap-

partient à la classe négative, la rotation est en sens inverse de ce courant.

Il suit de là que, si un rayon de lumière, ayant traversé un milieu du nord au sud, se réfléchit sur un miroir et traverse de nouveau le milieu du sud au nord, la rotation est doublée quand elle est due à une action magnétique. Mais, si la rotation ne dépend que de la nature du milieu, comme dans la térébenthine, etc., le rayon, réfléchi de nouveau à travers le milieu, sort dans le même plan où il était entré au début; la rotation qui a été produite par le premier passage dans le milieu est exactement neutralisée par le second passage.

811. L'explication physique de ce phénomène présente de grandes difficultés, et l'on ne saurait dire que ces difficultés aient été surmontées jusqu'à ce jour, soit en ce qui concerne la rotation magnétique, soit en ce qui est de la rotation naturelle due à certains milieux. Nous pouvons, toutefois, préparer la voie à cette explication par l'analyse des faits observés.

C'est un théorème bien connu de Cinématique que deux vibrations circulaires uniformes, de même amplitude, de même période, s'effectuant dans le même plan, mais avec des sens contraires de rotation, équivalent, en se composant, à une vibration rectiligne. La période de cette vibration rectiligne est égale à celle des vibrations circulaires, son amplitude est double, et sa direction est celle de la ligne qui joint les points où se rencontreraient deux mobiles exécutant les vibrations circulaires de sens contraires, le long du même cercle. Si donc une des vibrations circulaires a sa phase accélérée, la vibration rectiligne tourne, dans le sens de cette vibration circulaire, d'un angle égal à la demi-accélération de la phase.

On peut aussi montrer, par des expériences optiques directes, que deux rayons de lumière polarisés circulairement en sens contraires et de même intensité forment en se superposant un rayon polarisé rectiligne; et si, par un moyen quelconque, on accélère la phase d'un de ces deux rayons polarisés circulairement, le plan de polarisation du rayon résultant tourne de la moitié de l'angle d'accélération de la phase.

812. Nous pouvons donc exprimer de la manière suivante le phénomène de la rotation du plan de polarisation : un rayon polarisé rectiligne tombe sur le milieu. Ce rayon est équivalent à deux rayons polarisés circulairement, l'un tournant à droite, l'autre tournant à gauche, relativement à l'observateur. Après avoir traversé le milieu,

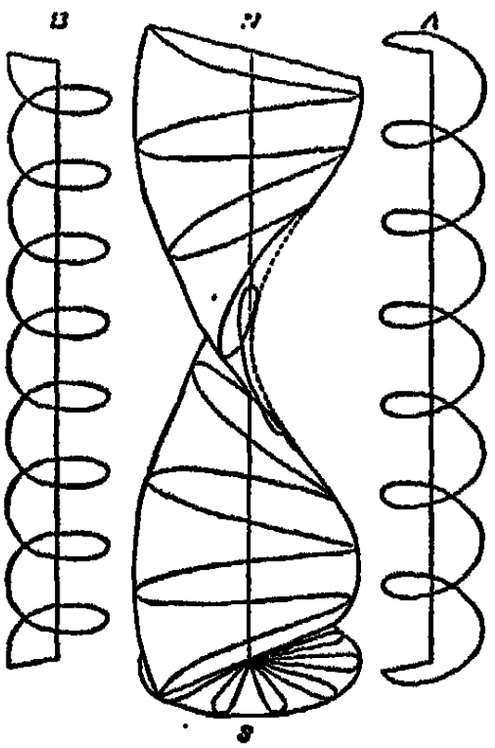
le rayon est toujours polarisé rectilignement, mais le plan de polarisation a tourné vers la droite de l'observateur, par exemple. Donc, des deux rayons polarisés circulairement, celui qui tourne à droite doit avoir eu sa phase accélérée relativement à l'autre, pendant son passage dans le milieu.

En d'autres termes, le rayon qui tourne vers la droite a exécuté dans le milieu un plus grand nombre de vibrations et, par suite, y a une longueur d'onde plus petite que le rayon gauche qui a la même période de rotation.

Cette manière d'énoncer les faits est entièrement indépendante de toute théorie particulière sur la lumière; car, bien que nous employions les mots de *longueur d'onde, polarisation circulaire,* etc., qui peuvent être liés, dans notre esprit, à une forme particulière de la théorie ondulatoire, le raisonnement est indépendant de cette relation et ne repose que sur des faits prouvés par l'expérience.

813. Considérons maintenant la conformation d'un de ces rayons, à un instant donné. Une onde, dont chaque point exécute un mouvement circulaire, peut être représentée par une hélice ou une vis. Si l'on fait tourner la vis sur son axe, sans mouvement longitudinal, chacun de ses points décrira un cercle et, en même temps, la

Fig. 74.



propagation de l'onde sera figurée par le mouvement longitudinal apparent des parties du filet de la vis qui sont situées de la même manière. Il est facile de voir que, si la vis est une vis à droite, et si l'observateur est placé au bout de la vis vers lequel se propage l'ondulation, le mouvement de la vis lui paraîtra se faire à gauche, c'est-à-dire en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre. C'est pour cela qu'un tel rayon a été appelé, par les écrivains français d'abord, et maintenant par tout le monde scientifique, un *rayon polarisé circulairement gauche*.

De même un rayon polarisé circulairement droit est représenté par une hélice à gauche. Sur la *fig.* 74, l'hélice à droite A (à droite de la figure) représente un rayon gauche, et l'hélice à gauche B (à gauche de la figure) représente un rayon droit.

814. Considérons maintenant deux pareils rayons, ayant dans le milieu la même longueur d'onde : ils sont géométriquement semblables à tous égards, sauf que l'un est la *perversion* de l'autre, son image dans une glace. Mais l'un d'eux, A par exemple, a une période de rotation plus courte que l'autre. Si donc le mouvement est dû uniquement aux forces mises en jeu par le déplacement, cela veut dire que, pour un même déplacement, des forces plus grandes sont mises en jeu quand la configuration est semblable à celle de A que quand elle est semblable à celle de B; donc, dans ce cas, le rayon gauche est accéléré par rapport au rayon droit, et il en sera ainsi, que le rayon marche du nord au sud ou du sud au nord.

Telle est donc l'explication du phénomène qui se produit dans la térébenthine, etc. Dans ces milieux, le déplacement produit par un rayon polarisé circulairement met en jeu des forces antagonistes plus grandes quand la configuration est semblable à celle de A que quand elle est semblable à celle de B. La force dépend donc de la configuration seule, et non de la direction, du mouvement.

Mais, dans un milieu diamagnétique soumis à l'action du magnétisme, dans la direction SN des deux vis A et B, celle-là tourne toujours le plus vite, dont l'œil, regardant de S vers N, voit le mouvement dans le même sens que celui des aiguilles d'une montre. Ainsi, pour des rayons allant de S vers N, c'est le rayon droit B; pour des rayons allant de N vers S, c'est le rayon gauche A qui marche le plus vite.

815. Arrêtons maintenant notre attention sur un seul des deux rayons. L'hélice B a exactement la même configuration, qu'elle repré-

sente un rayon allant de S vers N ou de N vers S; mais, dans le premier cas, les rayons marchent plus vite et, par suite, l'hélice tourne plus rapidement. Donc, des forces plus grandes sont mises en jeu quand l'hélice tourne dans un sens que quand elle tourne dans l'autre. Donc, les forces ne dépendent pas seulement de la conformation du rayon, mais aussi de la direction du mouvement des parties qui le composent.

816. La perturbation qui constitue la lumière, quelle que puisse être sa nature physique, est une quantité vectorielle perpendiculaire à la direction du rayon. C'est ce qui résulte de ce fait, que deux rayons lumineux peuvent interférer et, dans certaines conditions, produire de l'obscurité; et de cet autre fait, que deux rayons polarisés dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre ne peuvent interférer; car, puisque l'interférence dépend de la position angulaire des plans de polarisation, la perturbation doit être une quantité dirigée ou vecteur; et, puisque l'interférence cesse de se produire quand les plans de polarisation sont à angle droit, le vecteur qui représente la perturbation doit être perpendiculaire à la ligne d'intersection de ces plans, c'est-à-dire à la direction du rayon.

817. Étant un vecteur, la perturbation peut être décomposée en composantes parallèles aux x et aux y, l'axe des z étant pris parallèlement à la direction du rayon. Soient ξ et η ces composantes. Dans le cas d'un rayon de lumière homogène polarisée circulairement,

$$\xi = r\cos\theta, \qquad \eta = r\sin\theta, \tag{1}$$

où

$$\theta = nt - qz + \alpha. \tag{2}$$

Dans ces expressions, r désigne la grandeur du vecteur et θ l'angle qu'il fait avec la direction de l'axe des x.

La période τ de la perturbation est telle que

$$n\tau = 2\pi. \tag{3}$$

Sa longueur d'onde λ est donnée par

$$q\lambda = 2\pi. \tag{4}$$

La vitesse de propagation est $\frac{n}{q}$.

La phase de la perturbation est α, quand t et z sont égaux à zéro.

La lumière polarisée circulairement est droite ou gauche, selon que q est négatif ou positif.

Ses vibrations sont dans le sens positif ou dans le sens négatif de rotation du plan des xy, suivant que n est positif ou négatif.

La lumière se propage dans le sens positif ou dans le sens négatif de l'axe des z, suivant que n et q sont ou non de même signe.

Dans tous les milieux, n varie en même temps que q, et $\frac{dn}{dq}$ est toujours de même signe que $\frac{n}{q}$.

Donc, si, pour une valeur numérique donnée de n, la valeur de $\frac{n}{q}$ est plus grande quand n est positif que quand n est négatif, il en résulte que, pour une valeur de q donnée en grandeur et signe, la valeur positive de n est plus grande que sa valeur négative.

Or, voici ce que l'on observe dans un milieu diamagnétique soumis à l'action d'une force magnétique γ dans la direction des z. De deux rayons polarisés circulairement de période donnée, celui-là est accéléré dont la rotation dans le plan des xy est dans la direction positive. Donc, de deux rayons polarisés circulairement, gauches et de même longueur d'onde dans le milieu, celui-là est accéléré dont la rotation dans le plan des xy est positive, c'est-à-dire qui se propage dans la direction positive des z, soit du sud vers le nord. Nous avons donc à rendre compte de ce fait, que, donnant les valeurs de q et r dans les équations du système, il y a deux valeurs de n qui satisfont à ces équations, l'une positive et l'autre négative, et la positive plus grande numériquement que la négative.

818. Nous pouvons obtenir les équations du mouvement en considérant l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du milieu. L'énergie potentielle du système dépend de sa conformation, c'est-à-dire des positions relatives de ses parties. En tant qu'elle dépend de la perturbation due à la lumière polarisée circulairement, elle ne doit être fonction que de l'amplitude r et du coefficient de torsion q. Elle peut être différente pour des valeurs positives et négatives de q égales en valeur absolue, et, sans doute, c'est ce qui arrive dans les milieux qui possèdent naturellement le pouvoir de faire tourner le plan de polarisation.

L'énergie cinétique T du système est une fonction homogène du second degré des vitesses du système, les coefficients des différents termes étant des fonctions des coordonnées.

819. Considérons maintenant la condition dynamique pour que le rayon ait une intensité constante, c'est-à-dire que r soit constant.

L'équation de Lagrange, qui donne la force en fonction de r, devient

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \tag{5}$$

Or r est constant, le premier terme s'annule. Nous avons donc l'équation

$$-\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0, \tag{6}$$

où q est supposé donné, et nous devons déterminer la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, que l'on peut désigner par sa valeur actuelle n.

L'énergie cinétique T renferme un terme en n^2; d'autres termes, où paraissent les produits de n par les autres vitesses : le reste des termes est indépendant de n. L'énergie potentielle V est tout à fait indépendante de n. L'équation est donc de la forme

$$An^2 + Bn + C = 0. \tag{7}$$

Cette équation, étant du second degré, donne deux valeurs de n. L'expérience montre que ces deux valeurs sont réelles, l'une positive et l'autre négative, et la positive plus grande en valeur absolue que la négative. Donc, si A est positif, B et C doivent être négatifs, car, n_1 et n_2 étant les racines de l'équation,

$$A(n_1 + n_2) + B = 0. \tag{8}$$

Le coefficient B ne peut donc pas être nul, au moins quand le milieu est soumis à une action magnétique. Nous devons donc considérer l'expression Bn, qui est la partie de l'énergie cinétique où figure la première puissance de n, vitesse angulaire de la perturbation.

820. Tous les termes de T sont du second ordre par rapport aux vitesses. Donc les termes qui renferment n doivent renfermer quelque autre vitesse. Or cette autre vitesse ne peut être ni $\dot{r}$ ni $\dot{q}$, puisque, dans le cas que nous considérons, r et q sont constants. C'est donc une vitesse existant dans le milieu, indépendamment du mouvement qui constitue la lumière. De plus, ce doit être une quantité ayant avec n une relation telle qu'en la multipliant par n le résultat soit une quantité scalaire; car, T étant une quantité scalaire, ses termes ne peuvent être que des quantités scalaires. Donc cette vitesse doit être dans la même direction que n ou dans la direction contraire,

c'est-à-dire que ce doit être une *vitesse angulaire* relative à l'axe des z.

Or, cette vitesse ne peut être indépendante de la force magnétique; car, si elle se rapportait à une direction fixe dans le milieu, les phénomènes seraient différents quand on retourne le milieu bout pour bout, ce qui n'est pas le cas.

Nous sommes donc amenés à cette conclusion, que cette vitesse est obligatoirement liée à la force magnétique, dans le milieu où se manifeste la rotation magnétique du plan de polarisation.

821. Jusqu'ici, nous avons été obligés de nous servir d'un langage qui rappelle peut-être trop l'hypothèse ordinaire que l'on fait sur le mouvement dans la théorie ondulatoire; mais il est facile d'énoncer nos résultats sous une forme indépendante de cette hypothèse.

Quoi que puisse être la lumière en chaque point de l'espace, il se produit quelque chose, déplacement, rotation ou autre mouvement que l'on n'a pas encore imaginé, et ce quelque chose est certainement de la nature d'un vecteur, dont la direction est normale à la direction du rayon : c'est ce qui est établi par les phénomènes d'interférence.

Dans le cas de la lumière polarisée circulairement, la grandeur du vecteur reste toujours la même; mais sa direction change et tourne autour du rayon, de façon à effectuer une révolution complète en une période de l'onde. Nous ne savons pas si ce vecteur est dans le plan de polarisation ou dans le plan perpendiculaire; mais cette incertitude ne va pas jusqu'à nous laisser ignorer en quel sens tourne le vecteur dans les rayons de lumière polarisée circulairement, droits ou gauches. La direction et la vitesse angulaire de ce vecteur nous sont parfaitement connues, quoique nous ne sachions ni sa nature physique, ni sa direction absolue à un instant donné.

Quand un rayon de lumière polarisée circulairement tombe sur un milieu soumis à l'action d'une force magnétique, la relation qui existe entre le sens de rotation de la lumière et la direction de la force magnétique influe sur la propagation du rayon dans le milieu. De là nous concluons, par le raisonnement du § 817, que, quand le milieu est soumis à l'action d'une force magnétique, il s'y produit un mouvement rotatoire, l'axe de rotation étant dans la direction des forces magnétiques, et que le rayon de lumière polarisée circulairement ne se propage pas avec la même vitesse quand la rotation vibratoire est dans le même sens que la rotation magnétique du milieu ou quand elle est en sens contraire.

La seule ressemblance que nous puissions entrevoir entre un milieu

à travers lequel se propage de la lumière polarisée circulairement et un milieu traversé par des lignes de force magnétique, est que, dans les deux cas, il y a un mouvement de rotation autour d'un axe. Mais là s'arrête la ressemblance; car, dans le phénomène optique, la rotation est celle du vecteur qui représente la perturbation. Ce vecteur est toujours perpendiculaire à la direction du rayon et exécute autour de lui un nombre connu de révolutions par seconde. Dans le phénomène magnétique, ce qui tourne n'a point de propriétés qui en distinguent les côtés, en sorte que nous ne pouvons déterminer le nombre des révolutions accomplies en une seconde.

Il n'y a donc dans le phénomène magnétique rien qui corresponde à la longueur d'onde et à la propagation des ondes du phénomène optique. Un milieu où agit une force magnétique constante n'est pas rempli, du fait de cette force, d'ondes marchant dans une direction, ainsi qu'il arrive lorsque de la lumière se propage. La seule ressemblance entre le phénomène optique et le phénomène magnétique est qu'en chaque point du milieu il existe quelque chose de la nature d'une vitesse angulaire agissant autour d'un axe dirigé suivant la force magnétique.

Hypothèse des tourbillons moléculaires.

822. Lorsque l'on étudie l'action du magnétisme sur la lumière polarisée, on est, comme nous l'avons vu, conduit à conclure que, dans un milieu soumis à l'action d'une force magnétique, une partie du phénomène est due à quelque chose qui, par sa nature mathématique, se rapproche d'une vitesse angulaire agissant autour d'un axe dirigé suivant la force magnétique.

Cette vitesse angulaire ne peut être celle d'aucune partie de dimensions finies du milieu, tournant d'un mouvement d'ensemble. Nous devons donc penser que cette rotation est celle de parties très petites de milieu tournant chacune autour de son axe. Telle est l'hypothèse des tourbillons moléculaires.

Ainsi que nous l'avons vu au § 575, le mouvement de ces tourbillons n'influe pas sensiblement sur les mouvements apparents des corps de grandes dimensions, mais il peut modifier le mouvement vibratoire qui, dans la théorie ondulatoire, donne lieu à la propagation de la lumière. Les déplacements du milieu, pendant la propagation de la lumière, produisent une perturbation dans les tourbillons, et les tourbillons troublés peuvent réagir sur le milieu de façon à modifier le mode de propagation du rayon.

823. Ignorants, comme nous le sommes actuellement, de la nature des tourbillons, nous ne pouvons formuler la loi qui lie les déplacements du milieu aux variations des tourbillons. Nous admettrons donc que les variations des tourbillons causées par les déplacements du milieu sont soumises aux mêmes conditions que, dans son grand Mémoire *Sur le mouvement tourbillonnaire* (1), Helmholtz a montré régir les variations des tourbillons dans les liquides parfaits.

La loi d'Helmholtz peut s'énoncer comme il suit : Soient P et Q deux molécules voisines sur l'axe d'un tourbillon; si le mouvement du liquide a pour effet d'amener les molécules en P′Q′, la ligne P′Q représente la nouvelle direction de l'axe du tourbillon, et sa force est modifiée dans le rapport de P′Q′ à PQ.

Si donc α, β, γ représentent les composantes de la force d'un tourbillon, et si ξ, η, ζ représentent le déplacement du milieu, la valeur de α devient

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha' = \alpha + \alpha\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \gamma\dfrac{\partial\xi}{\partial z}, \\ \beta' = \beta + \alpha\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \gamma\dfrac{\partial\eta}{\partial z}, \\ \gamma' = \gamma + \alpha\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} + \gamma\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}. \end{cases}$$

Nous admettons que la même condition est satisfaite pendant les petits déplacements d'un milieu où α, β, γ représentent, non plus les composantes de la force d'un tourbillon ordinaire, mais les composantes de la force magnétique.

824. Les composantes de la vitesse angulaire d'un élément du milieu sont

$$(2)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\gamma}{\partial y} - \dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right), \\ \omega_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right), \\ \omega_3 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x} - \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Pour poursuivre notre hypothèse, nous devons admettre que l'énergie cinétique du milieu contient un terme de la forme

$$(3)\qquad 2C(\omega_1\alpha + \omega_2\beta + \omega_3\gamma).$$

---

(1) *Journal de Crelle*, vol. 55, 1858; traduction par Tait, *Phil. Mag.*, juillet 1867.

Cela revient à supposer que la vitesse angulaire acquise par un élément du milieu, pendant la propagation de la lumière, est susceptible de se combiner avec le mouvement par lequel on explique les phénomènes magnétiques.

Pour former les équations du mouvement du milieu, nous devons exprimer son énergie cinétique en fonctions de la vitesse de ses parties, vitesse dont les composantes sont ξ, η et ζ. Intégrant par parties, nous trouvons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &2C\iiint(\alpha\omega_1+\beta\omega_2+\gamma\omega_3)\,dx\,dy\,dz\\ &\quad=+C\iint(\gamma\eta-\beta\zeta)\,dy\,dz+C\iint(\alpha\zeta-\gamma\xi)\,dz\,dx\\ &\qquad+C\iint(\beta\xi-\alpha\eta)\,dx\,dy\\ &\qquad+C\iiint\left[\xi\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)+\eta\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)+\zeta\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\right]dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

Les intégrales doubles se rapportent à la surface limite que l'on peut supposer à l'infini. Nous pouvons donc, quand nous étudions ce qui se passe à l'intérieur du milieu, ne porter notre attention que sur l'intégrale triple.

825. Pour une unité de volume, la partie de l'énergie cinétique, que représente cette intégrale triple, peut s'écrire

$$(5)\qquad 4\pi C(\xi u+\eta v+\zeta w),$$

u, v et w étant les composantes du courant électrique données par les équations (E) du § 607.

Il résulte de là que notre hypothèse revient à supposer que la vitesse d'une molécule du milieu, dont les composantes sont ξ, η et ζ, est une quantité qui peut se composer avec le courant électrique dont les composantes sont u, v et w.

826. Revenons à la quantité sous le signe $\iiint$ dans l'équation (4); substituons aux valeurs α, β, γ les valeurs α', β', γ', tirées des équations (1), et posons

$$(6)\qquad \frac{\partial}{\partial h}\quad\text{pour}\quad \alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}+\gamma\frac{\partial}{\partial z}.$$

L'expression sous le signe $\iiint$ devient

$$(7)\qquad C\left[\xi\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\right].$$

Dans le cas d'ondes planes normales à l'axe des z, les déplacements ne sont fonction que de z et de t, et $\frac{\partial}{\partial h}$ se réduit à $\gamma\frac{\partial}{\partial z}$; l'expression devient donc

$$(8)\qquad C\gamma\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\eta-\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\xi\right).$$

L'énergie cinétique rapportée à l'unité de volume peut donc s'écrire, du moins pour ce qui dépend des vitesses de déplacement,

$$(9)\qquad \tfrac{1}{2}\rho(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)+C\gamma\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\eta-\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\xi\right),$$

ρ étant la densité du milieu.

827. Les composantes X et Y de la force appliquée peuvent se tirer de là par l'équation de Lagrange donnée au § 564. Remarquons qu'en faisant successivement deux intégrations par parties relativement à z, et négligeant les intégrales doubles qui se rapportent à la surface limite, on peut faire voir que

$$\iiint\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\eta\,dx\,dy\,dz=\iiint\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2\partial t}\,dx\,dy\,dz,$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial\xi}=C\gamma\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2\partial t}.$$

Les forces sont donc exprimées par

$$(10)\qquad X=\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-2C\gamma\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2\partial t},$$

$$(11)\qquad Y=\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+2C\gamma\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2\partial t}.$$

Ces forces sont dues à l'action sur l'élément du reste du milieu; et, si ce milieu est isotrope, elles doivent être de la forme indiquée par Cauchy,

$$(12)\qquad X=A_0\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+A_1\frac{\partial^4\xi}{\partial z^4}+\ldots,$$

$$(13)\qquad Y=A_0\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}+A_1\frac{\partial^4\eta}{\partial z^4}+\ldots.$$

828. Si nous prenons le cas d'un rayon polarisé circulairement, pour lequel

$$\xi = r\cos(nt - qz), \qquad \eta = r\sin(nt - qz), \tag{14}$$

on trouve, pour l'énergie cinétique rapportée à l'unité de volume,

$$T = \tfrac{1}{2}\rho r^2 n^2 - C\gamma\rho^2 q^2 n; \tag{15}$$

et, pour l'énergie potentielle par unité de volume,

$$V = r^2(A_0 q^2 - A_1 q^4 + \ldots) = r^2 Q, \tag{16}$$

où Q est une fonction de q^2.

La condition pour que le rayon se propage librement a été donnée au § 820, équation (6) : c'est

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r}, \tag{17}$$

ce qui donne

$$\rho n^2 - 2C\gamma q^2 n = Q; \tag{18}$$

d'où l'on tire la valeur de n en fonction de q.

Mais, dans le cas d'un rayon de période donnée soumis à l'action d'une force magnétique, ce que nous devons déterminer, c'est la valeur de $\frac{\partial q}{\partial \gamma}$ pour n constant, en fonction de $\frac{\partial q}{\partial n}$ pour γ constant. Différentiant (18),

$$(2\rho n - 2C\gamma q^2)\,dn - \left(\frac{\partial Q}{\partial q} + 4C\gamma q n\right)dq - Cq^2 n\,d\gamma = 0. \tag{19}$$

On trouve ainsi

$$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = -\frac{Cq^2 n}{\rho n - Cq^2\gamma}\,\frac{\partial q}{\partial n}. \tag{20}$$

829. Si λ est la longueur d'onde dans l'air, et i l'indice de réfraction correspondant du milieu,

$$q\lambda = 2\pi i, \qquad n\lambda = 2\pi v. \tag{21}$$

La variation de q, due à l'action magnétique, n'est, dans tous les cas, qu'une fraction très faible de la valeur même de q; on peut donc écrire

$$q = q_0 + \frac{\partial q}{\partial \gamma}\gamma, \tag{22}$$

où q_0 est la valeur de q pour une force magnétique nulle. L'angle 0, dont tourne le plan de polarisation quand le rayon traverse une épaisseur e du milieu, est la demi-somme des valeurs positive et négative de qc, le résultat étant changé de signe, puisque le signe de q est négatif dans l'équation (14). Nous obtenons ainsi

$$0 = -c\gamma \frac{\partial q}{\partial \gamma} \tag{23}$$

$$= \frac{4\pi^2 C}{\nu^2} c\gamma \frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial \lambda}\right) \frac{1}{1 - 2\pi C\gamma \frac{i^2}{\nu^2 \lambda}}. \tag{24}$$

Le second terme du dénominateur de la fraction est à peu près égal à l'angle dont tourne le plan de polarisation, quand le rayon traverse une épaisseur du milieu égale à une demi-longueur d'onde. C'est donc, dans tous les cas réels, une quantité que l'on peut négliger devant l'unité.

Posant

$$\frac{4\pi^2 C}{\nu^2} = m, \tag{25}$$

on peut appeler m le coefficient de rotation magnétique du milieu : c'est une quantité qui doit être déterminée par l'observation. On trouve qu'elle est positive pour la plupart des diamagnétiques, et négative pour quelques paramagnétiques. Nous avons donc, comme résultat final de la théorie,

$$0 = mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial \lambda}\right), \tag{26}$$

où

0 est la rotation angulaire du plan de polarisation;
m une constante déterminée par expérience;
γ la composante de la force magnétique suivant la direction du rayon;
c la longueur parcourue par le rayon dans le milieu;
λ la longueur d'onde de la lumière dans l'air;
i l'indice de réfraction du milieu.

830. La seule épreuve que, jusqu'à ce jour, on ait fait subir à cette théorie, a consisté à comparer les différentes valeurs de 0 pour différentes sortes de lumière traversant un même milieu et soumises à la même force magnétique.

C'est ce qui a été fait, pour un grand nombre de milieux, par Verdet (1), qui a obtenu les résultats suivants :

1° Pour les rayons de différentes couleurs, la rotation magnétique du plan de polarisation suit à peu près la loi de l'inverse carré des longueurs d'onde.

2° La loi exacte du phénomène est telle que le produit de la rotation par le carré de la longueur d'onde croît constamment de l'extrémité la moins réfrangible à l'extrémité la plus réfrangible du spectre.

3° Les substances pour lesquelles cet accroissement est le plus sensible sont celles qui ont le pouvoir dispersif le plus considérable.

Il a également trouvé que dans une solution d'acide tartrique, qui a naturellement le pouvoir rotatoire, la rotation magnétique n'est pas du tout proportionnelle à la rotation naturelle.

Dans un complément à ce même Mémoire (2), Verdet donne les résultats d'expériences très soignées faites sur le sulfure de carbone et la créosote, deux substances pour lesquelles l'écart d'avec la loi de l'inverse carré de la longueur d'onde était très apparent. Il a aussi comparé ces résultats avec les nombres que donnent trois formules différentes :

$$(\mathrm{I}) \qquad 0 = mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial \lambda}\right),$$

$$(\mathrm{II}) \qquad 0 = mc\gamma \frac{1}{\lambda^2}\left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial \lambda}\right),$$

$$(\mathrm{III}) \qquad 0 = mc\gamma \quad \left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial \lambda}\right).$$

La première de ces formules (I) est celle qui a été obtenue au § 829, équation (26). La deuxième (II) s'obtient en substituant dans les équations du mouvement [§ 826, équations (10) et (11)] des termes de la forme $\frac{\partial^3 \eta_1}{\partial t^3}$ et $-\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3}$, au lieu de $\frac{\partial^3 \eta_1}{\partial z^2 \partial t}$ et $-\frac{\partial^3 \xi}{\partial z^2 \partial t}$. Je ne sache pas que cette forme d'équation ait été suggérée par aucune théorie physique. La troisième formule résulte de la théorie physique de

---

(1) *Recherches sur les propriétés optiques développées dans les corps transparents par l'action du magnétisme*, IVe Partie. (*Comptes rendus*, t. LVI, p. 630; 6 avril 1863.)

(2) *Comptes rendus*, vol. LVII, p. 670; 19 octobre 1863.

M. C. Neumann (1), dans laquelle les équations du mouvement renferment des termes de la forme $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ et $-\frac{\partial \xi}{\partial t}$ (2).

Il est clair que les valeurs de θ, données par la formule (III), ne sont pas, même approximativement, proportionnelles à l'inverse carré de la longueur d'onde. Les formules I et II satisfont à cette condition et donnent des valeurs de θ qui s'accordent assez bien avec les valeurs observées, pour les milieux dont le pouvoir dispersif est médiocre. Les valeurs données par la formule I s'accordent mieux avec l'expérience; mais, quoique l'accord soit assez étroit pour le sulfure de carbone, les nombres relatifs à la créosote présentent des différences beaucoup trop grandes pour qu'on puisse les mettre au compte des erreurs d'observation.

Rotation magnétique du plan de polarisation, d'après Verdet.

SULFURE DE CARBONE A 24°,9 C.

Lignes du spectre.....	C.	D.	E.	F.	G.
Rotation observée.....	592	768	1000	1234	1704
Rotation calculée par I.....	589	760	1000	1234	1713
Rotation calculée par II.....	606	772	1000	1226	1640
Rotation calculée par III.....	943	967	1000	1034	1091

Rotation de la raie E.... 25°,88'.

CRÉOSOTE A 24°,3 C.

Lignes du spectre.....	C.	D.	E.	F.	G.
Rotation observée.....	573	758	1000	1241	1723
Rotation calculée par I.....	617	780	1000	1220	1603
Rotation calculée par II.....	628	789	1000	1200	1565
Rotation calculée par III.....	976	993	1000	1017	1041

Rotation de la raie E.... 21°,58.

Nous savons bien peu de chose sur le détail de la constitution mo-

---

(1) *Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur.* (Halix Saxonum, 1858.)

(2) Ces trois formes d'équations du mouvement ont été proposées d'abord par Sir G.-B. Airy (*Phil. Mag.*, juin 1846) comme moyen d'analyser les phénomènes que Faraday venait de découvrir. Précédemment, Mac Cullagh avait proposé des équations renfermant des termes en $\frac{\partial^3}{\partial x^3}$ pour représenter mathématiquement les phénomènes du quartz. Ces équations furent présentées par Mac Cullagh et Airy, « non comme donnant une explication mécanique des phénomènes, mais comme faisant voir que ces phénomènes peuvent être expliqués par des équations, lesquelles semblent de nature à pouvoir se déduire de quelque hypothèse mécanique plausible, quoique l'on n'ait point encore formulé cette hypothèse ».

léculaire des corps; aussi n'est-il guère probable qu'on arrive à former une théorie satisfaisante d'un phénomène particulier, tel que celui des actions magnétiques sur la lumière, tant qu'une induction, fondée sur un grand nombre de cas différents où l'on aura observé une dépendance entre des phénomènes visibles et des actions moléculaires, ne nous aura appris quelque chose de plus définitif sur les propriétés qu'il convient d'attribuer aux molécules pour satisfaire aux conditions dérivant des faits observés.

La théorie qui vient d'être exposée dans les pages précédentes est évidemment de nature provisoire, fondée qu'elle est sur des hypothèses non démontrées relativement à la nature des tourbillons moléculaires et à la façon dont ils subissent l'influence des déplacements du milieu. Si donc il y a concordance avec les faits observés, nous devons attribuer à cette concordance une valeur scientifique bien moindre dans le cas de la théorie magnétique de la rotation du plan de polarisation que dans celui de la théorie électromagnétique de la lumière, qui implique sans doute des hypothèses sur les propriétés électriques des milieux, mais n'étend pas ses spéculations à la constitution des molécules.

831. NOTE. Tout ce Chapitre peut n'être regardé que comme le développement d'une remarque très importante de Sir William Thomson, insérée aux *Proceedings of the Royal Society*, en juin 1856 : « L'influence des aimants sur la lumière, découverte par Faraday, dépend de la direction du mouvement des particules mobiles. Ainsi, dans un milieu possédant le pouvoir rotatoire magnétique, les molécules primitivement disposées sur une ligne droite parallèle aux lignes de force magnétique, puis déplacées et rangées suivant une hélice ayant cette ligne pour axe, lancées enfin avec des vitesses tangentielles qui leur font décrire des cercles, auront des vitesses différentes, suivant que leur rotation s'effectue dans un sens, celui de la direction nominale du courant électrique dans l'hélice magnétisante, ou dans le sens contraire. Mais, pour un même déplacement, la réaction élastique du milieu doit être la même, quelles que soient la vitesse et la direction de la molécule; c'est-à-dire que les forces auxquelles fait équilibre la force centrifuge des mouvements circulaires sont égales, tandis que les mouvements lumineux sont inégaux. Les mouvements circulaires absolus étant égaux ou tels qu'ils communiquent aux molécules primitivement considérées des forces centrifuges égales, il en résulte que les mouvements lumineux ne sont que des composantes du mouvement total, et qu'une composante lumineuse moindre, dirigée dans un certain sens et composée avec un mouvement qui existe dans le milieu, lors même qu'il ne transmet pas de lumière, donne une résultante égale à celle que l'on obtiendrait en composant avec ce même mouvement non lumineux une composante lumineuse plus grande, mais de sens contraire. Je crois qu'il n'est pas seulement impossible de concevoir aucune autre explication dynamique de ce fait que de la lumière polarisée circulairement, toujours de même qualité, toujours droite ou toujours gauche, étant transmise à travers un morceau de verre

magnétisé parallèlement aux lignes de force magnétique, se propage avec une vitesse différente, suivant qu'elle va dans la direction où est attiré un pôle magnétique nord ou qu'elle va dans la direction contraire; je crois aussi que l'on pourrait démontrer qu'il n'y a point d'autre explication possible. De là résulte que la découverte optique de Faraday donne la démonstration de la vérité de l'explication d'Ampère sur la nature dernière du magnétisme, et elle nous donne une définition de l'état d'aimantation dans la théorie dynamique de la chaleur. Lorsque, traitant par la Mécanique l'hypothèse de M. Rankine sur les tourbillons moléculaires, on introduit le principe des moments des quantités de mouvement (conservation des aires), il semble en ressortir que l'axe magnétique d'un corps magnétisé est une ligne perpendiculaire au plan de la quantité du mouvement rotatoire résultante de tous les mouvements thermiques (plan invariable), et l'idée se présente que le moment résultant de toutes ces quantités de mouvement est la mesure proprement dite et définie du moment magnétique. L'explication de tous les phénomènes d'attraction ou de répulsion et d'induction électromagnétique doit être cherchée uniquement dans l'inertie et la pression de la matière dont les mouvements constituent la chaleur. Si cette matière est ou non de l'électricité; si c'est un fluide continu qui pénètre entre les noyaux moléculaires, ou s'il est lui-même groupé en molécules; si toute matière est continue et si l'hétérogénéité des molécules réside seulement en des mouvements relatifs limités, tourbillonnaires ou autres, des parties contiguës des corps, c'est ce qu'il est impossible de décider, et c'est sur quoi des spéculations même seraient peut-être vaines en l'état actuel de la Science. »

Une théorie des tourbillons moléculaires, que j'ai développée tout au long, a été publiée dans le *Phil. Mag.*, pour mars, avril et mai 1861, janvier et février 1862.

Je crois que nous avons de bonnes raisons de penser qu'il se produit dans le champ magnétique un phénomène de rotation; que cette rotation est exécutée par un grand nombre de très petites particules de matière, tournant chacune autour de son axe propre, lequel est parallèle à la direction de la force magnétique, et que les rotations de ces différents tourbillons sont rendues dépendantes les unes des autres par une sorte de mécanisme qui les relie. La tentative que j'ai faite, de concevoir et de montrer le fonctionnement de ce mécanisme, ne doit pas être prise pour plus qu'elle n'est en réalité : c'est une démonstration de ce fait que l'on peut imaginer un mécanisme capable de produire une connexion mécaniquement équivalente à celle qui relie effectivement les parties du champ électromagnétique. Le problème qui consiste à trouver le mécanisme nécessaire pour établir entre les mouvements des différentes parties d'un système une connexion de nature déterminée admet toujours une infinité de solutions. De ces solutions, les unes peuvent être plus obscures ou plus compliquées que les autres, mais toutes doivent satisfaire aux conditions générales des mécanismes.

Toutefois, les résultats suivants de cette théorie me semblent avoir une plus haute valeur :

1° La force magnétique est l'effet des forces centrifuges des tourbillons;

2° L'induction électromagnétique des courants est l'effet des forces mises en jeu quand la vitesse des tourbillons change;

3° La force électromotrice est produite par l'effort de tension exercé sur le mécanisme de connexion;

4° Le déplacement électrique se produit quand le mécanisme de connexion cède en raison de son élasticité.

NOTE III.

Sur le pouvoir rotatoire magnétique.

PAR M. POTIER.

Dans son essai d'explication du pouvoir rotatoire magnétique, Maxwell paraît abandonner la théorie électromagnétique de la lumière et demander à la théorie ordinaire, qui regarde l'éther comme un corps élastique, les équations (12) et (13) du § 827, qui déterminent les forces provenant des déformations du milieu; forces auxquelles il ajoute des termes provenant, selon son hypothèse, de ce que l'énergie cinétique du milieu vibrant doit comprendre, outre la force vive de l'éther, des termes proportionnels à la force magnétique et aux vitesses de rotation ou au produit des vitesses ξ, η, ζ et du courant produit dans le milieu par les variations que le déplacement des tourbillons entraîne dans le magnétisme du milieu. Si ξ, η, ζ étaient les vitesses de matière pondérable, ceci serait en contradiction formelle avec les § 572 et suivants; si ce sont les composantes d'un vecteur dépendant de la perturbation qui constitue la lumière, ce sont aussi, d'après le Chapitre XX, celles de la variation du déplacement électrique ou des courants, et alors on rentrerait dans le problème qui y est traité.

M. Rowland a cherché à concilier l'existence de la polarisation rotatoire et la théorie de Maxwell; il admet que, lorsqu'un conducteur placé dans un champ magnétique est parcouru par un courant, il naît dans ce conducteur en chaque point une force électromotrice dirigée comme la force pondéromotrice exercée réellement sur l'unité de longueur du circuit, et qui lui est proportionnelle. Il admet de plus que les choses se passent de même dans un diélectrique, la variation du déplacement électrique constituant un courant. Dès lors, si une onde plane électromagnétique se propage parallèlement au plan $z = 0$, dans un milieu où agit une force magnétique uniforme parallèle à l'axe des z, il faut ajouter aux valeurs de P et de Q respectivement des termes

$$+ C'\gamma v \quad \text{et} \quad - C'\gamma u,$$

en appelant γ la force du champ et C une constante dépendant du milieu.

Les variables étant fonctions de z seulement, on a

$$4\pi\mu u = -\frac{d^2F}{dz^2}, \qquad 4\pi\mu v = -\frac{d^2G}{dz^2},$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t} + C'\gamma v = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{C'\lambda}{4\pi\mu}\frac{d^2G}{dz^2},$$

$$Q = -\frac{\partial G}{\partial t} - C'\gamma u = -\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{C'\gamma}{4\pi\mu}\frac{d^2F}{dz^2},$$

et comme

$$u = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial P}{\partial t}, \qquad v = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial G}{\partial t},$$

on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{C^2\gamma}{4\pi\mu}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2\,\partial t} = \frac{1}{K\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{C^2\gamma}{4\pi\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2\,\partial t} = \frac{1}{K\mu}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2},$$

qui conduisent à la double réfraction circulaire.

Mais l'existence de forces électromotrices induites, ainsi engendrées dans un champ constant par le passage d'un courant permanent, est aussi en contradiction absolue avec la théorie du § 572. Cette hypothèse, imaginée pour rendre compte de la déviation, découverte par M. Hall, des lignes d'égal potentiel dans un conducteur soumis à l'action d'un champ puissant, n'est pas nécessaire, les faits observés s'expliquant aussi bien, si ce n'est mieux, par une hétérotropie résultant de l'action du champ sur le conducteur; il semble donc préférable d'y renoncer et de chercher par une autre voie à réconcilier la théorie électromagnétique de la lumière et le pouvoir magnétique.

Maxwell (et avant lui Sir William Thomson) reconnaît implicitement que la question est du domaine de la physique moléculaire, et qu'il n'est plus permis de considérer le milieu pondérable comme rigoureusement homogène; le fait que le pouvoir rotatoire du vide est nul montre déjà que c'est un phénomène de même ordre que la dispersion; il faut donc faire une hypothèse moléculaire. Or les propriétés magnétiques ou diamagnétiques s'expliquent en supposant que chaque molécule est le siège de courants ou équivalente à un petit aimant, et est dirigée dans le champ; d'après Fresnel et les expériences de M. Fizeau, la matière pondérable participe dans une certaine mesure, variable avec la longueur d'onde, au mouvement lumineux; on est donc en droit de supposer, dans le milieu où se propage ce mouvement, des petits aimants disséminés et participant au mouvement; le moment magnétique de chacun d'eux étant pour la plupart des corps simplement proportionnel à la force du champ. Pendant la propagation du mouvement, l'axe magnétique est périodiquement dévié de sa position normale, parallèle à la force du champ; ces mouvements induisent dans le milieu ambiant des forces électromotrices qui s'ajoutent aux forces induites par les déplacements du milieu et sont proportionnelles au moment de chaque particule, c'est-à-dire à la force du champ et à la vitesse du déplacement de l'axe, par conséquent aux vitesses du milieu, ou aux courants dans la théorie électromagnétique; on retrouve donc la force électromotrice induite de M. Rowland, en remplaçant les tourbillons de Maxwell par les molécules supposées aimantées de la matière pondérable; la réaction, reconnue nécessaire par Maxwell, entre les tourbillons et le milieu ambiant se confondant avec l'entraînement de la matière pondérable proposé par Fresnel.

Soient m_x, m_y, m_z les trois composantes du moment magnétique d'une de ces particules; si ces moments varient avec le temps, une force électromotrice est engendrée à chaque instant dans le milieu ambiant; ses composantes sont

$$\frac{y-y_0}{r^3}\frac{dm_z}{dt} - \frac{z-z_0}{r^3}\frac{dm_y}{dt}, \ldots$$

au point (x, y, z), si x_0, y_0, z_0 désignent les cordonnées de la particule; elles peuvent encore s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}\frac{dm_z}{dt} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\frac{dm_y}{dt}, \ldots,$$

ou, si l'on désigne par U, V, W les potentiels dus à des distributions matérielles $\frac{\partial m_x}{\partial t}$, $\frac{\partial m_y}{\partial t}$, $\frac{\partial m_z}{\partial t}$,

$$P_1 = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad Q_1 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad R_1 = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

On choisit encore l'axe des z perpendiculaire aux ondes, dont on étudie la propagation; les variables ne dépendent que de z et de t, et il reste

$$P_1 = -\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad Q_1 = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Les moments m_x, m_y sont, au moins tant que les déplacements ξ, η sont petits, et que l'axe de la particule ne s'écarte que d'un petit angle de sa position d'équilibre, des fonctions linéaires des déplacements relatifs $\left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)_0$ au centre de cette particule, et l'hypothèse la plus naturelle est de supposer les variations de m_x et de m_y proportionnelles aux variations de ces déplacements, en posant

$$\frac{dm_x}{dt} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{dm_y}{dt} = \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial t} = \rho \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Les variations ne peuvent contenir de termes en ξ et η, le déplacement parallèlement à elle-même de la particule ne changeant pas le magnétisme qui y est induit par le champ extérieur.

Les fonctions U et V sont les potentiels de masses concentrées aux centres des particules et ayant pour densités $\rho\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$ et $\rho\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0$; si les distances de ces particules sont très petites par rapport à la longueur d'onde, les valeurs de U et de V seront sensiblement celles des potentiels dus à une distribution continue de matière ayant pour densité en tout point $\rho_1 \frac{\partial u}{\partial z}$, ou $\rho_1 \frac{\partial v}{\partial z}$. Si les distances ne sont pas très petites, ρ_1 ne pourra être considéré comme proportionnel à ρ, mais sera une fonction de ρ et de la longueur d'onde. On aura donc

$$\nabla^2 U = -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 4\pi\rho_1 \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \nabla^2 V = -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi\rho_1 \frac{\partial v}{\partial z}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 4\pi\rho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = -4\pi\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

et, comme P_1, Q_1 sont des fonctions périodiques de z,

$$P_1 = 4\pi\rho_1 v, \qquad Q_1 = -4\pi\rho_1 u.$$

Le mouvement communiqué à la matière pondérable et susceptible d'aimantation produit donc des forces électromotrices dirigées comme celles introduites par Rowland, et proportionnelles aux courants; si de plus la force magnétique est perpendiculaire à l'onde, il est évident que ρ_1 et ρ sont proportionnels au magnétisme induit, ou à la force magnétique; de sorte que, si γ est cette force, on peut écrire

$$P_1 = C'\gamma v, \qquad Q_1 = -C'\gamma u.$$

Si l'on adopte le système électromagnétique, et que l'on fasse, par conséquent $\mu = 1$ (§ 615), les équations qui déterminent les F et G deviendront, en introduisant la constante $C = \frac{C'}{8\pi}$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2C\gamma \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial t} = \frac{1}{K} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - 2C\gamma \frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial t} = \frac{1}{K} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2},$$

et seront satisfaites pour

$$F = \cos(nt - qz), \qquad G = \pm \sin(nt - qz),$$

si

$$(1) \qquad K(n^2 \pm 2C\gamma q^2 n) = q^2,$$

c'est-à-dire que des ondes à vibrations circulaires de même période se propageront avec des vitesses différentes suivant le sens de la propagation; la vitesse est

$$\frac{n}{q} = K^{-\frac{1}{2}},$$

lorsque C est nul. En réalité, elle est variable avec q; il est donc nécessaire que K soit aussi fonction de q; ce qui n'aurait pas de sens si l'on considérait comme homogène le milieu où se propagent les ondes, mais est une conséquence nécessaire de l'hypothèse particulaire adoptée plus haut, et qui n'est autre que celle de Mossotti et de Poisson (§ 62).

Si q' et q'' sont les deux valeurs de q satisfaisant à l'équation (1) pour deux valeurs égales et de signe contraire de n, elles diffèrent peu de la valeur q satisfaisant à l'équation $Kn^2 = q^2$, et appelant q_0 celle-ci, on a, en posant

$$K(n^2 + C\gamma q^2 n) = q^2,$$
$$q' = q_0 + \gamma \frac{\partial q}{\partial \gamma}, \qquad q'' = q_0 - \gamma \frac{\partial q}{\partial \gamma},$$

le pouvoir rotatoire, sa rotation par unité de longueur est

$$\theta = \frac{1}{2}(q' - q'') = \gamma \frac{\partial q''}{\partial \gamma};$$

et, comme Maxwell le déduit de l'équation (1),

$$\theta = m\gamma \frac{i'}{\lambda^2}\left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial \lambda}\right),$$

on observera cependant que dans ces formules C et, par suite, m ne peuvent être considérés comme des constantes; car, lorsqu'on substitue, comme on l'a fait plus haut, une densité constante $\rho_1 \frac{\partial u}{\partial z}$, à la distribution discontinue $\rho\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$, le coefficient ρ_1 est fonction comme K de la longueur d'onde. C'est du reste ce que paraît indiquer la comparaison de la théorie et de l'expérience. (A. P.)

CHAPITRE XXII.

EXPLICATION DU FERROMAGNÉTISME ET DU DIAMAGNÉTISME AU MOYEN DES COURANTS MOLÉCULAIRES.

Sur les théories électromagnétiques du magnétisme.

832. Nous avons vu (§ 380) que l'action d'aimants les uns sur les autres peut se représenter très exactement par les attractions et répulsions d'une substance imaginaire appelée *matière magnétique*. Nous avons vu quelles raisons nous interdisent d'admettre que cette matière peut se déplacer d'une partie d'un aimant à une autre partie située à une distance appréciable, ainsi qu'il semble, au premier abord, qu'elle le fasse quand on aimante un barreau; et nous avons été conduits à l'hypothèse de Poisson, à savoir que la matière magnétique est absolument confinée dans les diverses molécules de la substance magnétique. Ainsi, une molécule magnétisée est une molécule dans laquelle les deux espèces contraires de matière magnétique sont plus ou moins séparées vers les pôles opposés de la molécule, mais jamais aucune parcelle de l'une ou l'autre espèce de matière ne peut se séparer réellement de la molécule (§ 430).

Ces arguments constituent une démonstration complète de ce fait que le phénomène de l'aimantation porte, non sur les grosses masses de fer, mais sur les molécules, c'est-à-dire sur des portions de matière si petites qu'aucune méthode mécanique ne nous donne le moyen d'en couper une en deux, de façon à obtenir un pôle nord séparé d'un pôle sud. Mais la nature d'une molécule magnétique ne peut pas être connue sans des recherches poussées plus avant. Nous avons vu (§ 442) qu'il y a de fortes raisons de croire que les opérations de l'aimantation ne consistent pas à donner du magnétisme aux molécules qui composent le fer ou l'acier; mais ces molécules sont déjà magnétiques, même dans le fer non aimanté, seulement, leurs axes sont placés indifféremment dans toutes les directions, et les opérations de l'aimantation consistent à faire tourner les molécules de façon que leurs axes soient rendus tous parallèles à une même direction ou, du moins, qu'ils soient déviés vers cette direction.

833. Jusqu'à présent, cependant, nous ne sommes pas encore arrivés à expliquer la nature d'une molécule magnétique; nous n'avons pas reconnu de ressemblance entre elle et quelque autre chose que nous connaissions mieux. Nous devons donc examiner l'hypothèse d'Ampère, à savoir que le magnétisme de la molécule est dû à un courant électrique qui y circule constamment suivant un certain circuit fermé.

On peut reproduire exactement l'action d'un aimant quelconque sur les points extérieurs, au moyen d'une nappe de courants électriques convenablement distribués sur la surface extérieure de la nappe. Mais l'action de l'aimant sur les points qui lui sont intérieurs est essentiellement différente de celle des courants électriques sur les points correspondants. Ampère concluait de là que, si le magnétisme doit être expliqué au moyen de courants électriques, ces courants ne peuvent circuler qu'à l'intérieur des molécules sans passer d'une molécule à une autre. Comme nous n'avons aucun moyen expérimental de mesurer l'action magnétique en un point intérieur à une molécule, nous ne pouvons mettre en défaut cette hypothèse de la même manière que nous mettons en défaut l'hypothèse de courants d'étendue finie circulant à l'intérieur de l'aimant.

En outre, nous savons qu'un courant électrique, passant d'une partie à une autre d'un conducteur, rencontre de la résistance et produit de la chaleur. Si donc des courants de l'espèce ordinaire circulaient autour de parties d'aimant ayant des dimensions finies, il faudrait, pour les entretenir, dépenser constamment de l'énergie, et un aimant serait une source perpétuelle de chaleur. Mais, si les courants sont confinés à l'intérieur des molécules, nous n'avons plus aucune notion de résistance relativement à ce milieu, et nous pouvons dire, sans crainte de contradiction, que les courants qui circulent à l'intérieur des molécules ne rencontrent pas de résistance.

Ainsi, d'après la théorie d'Ampère, tous les phénomènes de magnétisme sont dus à des courants électriques; et, si nous pouvions observer la force magnétique à l'intérieur d'une molécule magnétique, nous devrions trouver que cette force y suit exactement les mêmes lois que dans une région entourée par n'importe quel autre circuit électrique.

834. Quand nous avons traité de la force à l'intérieur des aimants, nous avons supposé que les mesures étaient faites au fond d'une crevasse étroite pénétrant à l'intérieur de la masse de l'aimant (§ 395). Nous avons été ainsi amenés à considérer deux quantités différentes,

la force et l'induction magnétiques, que l'on suppose observées toutes deux dans un espace d'où aurait été enlevée la matière magnétique. Mais nous n'avons pas supposé que nous fussions capable de pénétrer à l'intérieur d'une molécule magnétique et d'observer la force à l'intérieur de cette molécule.

Si nous adoptons la théorie d'Ampère, nous ne considérons plus un aimant comme une substance continue dont l'aimantation varie d'un point à un autre, suivant quelque loi facile à imaginer; mais nous le regardons comme formé d'une multitude de molécules, dans chacune desquelles circule un système de courants électriques donnant lieu à une distribution de la force magnétique extrêmement complexe, la direction de la force magnétique à l'intérieur d'une molécule étant généralement inverse de la direction de la force magnétique moyenne dans le voisinage, et le potentiel magnétique, quand il existe, étant une fonction dont le degré de multiplicité est égal au nombre des molécules de l'aimant.

835. Nous trouverons cependant que, malgré cette complexité apparente, qui n'est due, après tout, qu'à la coexistence d'une multitude de parties plus simples, on simplifie grandement la théorie mathématique du Magnétisme en adoptant la théorie d'Ampère, et en étendant nos conceptions mathématiques à l'intérieur des molécules.

En premier lieu, les deux définitions de la force magnétique se réduisent à une seule, toutes deux se confondant avec la définition relative à l'espace extérieur à l'aimant. En second lieu, les composantes de la force magnétique satisfont en tout point à la condition à laquelle sont soumises les composantes de l'induction, à savoir

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

En d'autres termes, la distribution de la force magnétique est de même genre que celle de la vitesse dans un fluide incompressible, ou, comme nous l'avons énoncé au § 25, la force magnétique n'a pas de convergence.

Enfin, les trois fonctions vectorielles : *quantité de mouvement électromagnétique, force magnétique, courant électrique*, sont liées par une relation plus simple. Toutes trois sont des fonctions vectorielles sans convergence, se déduisant l'une de l'autre dans l'ordre indiqué, par une même opération qui consiste à prendre la variation dans l'espace et que Hamilton désigne par le symbole ∇.

836. Mais c'est à un point de vue physique que nous considérons maintenant le Magnétisme, et nous devons rechercher quelles sont les propriétés physiques de ces courants moléculaires. Nous admettons qu'un courant circule dans une molécule et n'y rencontre pas de résistance. Si L est le coefficient de self-induction de ce courant moléculaire, et M le coefficient d'induction mutuelle entre ce circuit et un autre quelconque; si γ est le courant dans la molécule et γ' le courant dans l'autre circuit, l'équation du courant γ est

$$\frac{d}{dt}(L\gamma + M\gamma') = -R\gamma; \tag{2}$$

comme, par hypothèse, il n'y a pas de résistance, $R = 0$, et l'on a en intégrant

$$L\gamma + M\gamma' = \text{const.} = L\gamma_0, \text{ par exemple.} \tag{3}$$

Soit A l'aire occupée par la projection du circuit moléculaire sur un plan perpendiculaire à l'axe de la molécule, cet axe étant défini comme la normale au plan sur lequel la projection est la plus grande. Si l'action des autres courants produit une force magnétique X, dont la direction fait un angle θ avec l'axe de la molécule, la quantité $M\gamma'$ devient $XA\cos\theta$, et nous avons, pour équation du courant,

$$L\gamma + XA\cos\theta = L\gamma_0, \tag{4}$$

où γ_0 est la valeur de γ quand $X = 0$.

On voit donc que l'intensité du courant moléculaire dépend entièrement de son intensité initiale γ_0 et de l'intensité de la force magnétique due aux autres courants.

837. Si nous supposons qu'il n'y a pas de courant primitif, mais que le courant est entièrement dû à l'induction, on a

$$\gamma = -\frac{XA}{L}\cos\theta. \tag{5}$$

Le signe — montre que le courant induit est en sens inverse du courant inducteur, et son action magnétique agit à l'intérieur du circuit en sens inverse de la force magnétique. En d'autres termes, le courant moléculaire agit comme un petit aimant dont les pôles seraient tournés vers les pôles de même nom de l'aimant inducteur.

Or, c'est là une action inverse de celle des molécules de fer soumises à l'action magnétique; donc, dans le fer, les courants moléculaires ne

sont pas excités par l'induction. Mais dans les corps diamagnétiques, on observe une action de ce genre, et telle est, en effet, l'explication de la polarité diamagnétique qui a été donnée pour la première fois par Weber.

Théorie du diamagnétisme de Weber.

838. Suivant la théorie de Weber, il existe dans les molécules des corps diamagnétiques certains chemins le long desquels un courant électrique peut circuler sans résistance. Il est clair que supposer que ces chemins traversent la molécule dans tous les sens reviendrait à faire de la molécule un conducteur parfait.

Commençant par supposer qu'il y a dans la molécule un circuit linéaire, la force du courant nous est donnée par l'équation (5).

Le moment magnétique du courant est égal au produit de l'intensité par l'aire du circuit, soit γA, et la composante de ce moment dans la direction de la force magnétisante est $\gamma A \cos\theta$ ou, d'après (5),

$$(6) \qquad -\frac{X A^3}{L}\cos^2\theta.$$

Si, dans l'unité de volume, il y a n de ces molécules, et que leurs axes soient distribués indifféremment dans tous les sens, la valeur moyenne de $\cos^2\theta$ sera $\frac{1}{3}$, et l'intensité d'aimantation de la substance sera

$$(7) \qquad -\frac{1}{3}\frac{n X A^3}{L}.$$

Le coefficient d'aimantation de Neumann est donc

$$(8) \qquad \varkappa = -\frac{1}{3}\frac{n A^2}{L}.$$

L'aimantation de la substance est donc en sens inverse de la force magnétisante ou, en d'autres termes, la substance est diamagnétique. L'aimantation est aussi exactement proportionnelle à la force magnétisante et ne tend pas vers une limite finie, comme dans le cas de l'induction magnétique ordinaire (§ 442, etc.).

839. Si, au lieu d'être indifféremment dirigés dans tous les sens, les axes des chemins moléculaires sont, pour la majorité, disposés dans certaines directions, la somme

$$\sum \frac{A^2}{L}\cos^2\theta,$$

étendus à toutes les molécules, aura des valeurs différentes, suivant la direction de la ligne à partir de laquelle on mesure θ, et la distribution de ces valeurs dans les différentes directions sera semblable à la distribution des valeurs des moments d'inertie autour d'axes passant par un même point et dirigés dans différentes directions.

Une pareille distribution expliquerait ces phénomènes magnétiques que l'on rapporte à l'existence d'axes dans les corps, qui ont été décrits par Plücker, et que Faraday a appelés *phénomènes magnéto-cristalliques*. (*Voir* § 435.)

840. Considérons maintenant quel serait l'effet produit si le courant électrique, au lieu d'être renfermé dans un certain chemin intérieur à la molécule, parcourait librement toute la molécule supposée un conducteur parfait.

Commençons par le cas d'un corps de forme acyclique, c'est-à-dire ne présentant pas la forme d'un anneau ou d'un corps percé, et supposons que ce corps soit recouvert en tous ses points d'une couche mince de matière parfaitement conductrice.

Nous avons démontré, au § 654, qu'une surface fermée de forme quelconque, formée d'une substance parfaitement conductrice, qui n'est primitivement traversée par aucun courant, devient, sous l'influence d'une force magnétique extérieure, une nappe de courants ayant sur les points intérieurs une action telle que la force magnétique y est réduite à zéro.

Pour bien comprendre ce cas, il pourra être utile de se rappeler qu'aux environs d'un pareil corps la distribution de la force est la même que la distribution des vitesses dans un fluide incompressible aux environs d'un corps impénétrable de même forme.

Il est clair que, dans d'autres surfaces conductrices placées à l'intérieur de la première, et n'étant, par suite, soumises à aucune force magnétique, aucun courant ne sera excité. Donc, dans un solide formé d'une matière parfaitement conductrice, l'effet de la force magnétique est d'engendrer un système de courants limités exclusivement à la surface du corps.

841. Si le corps conducteur a la forme d'une sphère de rayon r, on peut montrer que son moment magnétique est égal à

$$-\tfrac{1}{2} r^3 X;$$

et si un certain nombre de ces sphères sont répandues dans un milieu, de façon que, dans l'unité de volume, la matière conductrice occupe le volume k', en posant $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ et $p = k'$ dans l'équation (17) du § 314, nous trouvons le coefficient de perméabilité magnétique, en le prenant égal à l'inverse de la résistance obtenue à ce paragraphe, soit

$$\mu = \frac{2 - 2k'}{2 + k'}; \tag{9}$$

d'où nous tirons, pour le coefficient magnétique de Poisson,

$$k = -\tfrac{1}{2}k', \tag{10}$$

et, pour le coefficient d'aimantation induite de Neumann,

$$k = -\frac{3}{4\pi}\frac{k'}{2 + k'}. \tag{11}$$

Puisque la conception mathématique de corps parfaitement conducteurs conduit à des résultats très éloignés de tous les phénomènes que l'on peut observer dans les conducteurs ordinaires, poussons plus loin notre étude.

842. Revenons, comme au § 836, au cas d'un chemin conducteur en forme de courbe fermée d'aire A. Le moment de la force électromagnétique qui tend à augmenter l'angle θ est

$$\gamma\gamma' \frac{dM}{d\theta} = -\gamma X A \sin\theta, \tag{12}$$

$$\gamma\gamma' \frac{dM}{d\theta} = \frac{X^2 A^2}{L} \sin\theta\cos\theta. \tag{13}$$

Cette force est positive ou négative, suivant que θ est plus grand ou plus petit qu'un angle droit. Ainsi, une force magnétique agissant sur un chemin parfaitement conducteur tend à lui faire tourner son axe perpendiculairement à la ligne de force magnétique, de façon que le plan du chemin devienne parallèle aux lignes de force.

On peut observer un effet de ce genre lorsque l'on place une pièce ou un anneau de cuivre entre les pôles d'un électro-aimant. A l'instant où l'aimant est excité, l'anneau tourne et oriente son plan dans la di-

rection axiale; mais cette force s'annule aussitôt que les courants ont été éteints par la résistance du cuivre (¹).

843. Jusqu'ici, nous n'avons considéré que les cas où les courants sont excités uniquement par la force magnétique extérieure. Examinons maintenant en quoi la théorie de Weber, sur l'induction magnéto-électrique des courants moléculaires, touche à la théorie d'Ampère sur le magnétisme ordinaire. Suivant la théorie d'Ampère et de Weber, dans les substances magnétiques, les courants moléculaires ne sont pas excités par la force magnétique extérieure, mais lui préexistent; c'est la molécule elle-même qui subit l'action et qui est déviée de sa position par l'action électromagnétique que la force magnétique exerce sur le circuit conducteur traversé par le courant. Quand Ampère émit cette hypothèse, l'induction des courants électriques n'était pas connue, et il ne fit point d'hypothèse pour rendre compte de l'existence ou pour déterminer la force de ces courants moléculaires.

Mais, maintenant, nous sommes obligés d'étendre à ces courants les mêmes lois que Weber a appliquées aux courants des molécules diamagnétiques. Nous devons seulement supposer que la valeur primitive du courant γ, quand aucune force magnétique n'est encore en jeu, est non pas zéro, mais γ_0. Lorsqu'une force magnétique X agit sur un courant moléculaire d'aire A, dont l'axe fait l'angle θ avec la ligne de force magnétique, la force du courant est

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{XA}{L}\cos\theta, \tag{14}$$

et le moment du couple qui tend à faire tourner la molécule de manière à augmenter l'angle θ est

$$-\gamma_0 XA\sin\theta + \frac{X^2A^2}{2L}\sin 2\theta; \tag{15}$$

d'où, posant

$$A\gamma_0 = m, \qquad \frac{A}{L\gamma_0} = B, \tag{16}$$

dans l'étude faite au § 443, l'équation d'équilibre devient

$$X\sin\theta - BX^2\sin\theta\cos\theta = D\sin(\alpha - \theta). \tag{17}$$

(¹) *Voir* FARADAY, *Exp. Res.*, 2310, etc.

La composante du moment magnétique du courant, dans la direction de X, est

$$\gamma A \cos\theta = \gamma_0 A \cos\theta - \frac{XA^2}{L}\cos^2\theta, \tag{18}$$

$$\gamma A \cos\theta = m\cos\theta(1 - BX\cos\theta). \tag{19}$$

844. Ces conditions diffèrent de celles qui paraissent dans la théorie de l'induction magnétique de Weber, par les termes qui renferment le coefficient B. Si BX est petit relativement à l'unité, les résultats seront voisins de ceux que donne la théorie du magnétisme de Weber. Si BX est grand relativement à l'unité, ils approcheront des résultats que donne sa théorie du diamagnétisme.

Or, plus grande est la valeur primitive γ_0 du courant moléculaire, plus petit devient B, et si L aussi est grand, B est encore diminué. Si le courant circule dans un chemin en forme d'anneau, la valeur de L dépend de $\log\frac{R}{r}$, où R est le rayon de la ligne moyenne du chemin, et où r est le rayon de la section. Donc, plus la section du chemin sera petite relativement à son aire, et plus grand sera le coefficient de self-induction L, et plus aussi les résultats se rapprocheront de ceux que donne la théorie primitive de Weber. Toutefois, il subsistera cette différence que, quand la force magnétisante X croît, le moment magnétique temporaire non seulement atteint un maximum, mais décroît ensuite quand X continue d'augmenter.

Si jamais on démontrait par expérience que, quand la force magnétisante croît continuellement, la magnétisation temporaire d'une substance quelconque commence par croître, et diminue ensuite, ce serait, à mon sens, donner presque la valeur d'une démonstration aux raisons que nous pouvons avoir de croire à l'existence de ces courants moléculaires.

845. Si, dans les substances diamagnétiques, les courants moléculaires sont renfermés dans des chemins déterminés, et si les molécules peuvent être déviées comme celles des substances magnétiques, la polarité diamagnétique devra toujours augmenter en même temps que la force magnétisante, mais pas tout à fait aussi vite une fois la force devenue grande. Toutefois, la petite valeur absolue du coefficient diamagnétique montre que la force de déviation qui agit sur chaque molécule, est faible relativement à la force qui agit sur chaque molécule d'une substance magnétique, de sorte qu'il ne se-

rait peut-être guère possible de constater les effets dus à cette déviation.

D'autre part, si, dans les corps diamagnétiques, les courants moléculaires peuvent parcourir librement la masse entière des molécules, la polarité diamagnétique devra être rigoureusement proportionnelle à la force magnétisante, et sa grandeur permettra de déterminer l'espace total occupé par les matières parfaitement conductrices, et, si nous connaissons le nombre des molécules, à déterminer la grandeur de chacune d'elles.

CHAPITRE XXIII.

THÉORIES DES ACTIONS A DISTANCE.

Explication de la formule d'Ampère, par Gauss et Weber.

846. L'attraction entre les éléments ds et ds', traversés par les courants d'intensité i et i', est, d'après la formule d'Ampère,

$$(1) \qquad \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(2\cos\varepsilon + 3\,\frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'}\right),$$

ou bien

$$(2) \qquad -\frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(2r\,\frac{d^2r}{ds\,ds'} - \frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'}\right),$$

les courants étant évalués en unités électromagnétiques. (*Voir* § 526.)

Les quantités qui paraissent dans ces expressions et dont nous avons à expliquer la signification sont

$$(3) \qquad \cos\varepsilon, \quad \frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'} \quad \text{et} \quad \frac{d^2r}{ds\,ds'},$$

et le phénomène qui s'offre le plus naturellement pour y chercher une interprétation fondée sur une relation directe des courants est la vitesse relative de l'électricité dans les deux éléments.

847. Considérons donc le mouvement de deux points matériels animés de vitesses constantes v et v' le long des éléments ds et ds'. Le carré de la vitesse relative de ces points matériels est

$$u^2 = v^2 - 2vv'\cos\varepsilon + v'^2,$$

et, si l'on désigne par r la distance des points,

$$(4) \qquad \frac{\partial r}{\partial t} = v\,\frac{dr}{ds} + v'\,\frac{dr}{ds'},$$

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = v^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + 2vv'\,\frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'} + v'^2\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2,$$

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = v^2\,\frac{d^2r}{ds^2} + 2vv'\,\frac{d^2r}{ds\,ds'} + v'^2\,\frac{d^2r}{ds'^2},$$

le symbole ∂ indiquant que, dans la quantité différentiée, les coordonnées des points doivent être exprimées en fonction du temps.

On voit que les termes qui renferment le produit vv' dans les équations (3), (5) et (6) contiennent les quantités qui se présentent dans les équations (1) et (2), et que nous voulons interpréter. Nous allons donc entreprendre d'exprimer (1) et (2) en fonction de u^2, $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$. Mais, pour cela, il faut d'abord nous débarrasser des premiers et troisièmes termes de ces expressions qui renferment des quantités ne paraissant pas dans la formule d'Ampère. Par suite, nous ne pouvons expliquer le courant électrique par un transport d'électricité dans une direction seulement; mais, dans chaque courant, nous devons combiner deux flux opposés, de façon que l'effet combiné des termes qui renferment v^2 et v'^2 puisse être nul.

848. Supposons donc que dans l'élément ds nous ayons une molécule d'électricité e se mouvant avec la vitesse v, et une autre e_1 se mouvant avec la vitesse v_1, et, de même, dans l'élément ds', deux molécules e' et e'_1 se mouvant avec les vitesses v' et v'_1.

Le terme qui renferme v^2, pour l'action combinée de ces molécules, est

$$\Sigma(v^2 ee') = (v^2 e + v_1^2 e_1)(e' + e'_1). \tag{7}$$

De même

$$\Sigma(v'^2 ee') = (v'^2 e' + v'^2_1 e'_1)(e + e_1), \tag{8}$$

et

$$\Sigma(vv' ee') = (ve + v_1 e_1)(v'e' + v'_1 e'_1). \tag{9}$$

Pour que $\Sigma(v^2 ee')$ puisse être nul, il faut que nous ayons

$$e' + e'_1 = 0 \quad \text{ou bien} \quad v^2 e + v_1^2 e_1 = 0. \tag{10}$$

D'après l'hypothèse de Fechner, le courant électrique consiste en un courant d'électricité positive dans le sens positif, et un courant d'électricité négative dans le sens négatif, les deux courants étant exactement égaux en grandeur numérique, comme quantité d'électricité en mouvement et comme vitesse de ce mouvement. Ainsi, les deux conditions (10) sont satisfaites par l'hypothèse de Fechner.

Mais, pour l'objet que nous avons en vue, il suffit d'admettre :

Que, dans chaque élément, la quantité d'électricité positive est égale à la quantité négative;

Ou bien que les quantités des deux électricités sont en raison inverse des carrés de leurs vitesses.

Or nous savons qu'en chargeant le second conducteur dans son ensemble, on peut faire $e' + e'_1$ positif ou négatif. D'après cette formule, un fil ainsi chargé, même n'étant pas traversé par un courant, agirait sur le premier fil traversé par un courant dans lequel $v^2 e + v_1^2 e_1$ aurait une valeur différente de zéro. On n'a jamais observé semblable action.

Donc, puisque l'on peut montrer, par expérience, que la quantité $e' + e'_1$ n'est pas toujours nulle et qu'au contraire la quantité $v^2 e + v_1^2 e_1$ n'est pas accessible à l'expérience, il vaut mieux, dans ces spéculations, supposer que c'est cette dernière quantité qui s'annule toujours.

849. Quelque hypothèse que l'on adopte, on ne saurait douter que la quantité totale d'électricité transportée le long de l'élément ds ne soit représentée algébriquement par

$$ve + v_1 e_1 = cids,$$

c étant le nombre d'unités d'électricité statique transportées dans l'unité de temps par le courant électrique unité; nous pouvons donc écrire l'équation (9)

$$\Sigma(vv'ee') = c^2 ii'\,ds\,ds'. \tag{11}$$

Donc la somme des quatre valeurs de (3), (5) et (6) devient

$$\Sigma(ee'u^2) = -2c^2 ii'\,ds\,ds'\cos\varepsilon, \tag{12}$$

$$\Sigma\left[ee'\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right] = 2c^2 ii'\,ds\,ds'\,\frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'}, \tag{13}$$

$$\Sigma\left(ee'\,r\,\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right) = 2c^2 ii'\,ds\,ds'\,r\,\frac{d^2 r}{ds\,ds'}, \tag{14}$$

et l'on peut écrire les équations (1) et (2) de l'attraction entre ds et ds' sous la forme

$$-\frac{1}{c^2}\,\Sigma\left\{\frac{ee'}{r^3}\left[u^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right]\right\} \tag{15}$$

et

$$-\frac{1}{c^2}\,\Sigma\left\{\frac{ee'}{r^3}\left[r\,\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right]\right\}. \tag{16}$$

850. En électricité statique, l'expression ordinaire de la répulsion de

deux particules électriques e et e', est $\frac{ee'}{r^2}$, et l'expression

$$\Sigma \frac{ee'}{r^2} = \frac{(e+e_1)(e'+e'_1)}{r^2} \tag{17}$$

donne la valeur de la répulsion électrostatique qui s'exercerait entre ces deux éléments, s'ils recevaient des charges d'ensemble.

Si donc nous adoptons pour la répulsion des deux molécules l'une ou l'autre des formes modifiées

$$\frac{ee'}{r^2}\left\{1+\frac{1}{c^2}\left[u^2-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right]\right\} \tag{18}$$

ou

$$\frac{ee'}{r^2}\left\{1+\frac{1}{c^2}\left[r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right]\right\}, \tag{19}$$

nous pouvons en déduire les forces électrostatiques ordinaires et les forces qui agissent entre les courants, telles que les a déterminées Ampère.

851. La première de ces expressions (18) a été découverte par Gauss (1), en juin 1835; il y voyait une loi fondamentale des actions électriques, à savoir que deux éléments d'électricité, dans un état de mouvement relatif, s'attirent ou se repoussent l'un l'autre autrement que s'ils étaient dans un état de repos relatif. Cette découverte ne fut pas, que je sache, publiée du vivant de Gauss; de sorte que la seconde expression, qui fut découverte indépendamment par Weber et publiée dans la première Partie de ses célèbres *Electrodynamische Maasbestimmungen* (2), fut le premier résultat de ce genre porté à la connaissance du monde savant.

852. Ces deux expressions, appliquées à la détermination de la force mécanique qui agit entre deux courants électriques, conduisent exactement au même résultat, et ce résultat est identique à celui d'Ampère. Mais, si on les considère comme exprimant la loi physique de l'action exercée entre deux particules électriques, on est conduit à rechercher si elles s'accordent avec les autres faits connus.

Ces deux expressions renferment la vitesse relative des particules. Or, quand on établit par le raisonnement mathématique le principe

(1) *Werke*, édition de Göttingen; 1867, vol. V, p. 686.
(2) *Abh. Leibnizens Ges.* Leipzig; 1846.

bien connu de la conservation de l'énergie, on admet généralement que la force qui agit entre les deux particules n'est fonction que de la distance, et l'on ajoute d'habitude que, si cette force est fonction de quelque autre quantité, du temps, par exemple, ou de la vitesse des particules, la démonstration ne s'applique plus.

Aussi a-t-on souvent admis qu'une loi des actions électriques où intervient la vitesse des particules est incompatible avec le principe de la conservation de l'énergie.

853. La formule de Gauss est incompatible avec ce principe et doit, par suite, être abandonnée; car elle conduit à cette conclusion, que de l'énergie pourrait être indéfiniment engendrée par des moyens physiques dans un système limité. Cette objection ne s'applique pas à la formule de Weber; car il a montré (1) que, si l'on admet que l'énergie potentielle d'un système formé de deux particules électriques est représentée par

$$\psi = \frac{ee'}{r}\left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right]; \tag{20}$$

la répulsion qui s'exerce entre ces particules s'obtient en différentiant cette quantité par rapport à r et en changeant le signe, ce qui donne exactement la même expression que la formule (19).

Donc, quand une particule se déplace, le travail effectué par la répulsion d'une particule fixe est $\psi_0 - \psi_1$, où ψ_0 et ψ_1 sont les valeurs de ψ au commencement et à la fin du parcours. Or ψ ne dépend que de la distance r et de la composante de la vitesse suivant la direction de r. Si donc une particule décrit un circuit fermé, en sorte que sa position, sa vitesse et la direction de son mouvement soient les mêmes à la fin qu'au commencement, ψ_1 sera égal à ψ_0 et, au total, aucun travail n'aura été effectué pendant le cycle des opérations.

Donc une quantité infinie de travail ne peut pas être engendrée par une particule animée d'un mouvement périodique sous l'action de la force qu'avait admise Weber.

854. Mais Helmholtz, dans son Mémoire, d'une si haute portée, *Sur les équations du mouvement de l'Électricité dans les conducteurs en repos* (2), montre que, si la formule de Weber n'est pas incompatible avec le principe de la conservation de l'énergie en ce qui

(1) *Pogg. Ann.*, LXXIII, p. 229; 1848.
(2) *Journal de Crelle*, t. 72; 1870.

concerne seulement le travail effectué pendant une période cyclique complète, cette formule conduit à conclure que deux particules électriques se mouvant suivant la loi de Weber et ayant à l'origine une vitesse finie peuvent ensuite, étant encore à une distance finie l'une de l'autre, acquérir une énergie cinétique infinie et accomplir une quantité de travail infinie.

A cela, Weber (1) répond que, dans l'exemple d'Helmholtz, la vitesse initiale relative des particules est finie, sans doute, mais plus grande que la vitesse de la lumière, et que la distance à laquelle l'énergie cinétique devient infinie est en effet finie, mais plus petite que toute quantité perceptible, de sorte qu'il peut être physiquement impossible de rapprocher autant deux particules. Par suite, aucune méthode exprimentale ne permet de vérifier ce qui se passe dans le cas cité comme exemple.

Aussi Helmholtz (2) a-t-il indiqué, pour servir aux vérifications expérimentales, un cas où les distances ne sont pas trop petites ni les vitesses trop grandes. Une surface sphérique non conductrice fixe, de rayon a, reçoit une charge uniforme d'électricité, de densité superficielle σ. Une particule de masse m, portant la charge d'électricité e, se meut à l'intérieur de la sphère avec la vitesse v. Le potentiel électrodynamique, calculé par la formule (20), est

$$4\pi a\sigma e\left(1-\frac{v^2}{6c^2}\right), \tag{21}$$

et il est indépendant de la position de la sphère. Ajoutant V, le reste de l'énergie potentielle due à l'action des autres forces, et $\frac{1}{2}mv^2$, l'énergie cinétique de la particule, nous avons pour équation de l'énergie

$$\frac{1}{2}\left(m-\frac{4}{3}\frac{\pi a\sigma e}{c^2}\right)v^2+4\pi a\sigma e+\mathrm{V}=\text{const.} \tag{22}$$

On peut augmenter indéfiniment le second terme du coefficient de v^2 en augmentant le rayon a de la sphère, la densité superficielle σ restant constante; le coefficient de v^2 peut donc être rendu négatif. Ainsi, une accélération du mouvement de la particule correspondrait à une diminution de force vive, et un corps se mouvant dans un circuit fermé et soumis à une force telle que le frottement, toujours dirigée

(1) *Electr. Maasb. insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie.*

(2) *Berlin. Monastbericht*, avril 1872; *Phil. Mag.*, décembre 1872; Supplément.

en sens inverse du mouvement, aurait une vitesse constamment croissante, et cela sans limites. Ce résultat impossible devient une conséquence nécessaire, dès qu'on admet pour le potentiel une formule quelconque introduisant des termes négatifs dans le coefficient de ρ^2.

855. Mais considérons maintenant l'application de la théorie de Weber à des phénomènes réalisables. Nous avons vu comment elle donne la formule d'Ampère pour exprimer l'action qui s'exerce entre deux éléments de courant électrique. Le potentiel d'un de ces éléments sur l'autre s'obtient en prenant la somme des valeurs du potentiel ψ pour les quatre combinaisons des courants positifs et négatifs des deux éléments. D'après l'équation (20), le résultat est, en prenant la somme des quatre valeurs de $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$,

$$-ii'\,ds\,ds'\,\frac{1}{r}\,\frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'}, \tag{23}$$

et le potentiel d'un courant fermé sur un autre est

$$-ii'\int\int\frac{1}{r}\,\frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds' = ii'\,\mathrm{M}, \tag{24}$$

où

$$\mathrm{M} = \int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds',$$

comme aux §§ 423 et 524.

Dans le cas des courants fermés, cette expression se confond avec celle que nous avons déjà obtenue (1) (§ 524).

Théorie de Weber sur l'induction des courants électriques.

856. Après avoir déduit de la formule d'Ampère, relative aux actions entre éléments de courant, sa propre formule relative aux actions entre particules mobiles d'électricité, Weber s'occupa d'expliquer au moyen de cette formule la production des courants électriques dans l'induction magnéto-électrique. Il fut des plus heureux dans cette partie de son œuvre, et nous allons indiquer la méthode par

(1) Dans tout le cours de cette étude, Weber emploie le système des unités électrodynamiques. Dans ce Traité nous employons toujours le système électromagnétique. L'unité électromagnétique de courant est à l'unité électrodynamique dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1 (§ 526).

laquelle les lois des courants induits peuvent se déduire de la formule de Weber. Mais nous devons observer que ce fait d'une loi déduite de phénomènes découverts par Ampère, permettant de rendre compte de phénomènes découverts plus tard par Faraday, ne fournit pas, en faveur de la vérité physique de cette loi, un nouveau témoignage ayant autant de poids qu'on pourrait le supposer au premier abord.

En effet, Helmholtz et Thomson ont montré (§ 543) que, si les phénomènes d'Ampère sont vrais, et si l'on admet la loi de la conservation de l'énergie, les phénomènes d'induction découverts par Faraday deviennent des conséquences nécessaires. Or la loi de Weber, avec les diverses hypothèses qu'elle comprend sur la nature des courants électriques, conduit, par une série de transformations mathématiques, à la loi d'Ampère. De plus, la loi de Weber est compatible avec le principe de la conservation de l'énergie, en ce sens, du moins, qu'il y a un potentiel; et c'est là tout ce qui est nécessaire pour qu'on puisse suivre Helmholtz et Thomson dans l'application du principe. Donc, on peut affirmer, avant même de faire aucun calcul sur la question, que la loi de Weber doit rendre compte des courants d'induction. Et le fait qu'en faisant le calcul on trouve que cette loi explique les courants d'induction laisse exactement au point où elle en était la preuve de la vérité physique de la loi.

D'autre part, la formule de Gauss explique bien les phénomènes d'attraction des courants, mais elle est en contradiction avec le principe de la conservation de l'énergie : nous ne pouvons donc affirmer qu'elle doive expliquer tous les phénomènes d'induction. De fait, elle n'y réussit pas, ainsi que nous le verrons au § 859.

857. Nous devons donc considérer la force électromotrice due au courant traversant ds, qui tend à produire un courant dans l'élément ds', quand ds est en mouvement ou bien est traversé par un courant variable.

Suivant Weber, l'action exercée sur la matière, qui forme le conducteur dont fait partie ds', est la *somme* de toutes les actions exercées sur l'électricité qui traverse ce conducteur. D'autre part, la force électromotrice qui agit sur l'électricité de ds' est la *différence* des forces électriques qui agissent sur l'électricité positive et l'électricité négative contenues dans cet élément. Puisque toutes ces forces agissent suivant la ligne qui joint les éléments, la force électromotrice qui agit sur ds' est aussi dirigée suivant cette ligne, et, pour obtenir

la force électromotrice suivant ds', il faut prendre la composante de la force dans cette direction.

Pour appliquer la formule de Weber, il nous faut calculer les différents termes qui s'y rencontrent, en supposant que l'élément ds est en mouvement relativement à ds' et que, dans les deux éléments, les courants varient avec le temps. Les expressions ainsi trouvées renfermeront des termes en v^2, vv', v'^2, v et v', ainsi que des termes indépendants de v ou de v', tous multipliés par ee'. Examinant, comme précédemment, les quatre valeurs de chaque terme, et considérant, en premier lieu, la force mécanique qui s'obtient par la somme des quatre valeurs, nous trouvons que le seul terme dont on doive tenir compte est celui qui comprend le produit $vv'ee'$.

Si maintenant nous considérons la force qui tend à produire un courant dans le second élément, et qui s'obtient par la différence des actions du premier élément sur l'électricité positive et sur l'électricité négative du second élément, nous trouvons que le seul terme à examiner est celui qui renferme vee'. Les quatre termes compris dans $\Sigma vee'$ peuvent s'écrire

$$e'(ve + v_1e_1) \quad \text{et} \quad e'_1(ve + v_1e_1).$$

Puisque $e' + e'_1 = 0$, la force mécanique due à ces termes est nulle, mais la force électromotrice qui agit sur l'électricité positive e' est $ve + v_1e_1$, et celle qui agit sur l'électricité négative e'_1 est égale et opposée à celle-ci.

858. Supposons maintenant que le premier élément ds se meuve, relativement à ds', avec une vitesse V dirigée dans une certaine direction, et désignons par $\widehat{Vds}$ et $\widehat{Vds'}$ les angles de la direction de V avec les directions de ds et de ds'. Alors le carré de la vitesse relative u des deux particules électriques est

$$(25) \quad u^2 = v^2 + v'^2 + V^2 - 2vv'\cos\varepsilon + 2Vv\cos\widehat{Vds} - 2Vv'\cos\widehat{Vds'}.$$

Le terme en vv' est le même que dans l'équation (3). Le terme en v, duquel dépend la force électromotrice, est

$$2Vv\cos\widehat{Vds};$$

Nous avons aussi, dans ce cas, pour la variation de r par rapport au temps,

$$(26) \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v\frac{dr}{ds} + v'\frac{dr}{ds'} + \frac{dr}{dt},$$

où $\frac{\partial r}{\partial t}$ est relatif au mouvement des particules électriques, et $\frac{dr}{dt}$ au mouvement du conducteur matériel. Si l'on forme le carré de cette quantité, le terme en vv', duquel dépend la force mécanique, est le même que dans l'équation (5); et celui qui comprend v, dont dépend la force électromotrice, est

$$2v\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}.$$

Différentiant (26) par rapport à t, nous trouvons

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = v^2\frac{d^2r}{ds^2} + 2vv'\frac{d^2r}{ds\,ds'} + v'^2\frac{d^2r}{ds'^2} + \frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds} + \frac{dv'}{dt}\frac{dr}{ds'}\\ + v\frac{dv}{ds}\frac{dr}{ds} + v'\frac{dv'}{ds'}\frac{dr}{ds'} + \frac{d^2r}{dt^2}.\end{aligned}\right.$$

Nous trouvons le même terme en vv' que dans (6). Le terme dont le signe change avec celui de v est $\frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds}$.

859. Si maintenant nous calculons, par la formule de Gauss [équation (18)], la force électrique résultante dans la direction du second élément ds', due à l'action du premier élément ds, nous obtenons

$$(28)\qquad \frac{1}{r^2}\,ds\,ds'\,i\mathrm{V}\left(2\cos\widehat{\mathrm{V}ds} - 3\cos\widehat{\mathrm{V}r}\cos\widehat{r\,ds}\right)\cos\widehat{r\,ds'}.$$

Comme cette expression ne renferme pas de terme où figure la variation du courant i, et que nous savons d'ailleurs que la variation du courant primaire produit une action inductive dans le circuit secondaire, nous ne pouvons accepter la formule de Gauss comme représentant véritablement l'action qui s'exerce entre les particules électriques.

860. Mais, si nous employons la formule de Weber (19), nous avons

$$(29)\qquad \frac{1}{r^2}\,ds\,ds'\left(r\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt} - i\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}\right)\frac{dr}{ds'}$$

ou

$$(30)\qquad \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\right)ds\,ds'.$$

Intégrant cette expression par rapport à s et à s', on obtient, pour la

force électromotrice dans le second circuit,

$$(31) \qquad \frac{d}{dt}\, i \iint \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{ds}{ds'}\, ds\, ds'.$$

Or, si le premier circuit est fermé,

$$\int \frac{d^2 r}{ds\, ds'}\, ds = 0;$$

d'où

$$(32) \qquad \int \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\, ds = \int \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + \frac{d^2 r}{ds\, ds'} \right) ds = -\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds.$$

Mais, d'après les §§ 423, 524,

$$(33) \qquad \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds' = \mathrm{M}.$$

On peut donc écrire, comme expression de la force électromotrice dans le second circuit,

$$(34) \qquad -\frac{d}{dt}(i\mathrm{M}),$$

ce qui est d'accord avec les résultats déjà établis par l'expérience (§ 539).

Sur la formule de Weber, considérée comme résultant d'une action transmise d'une particule d'électricité à une autre, avec une vitesse constante.

861. Dans une très intéressante lettre à W. Weber (1), Gauss revient sur les conceptions électrodynamiques qui l'avaient longtemps occupé, et qu'il aurait publiées s'il avait réussi à établir ce qu'il considérait comme la véritable clef de voûte de l'Électrodynamique, à savoir une façon de déduire la force qui agit entre les particules électriques en mouvement de la considération d'une action entre ces particules, non plus instantanée, mais se propageant avec le temps, d'une manière analogue à ce qui se produit pour la lumière. Il n'avait pas réussi à établir cette déduction quand il abandonna ses recherches électrodynamiques, et il avait la conviction intime qu'avant tout il était nécessaire de se former une représentation complète de la manière dont a lieu cette propagation.

Trois mathématiciens éminents ont entrepris de donner cette clef de voûte à l'Électrodynamique.

---

(1) 19 mars 1845; *Werke*, vol. V, p. 629.

862. Dans un Mémoire présenté à la Société royale de Göttingen, en 1858, retiré plus tard, et publié dans les *Annales de Poggendorf* seulement en 1867, après la mort de l'auteur, Bernhard Riemann déduit les phénomènes de l'induction des courants électriques d'une forme modifiée de l'équation de Poisson,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi\rho = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

où V est le potentiel électrostatique et α une vitesse.

Cette équation est de la même forme que celles qui expriment la propagation des ondes ou des autres ébranlements dans les milieux élastiques; mais l'auteur semble éviter de faire explicitement mention d'un milieu dans lequel se ferait la propagation.

L'étude mathématique de Riemann a été examinée par Clausius (1), qui n'admet pas que les procédés mathématiques en soient parfaitement justes, et qui a montré que l'hypothèse d'un potentiel se propageant comme la lumière ne conduit ni à la formule de Weber, ni aux lois connues de l'Électrodynamique.

863. Clausius a aussi examiné une étude beaucoup plus approfondie de C. Neumann sur les *Principes de l'Électrodynamique* (2). Mais Neumann a montré (3) que sa théorie de la transmission du potentiel d'une particule électrique à une autre est entièrement différente de celle qui a été proposée par Gauss, adoptée par Riemann et critiquée par Clausius, et dans laquelle la propagation est semblable à celle de la lumière. Il y a, au contraire, la plus grande différence possible entre la transmission du potentiel, d'après Neumann, et la propagation de la lumière.

Un corps lumineux envoie, dans tous les sens, de la lumière dont l'intensité ne dépend que du corps lumineux seulement, et non de la présence du corps qui est éclairé par lui.

Au contraire, une particule électrique émet un potentiel dont la valeur $\frac{ee'}{r}$ dépend, non seulement de la particule e qui l'envoie, mais encore de la particule e' qui le reçoit et de la distance r qui sépare les particules *à l'instant de l'émission*.

Dans le cas de la lumière, l'intensité diminue à mesure que la lu-

(1) *Pogg.*, vol. CXXXV, p. 612.
(2) Tübingen; 1868.
(3) *Mathematische Annalen*, I, p. 317.

mière se propage plus loin du corps lumineux; le potentiel émis parvient jusqu'au corps sur lequel il agit, sans que sa valeur originelle subisse la moindre altération.

La lumière reçue par le corps éclairé n'est, en général, qu'une fraction de la lumière qui tombe sur ce corps; le potentiel reçu par le corps attiré est identique ou égal au potentiel qui arrive sur ce corps.

Enfin, la vitesse de transmission du potentiel n'est pas, comme celle de la lumière, constante relativement à l'éther ou à l'espace; mais elle est plutôt, comme celle d'un projectile, constante relativement à la vitesse que possède la particule qui l'émet au moment de l'émission.

On voit donc que, pour comprendre la théorie de Neumann, nous devons nous représenter le mode de transmission du potentiel d'une façon bien différente de ce que nous avons l'habitude de considérer dans la propagation de la lumière. Pourra-t-on jamais accepter cette conception comme la *construirbare Vorstellung,* la représentation réalisable, du mode de transmission qui semblait nécessaire à Gauss? Je ne saurais le dire; mais, pour ma part, je n'ai jamais été capable de combiner dans mon esprit et de me représenter une image ayant quelque cohérence de la théorie de Neumann.

864. Le professeur Betti (1), de Pise, a traité la question d'une manière différente. Il suppose que les circuits fermés, dans lesquels circule le courant électrique, sont formés d'éléments qui sont polarisés périodiquement, c'est-à-dire à des intervalles de temps également espacés. Ces éléments polarisés agissent les uns sur les autres comme de petits aimants dont les axes sont dans la direction de la tangente au circuit. La période de cette polarisation est la même pour tous les circuits électriques. Betti suppose que l'action d'un élément polarisé sur un autre placé à une certaine distance a lieu, non d'une manière instantanée, mais au bout d'un temps proportionnel à la distance des éléments. De cette manière, il obtient, pour l'action d'un circuit électrique sur un autre, des expressions qui concordent avec celles que l'on sait être vraies. Mais, dans ce cas encore, Clausius a élevé contre certaines parties du développement mathématique des critiques dans le détail desquelles nous n'entrerons pas ici.

865. Il semble qu'il y ait, dans l'esprit de ces hommes éminents,

(1) *Nuovo Cimento,* XXVII; 1868.

quelque prévention ou quelque objection, *a priori*, contre l'existence d'un milieu où se produiraient les phénomènes de radiation lumineuse et calorifique et les actions électriques à distance. Il est vrai que, à une certaine époque, ceux qui se livraient à des spéculations sur les causes des phénomènes physiques avaient l'habitude d'expliquer chaque espèce d'action à distance au moyen d'un fluide éthéré spécial, dont c'étaient la fonction et la propriété de produire ces actions. Ils remplissaient l'espace entier de trois ou quatre sortes d'éthers superposés, dont les propriétés n'étaient imaginées que pour sauver les apparences; aussi les chercheurs plus raisonnables préférèrent-ils accepter, non seulement la loi particulière de Newton sur l'attraction à distance, mais encore le dogme professé par Cotes (1), que l'action à distance est une des propriétés premières de la matière, et qu'aucune explication ne saurait être plus intelligible que ce fait. Aussi la théorie ondulatoire de la lumière a-t-elle rencontré une vive opposition, motivée non pas tant par son impuissance à expliquer les phénomènes, que par l'hypothèse même d'un milieu où se propagerait la lumière.

866. Nous avons vu que dans l'esprit de Gauss les expressions mathématiques de l'action électrodynamique conduisaient à cette conviction que la véritable clef de voûte de l'électrodynamique ne se trouverait que dans une théorie de la propagation de l'action électrique où interviendrait le temps. Or, nous ne pouvons concevoir une propagation dépendant du temps que de deux manières : transport d'une substance matérielle à travers l'espace, ou propagation d'un état de mouvement ou de tension dans un milieu déjà existant dans l'espace. Dans la théorie de Neumann, on suppose que cette conception mathématique, le potentiel, que nous ne saurions concevoir comme une substance matérielle, est projetée d'une particule à une autre, d'une façon qui est tout à fait indépendante du milieu, et qui, ainsi que le signale Neumann lui-même, diffère extrêmement du mode de propagation de la lumière. Dans les théories de Riemann et de Betti, on paraît supposer que l'action se propage d'une manière un peu plus semblable à ce qui a lieu pour la lumière.

Mais dans toutes ces théories se présente naturellement une question : si quelque chose est transmis d'une particule à une autre située à une certaine distance, quel est l'état de ce quelque chose après qu'il

(1) Préface des *Principia* de Newton; 2e édition.

a quitté la première particule, avant qu'il ait atteint la seconde? Si ce quelque chose est, comme dans la théorie de Neumann, l'énergie potentielle des deux particules, sous quelle forme devons-nous concevoir que cette énergie existe en un point de l'espace qui ne coïncide ni avec l'une, ni avec l'autre des particules? En fait, toutes les fois que de l'énergie est transmise d'un corps à un autre, le temps intervenant dans cette transmission, il faut qu'il y ait un milieu ou une substance où l'énergie existe après avoir quitté le premier corps, avant d'avoir atteint le second; car, comme le remarque Torricelli (1), l'énergie « est une quintessence de nature si subtile qu'elle ne saurait être contenue dans aucun autre vase que la substance la plus intime des objets matériels ». Donc, toutes ces théories conduisent à concevoir un milieu dans lequel se produit la propagation; et, si nous admettons l'hypothèse de ce milieu, je crois qu'il doit tenir une place prédominante dans la suite de nos recherches, et que nous devons essayer de combiner dans notre esprit et de nous représenter tous les détails de son action : c'est l'objet que je me suis constamment proposé dans tout le cours de ce *Traité*.

(1) *Lezioni accademiche*, Firenze, 1715, p. 25.

NOTE

Sur l'électromètre absolu;

PAR M. A. POTIER.

1. Dans le Chapitre XII de la première Partie, Maxwell examine un certain nombre de problèmes relatifs à la distribution de l'électricité; il résout rigoureusement ceux qui se rapportent à la distribution sur des conducteurs, illimités dans un sens, et formant une série de plans parallèles; puis, par des assimilations dont la rigueur est contestable, il arrive à trouver l'effet d'un sillon creusé dans un plan; une méthode d'approximation lui permet alors de passer des problèmes à deux dimensions à d'autres questions concernant des surfaces de révolution et d'arriver enfin à une théorie de l'anneau de garde de Sir W. Thomson; il revient sur ce sujet § 217, à propos de l'électromètre absolu, et indique alors un moyen de tenir compte de la différence de niveau entre le disque mobile et l'anneau de garde; il applique pour cela une formule établie sur le plan d'épreuve, assimilant la surface du disque (supposé en saillie sur l'anneau) et celle de l'anneau à la surface du plan électrisé sur lequel est placé un plan d'épreuve; mais cette assimilation n'est pas permise, vu la présence d'un sillon entre l'anneau et le disque, sillon dont la largeur est considérable vis-à-vis de cette différence de niveau; aussi la valeur du terme correctif ainsi introduit est-elle beaucoup trop forte.

La dispositif de l'anneau de garde ayant une très grande importance pratique, soit comme condensateur, soit comme électromètre absolu, il a paru utile d'en reprendre l'étude avec autant de soin que possible; dans ce but, on expose ci-dessous comment, par l'emploi des fonctions conjuguées, il est possible de résoudre quelques problèmes à deux dimensions, que Maxwell ne traite que par approximation; cette méthode a été indiquée par Kirchhoff et appliquée par lui au condensateur à deux plateaux et à l'anneau de garde; on examinera ensuite les corrections introduites par la forme circulaire, soit que l'anneau de garde appartienne à un électromètre, soit qu'il fasse partie d'un condensateur.

La conclusion de cette étude est que les corrections de second ordre sont actuellement très mal déterminées; qu'on peut cependant leur assigner une valeur maximum, qui est négligeable dans les appareils bien construits; et que, quant aux corrections de premier ordre, il suffira le plus souvent de s'en tenir à la règle donnée par Sir W. Thomson, et d'augmenter le rayon du disque suspendu de la moitié du sillon.

2. Schwartz a fait la remarque suivante : Soit dans un plan un espace limité

par des droites, se coupant sous des angles quelconques, et x, y les coordonnées d'un point de cet espace, z la variable complexe $x+yi$; on peut toujours assigner une autre variable complexe $t=r+si$, liée à z par une relation $z=f(t)$, telle, 1° qu'à chaque point (r, s) corresponde un seul point (x, y), et réciproquement; 2° que le contour limitant l'espace corresponde à la droite $s=0$, de sorte que cet espace limité dans le plan (x, y) soit une représentation conforme de toute la partie du plan (r, s) pour laquelle s est positif. On posera pour cela

$$dz = K\,dt\,(t-a_1)^{\alpha_1}\dots(t-a_n)^{\alpha_n},$$

$a_1,\dots,a_n$ étant des quantités réelles. Si l'on décrit autour de chacun des points du plan (r, s) pour lesquels $t=a_1,\dots,$ ou a_n, une demi-circonférence de rayon très petit ε, du côté positif ($s>0$) de l'axe $s=0$, et qu'on assujettisse le point représentant la variable t à ne traverser ni la ligne $s=0$ ni aucune de ces demi-circonférences, la valeur de $\frac{dz}{dt}$ une fois choisie arbitrairement, parmi les valeurs multiples qu'elle peut prendre si les exposants α sont fractionnaires, pour un point quelconque du plan (r, s), sera déterminée sans ambiguïté pour tout le plan; il en sera de même de z, si l'on a choisi arbitrairement sa valeur pour un point du plan. Le point (x, y) représentant le point (r, s) sera alors à l'intérieur d'un contour qui sera la représentation de l'axe $s=0$, des demi-circonférences dont on vient de parler, et d'une demi-circonférence de rayon infini située du côté positif de l'axe $s=0$. Ce contour sera formé : 1° de lignes droites correspondant aux parties rectilignes ($s=0$) du contour limitant l'aire du point (r, s); en effet, si t est réel et varie de $a_p+\varepsilon$ à $a_{p+1}-\varepsilon$, l'argument de l'imaginaire dz reste invariable, et cet argument a pour tangente $\frac{dy}{dx}$: donc le point z décrira une ligne droite; 2° de parties correspondant aux demi-circonférences; soit la demi-circonférence décrite du point a_p comme centre, la valeur de t est $a_p-\varepsilon(\cos\omega-i\sin\omega)$, pendant que le point passe de $a_p-\varepsilon$ à $a_p+\varepsilon$ en décrivant cette demi-circonférence, ω croissant de 0 à π.

On aura donc, si ε est très petit,

$$dz = -K(a_p-a_1)^{\alpha_1}\dots(a_p-a_n)^{\alpha_n}(-\varepsilon)^{\alpha_p}e^{-i\alpha_p\omega}.\varepsilon e^{-i\omega}\,i\,d\omega$$

et, par suite,

$$z = K(a_p-a_1)^{\alpha_1}\dots(a_p-a_n)^{\alpha_n}(-\varepsilon)^{(\alpha_p+1)}e^{i(\alpha_p+1)\omega}+C;$$

quand ω varie, le module de $z-C$ reste invariable, le point (x, y) décrit une portion de circonférence, vue de son centre sous l'angle

$$(\alpha_p+1)\pi,$$

et dont le rayon est, si α_p+1 est positif, nul ou infiniment petit, infini au contraire si α_p+1 est négatif. Si α_p+1 est nul, le rayon de la circonférence est encore infini, mais

$$z = K(a_p-a_1)^{\alpha_1}\dots(a_p-a_n)^{\alpha_n}i\omega+C,$$

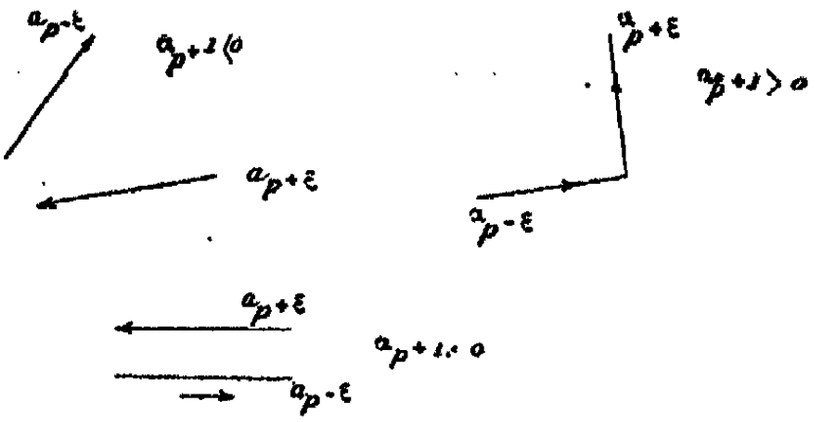
et le point z décrit une droite de longueur

$$\pi K(a_p-a_1)^{\alpha_1}\dots(a_p-a_n)^{\alpha_n},$$

située à l'infini, perpendiculaire à la direction qu'il suivait quand le point t passait de $a_{p-1}+\varepsilon$ à $a_p-\varepsilon$.

Quand le point t a décrit la demi-circonférence et reprend la partie rectiligne au delà de $a_p + \varepsilon$, le point z décrit une nouvelle ligne droite, mais formait l'angle $\alpha\pi$ avec la précédente, les angles étant comptés positivement dans le sens direct.

Fig. 75.



Enfin, lorsque le point t décrira la circonférence de rayon infini, on posera

$$t = \mathrm{R}e^{i\omega},$$

ω croissant de zéro à π; et, par suite,

$$dz = \mathrm{K}\mathrm{R}^{1+\alpha_1+\ldots+\alpha_n} e^{i(\alpha_1+1\ldots\alpha_n)\omega}\, d\omega$$

et

$$z = \frac{\mathrm{K}\mathrm{R}^{(1+\alpha_1+\ldots+\alpha_n)}}{1+\alpha_1+\ldots+\alpha_n} e^{i(1+\alpha_1+\ldots+\alpha_n)\omega} + \mathrm{C};$$

le point z décrira donc encore une portion de circonférence vue de son centre sous un angle

$$(1+\Sigma\alpha)\pi,$$

et de rayon nul, ou infini suivant que $(1+\Sigma\alpha)$ est négatif ou positif. Si cette somme est nulle, le point z décrira une droite de longueur

$$\mathrm{K}\pi,$$

perpendiculaire à sa direction antérieure, située à l'infini, et reviendra parallèlement à cette direction, mais en sens inverse, lorsque t aura passé d'une valeur positive très grande à une valeur réelle négative très grande.

Si $\Sigma\alpha = 0$, on posera

$$dz = \left(\mathrm{K} + \frac{\mathrm{K}_1}{t}\right) dt = \mathrm{K}i\mathrm{R}e^{i\omega}\, d\omega + i\mathrm{K}_1\, d\omega$$

et

$$z = \mathrm{K}\mathrm{R}e^{i\omega} + i\omega\mathrm{K}_1 + \mathrm{C}.$$

Lorsque K et K_1 sont réels, l'abscisse x changera de $-2\mathrm{KR}$, en passant de l'infini positif à l'infini négatif, tandis que l'ordonnée y augmentera de $i\pi\mathrm{K}_1$.

Si donc le point t décrit l'axe $s = 0$ en partant de $-\infty$ jusqu'à $r = +\infty$, et revient à son point de départ, par une demi-circonférence de rayon infini, du côté positif de l'axe $s = 0$, le point z aura décrit un contour formé de droites se

coupant sous des angles π, en des points dont les coordonnées sont finies, et de portions de cercles situées à l'infini. Dans tout l'espace limité par le contour, x et y seront des fonctions conjuguées (§ 183) de r et s, et réciproquement.

Soient maintenant $b_1, b_2, \ldots$ les valeurs de a pour lesquelles ce contour est ouvert ou pour lesquelles $z_p + 1$ est négatif ou nul, et une fonction complexe w de t définie par l'équation

$$\pi w = A_1 l.(b_1 - t) + A_2 l.(b_2 - t) + \ldots + \text{const.}$$

et qui, par conséquent, n'aura qu'une seule valeur pour toutes les valeurs de t comprises dans la portion du plan (r, s) limitée ci-dessus; on conviendra de prendre les logarithmes réels pour les très grandes valeurs négatives de t. Si l'on pose

$$w = \psi + iV,$$

ψ et V seront encore des fonctions conjuguées de r et s et, par conséquent, de x et de y (§ 185); or, lorsque le point t suit l'axe $s = 0$, en partant de $-\infty$, la partie imaginaire de w reste invariable, jusqu'au moment où t passe de $b_1 - \varepsilon$ à $b_1 + \varepsilon$, en décrivant une demi-circonférence de rayon ε; pendant ce temps, la valeur de πw diminue de $i\pi A_1$; et le point t reprenant la ligne droite entre $b_1 + \varepsilon$ et $b_2 - \varepsilon$, la partie imaginaire de w restera de nouveau constante, diminuera de $i\pi A_2$ quand le point t franchira le point b_2, et ainsi de suite; enfin, quand le point t décrira la demi-circonférence de rayon infini, le ramenant à son point de départ, la partie imaginaire de πw augmentera de $(A_1 + A_2 + \ldots)\pi$, revenant ainsi à sa valeur primitive. La valeur de V est donc V_0 pour de très grandes valeurs négatives de t, puis $V_0 - A_1$, de $t = b_1$ à $t = b_2$, $V_0 - A_1 - A_2$ de $t = b_2$ à $t = b_3$, ...; si l'on considère alors V et ψ comme des fonctions de z, on voit que, sur les portions continues du contour qui limite l'aire (z), V reste constant, et qu'il varie de $A_1, A_2, \ldots$ quand on passe d'une de ces portions continues à une autre.

3. La fonction V représentera donc le potentiel dans toute l'aire (z) supposée occupée par un diélectrique, si les portions continues du contour limitent des conducteurs aux potentiels V_0, $V_0 - A_1$, ...; si ds est un élément du contour, la densité y sera

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{4\pi}\frac{d\psi}{dt} : \operatorname{mod}\left(\frac{dz}{dt}\right),$$

ce module étant la valeur arithmétique de $\frac{\partial z}{\partial t}$ pour la valeur (réelle) de t correspondant à ce point; en particulier, dans le voisinage d'une arête, saillante ou rentrante, correspondant à $t = a_p$ (a_p n'est aucun des b), $\operatorname{mod}\left(\frac{dz}{dt}\right)$ = valeur arithmétique de

$$K(a_p - a_\mu)^{\alpha_1} \ldots (a_\mu - a_p)^{\alpha_p}(t - a_p)^{\alpha_p}$$

et la densité sera proportionnelle à

$$(t - a_p)^{-\alpha_p},$$

tandis que la distance à l'arête est proportionnelle à

$$(t - a_p)^{(\alpha_p + 1)}.$$

Si donc d désigne cette distance, la densité est proportionnelle à

$$\frac{-e_p}{d^{\pi_p+1}}$$

quand $\alpha\pi$ est l'angle des plans formant l'arête; c'est l'expression donnée par Maxwell (§ 191).

On notera que

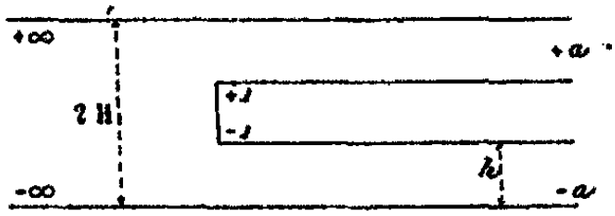
$$\frac{1}{4\pi}\left[\psi(t_1)-\psi(t_2)\right]$$

est la charge par unité de longueur perpendiculaire au plan de la figure, de la portion d'un conducteur comprise entre les points correspondant aux valeurs $t=t_1$ et $t=t_2$, et que les lignes de force ont pour équation

$$\psi = \text{const.}$$

4. On appliquera cette méthode au cas traité par Maxwell (§ 196). Un plateau d'épaisseur $2e$ est placé à égale distance de deux plaques indéfinies dont la distance

Fig. 76.



est $2H$; on posera $h=H-e=$ la distance du plateau aux plaques; la valeur de dz doit être

$$K\frac{\sqrt{t^2-1}}{a^2-t^2},$$

ce qui donne, pour une valeur de t comprise entre 1 et a,

$$x = K\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{2a}l.\frac{t\sqrt{a^2-1}+a\sqrt{t^2-1}}{t\sqrt{a^2-1}-a\sqrt{t^2-1}} - l.t+\sqrt{t^2-1}\right)=\int_1^t dz$$

la distance à l'arête.

D'ailleurs h et $2H$ sont donnés par les équations

$$2H = K\pi, \qquad h = K\pi\frac{\sqrt{a^2-1}}{2a},$$

ce qui permet d'écrire

$$\pi x = hl.\frac{t\sqrt{a^2-1}+a\sqrt{t^2-1}}{t\sqrt{a^2-1}-a\sqrt{t^2-1}} - 2Hl.\left(t+\sqrt{t^2-1}\right).$$

On posera, d'un autre côté,

$$\pi w = \pi(\psi+iV) = l.\frac{a+t}{a-t},$$

de sorte que V est nul quand t est compris entre $\pm a$ et égal à 1 en dehors de ces limites, c'est-à-dire nul sur le contour du plateau et égal à 1 sur les plaques. La densité en un point quelconque est

$$\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{\pi K}\frac{2a}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{4\pi h}\sqrt{\frac{a^2-1}{t^2-1}}$$

et se rapproche de $\frac{1}{4\pi h}$ quand t tend vers a et croît, d'une manière continue, quand t décroît de l'infini à 1; on conviendra d'appeler *densité normale* la densité

$$\frac{1}{4\pi h}$$

sur le plateau, à une très grande distance du bord.

L'excès de la charge, portée sur le plateau entre les points $t = 0$ et $t = t_1$, est

$$\frac{1}{4\pi^2} l.\frac{a+t_1}{a-t_1},$$

tandis que la charge normale de cette région serait

$$\frac{1}{4\pi}\frac{x_1}{h}.$$

L'excès est la charge, sous la densité normale d'une bande de largeur

$$\frac{h}{\pi} l.\frac{a+t_1}{a-t_1} - x_1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\pi}\left[2h l.\frac{t\sqrt{a^2-1}+a\sqrt{t^2-1}}{t+a} - 2H l.(t+\sqrt{t^2-1})\right]$$

et tend, lorsque x_1 tend vers l'infini, et t vers a, vers la limite finie,

$$\frac{1}{\pi}\left[2H l.(a+\sqrt{a^2-1}) - 2h l.\sqrt{a^2+1}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{H}{\pi} l.\frac{H+h}{H-h} - \frac{h}{\pi} l.\frac{h^2}{H^2-h^2},$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\left(\frac{H+h}{\pi}\right) l.(H+h) - \left(\frac{H-h}{\pi}\right) l.(H-h) - \frac{2h}{\pi} l.h,$$

expression différente de celle que donne la méthode approximative de Maxwell, et qui ne se confond avec elle que pour $e = 0$, ou $H = h$; elle devient alors

$$\frac{2H}{\pi} l.2.$$

5. On peut traiter le cas où le plateau, au potentiel 1, se trouverait en face d'une seule plaque indéfinie au potentiel zéro.

On posera

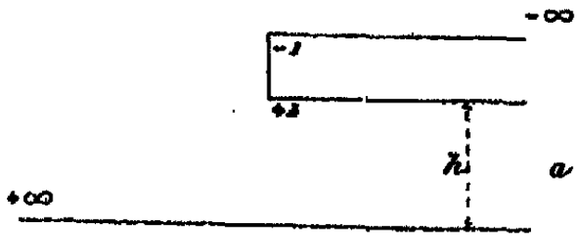
$$ds = \frac{K\sqrt{1-t^2}}{t-a},$$

en supposant a positif et plus grand que 1.

Si H et h représentent les distances des deux bords du plateau à la plaque,

$$H = a\pi K, \qquad h = \pi K\sqrt{a^2-1}.$$

Fig. 77.



La distance x_1 d'un point du bord inférieur du plateau à l'arête est

$$x_1 = K\left[-\sqrt{t^2-1} - al.t + \sqrt{t^2-1} + \sqrt{a^2-1}\,\frac{l.at-1+\sqrt{(a^2-1)(t^2-1)}}{a-t}\right] = \int_t^{-1} dz.$$

Le potentiel sera déterminé par l'équation

$$\pi(\psi + iV) = l.(t+a).$$

La densité variera comme le module de

$$\frac{1}{4\pi h}\,\frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Il sera donc facile de déterminer à quelle distance de l'arête inférieure la densité ne dépassera la densité normale que d'une fraction ε de sa valeur; en posant

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{t^2-1}} = 1+\varepsilon$$

dans la formule ci-dessus, qui peut s'écrire

$$\pi x_1 = hl.\frac{at-1+\sqrt{a^2-1.t^2-1}}{a-t} - Hl.(t+\sqrt{t^2-1}) + \sqrt{H^2-h^2}.\sqrt{t^2-1},$$

et donne approximativement, quand ε est petit,

$$\pi x_1 = h\,l.\frac{2(a^2-1)a}{\varepsilon(a^2-1)} - Hl.(a+\sqrt{a^2-1}) - \sqrt{H^2-h^2}.\sqrt{a^2-1}$$

ou

$$\pi x_1 = H\left[l.\frac{2H}{\sqrt{(H^2-h^2)\varepsilon}} - 1\right] - Hl.\sqrt{\frac{H+h}{H-h}}\ldots$$

ou

$$\pi x_1 = -\tfrac{1}{2}(H+h)\,l.(H+h) + \tfrac{1}{2}(H-h)\,l.(H-h) + h\left(l.\frac{2H}{\varepsilon e}\right),$$

qui devient, pour un plateau de faible épaisseur,

$$\pi x_1 = hl.\frac{1}{e\varepsilon} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = e^{-\left(1+\frac{\pi x_1}{h}\right)}.$$

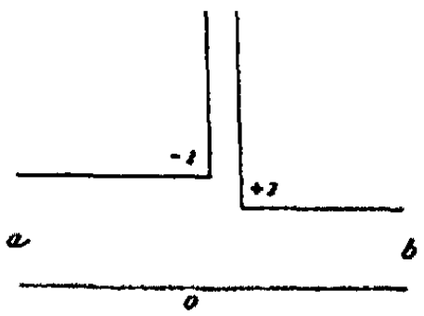
La distribution est, sur le plateau, la même que s'il était opposé à un plateau semblable, symétrique par rapport à la plaque et au potentiel -1; le rapport à la densité normale est le même à la même distance du bord; on peut donc considérer cette densité comme pratiquement uniforme dès que la distance au bord surpasse l'intervalle $2h$ des plateaux; car, pour $x = 2h$, on a déjà $\varepsilon = \frac{1}{1450}$.

6. Soient une plaque indéfinie, en face de deux plateaux séparés par un sillon de profondeur indéfinie, de largeur 2δ; h et h_1 les distances de ces deux plateaux à la plaque. En posant

$$dz = K\,dt\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{(t-a)(t-b)},$$

on pourra déterminer a, b de telle sorte que z soit, dans tout l'espace compris

Fig. 78.



entre la plaque et les plateaux, ainsi que dans le sillon, une fonction bien déterminée de t; il faut pour cela que l'on ait

$$(1)\qquad 2\delta = K\pi, \qquad h = K\pi\,\frac{\sqrt{1-a^2}}{b-a}, \qquad h_1 = K\pi\,\frac{\sqrt{1-b^2}}{b-a}.$$

On supposera $b > a$.

Pour les valeurs réelles de t comprises entre ± 1, on aura

$$\text{si } 1 > t > b \ldots\ldots \quad \pi z = \left(2\delta\varphi + h_1 l.\frac{\cos\frac{\varphi+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\varphi}{2}} - h l.\frac{\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}}{\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}}\right) + \pi i h' + C;$$

$$\text{si } b > t > a \ldots\ldots \quad \pi z = \left(2\delta\varphi + h_1 l.\frac{\cos\frac{\varphi+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\varphi}{2}} - h l.\frac{\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}}{\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}}\right) + C;$$

$$\text{si } a > t > -1 \ldots \quad \pi z = \left(2\delta\varphi + h_1 l.\frac{\cos\frac{\varphi+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\varphi}{2}} - h l.\frac{\cos\frac{\alpha-\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha+\varphi}{2}}\right) + \pi i h,$$

en prenant $x = 0$ pour l'axe du sillon et en posant

$$t = \sin\varphi, \qquad a = \sin\alpha, \qquad b = \sin\beta.$$

Si, d'un autre côté, on suppose que le potentiel soit zéro sur la plaque V_r sur le plateau de droite, V_0 sur le plateau de gauche; on pourra poser

$$\pi w = \pi(V + i\psi) = l[V_1 l.(b-t) - V_0 l.(t-a)].$$

De la comparaison des valeurs de w et de z on en déduit la densité

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial z} = K\sqrt{1-t^2}\,\frac{(V_1-V_0)t + (bV_0 - aV_1)}{4\pi^2},$$

qui se réduit à

$$\frac{V_0}{4\pi h} \quad \text{ou} \quad \frac{V_1}{4\pi h_1}$$

quand t est égal à a ou b.

Si l'on suppose les potentiels égaux, la densité devient

$$\frac{1}{4\pi^2 K}\,\frac{(b-a)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

7. Dans le cas où $h = h_1$, les valeurs de x abscisses des points correspondants aux valeurs de $t < 1$ seront, pour le plateau,

$$(2) \qquad \pi x = 2\delta'\varphi_1 + hl.\frac{\sin(\varphi_1+\beta)}{\sin(\varphi_1-\beta)} + C, \qquad \text{avec } \varphi_1 > \beta \quad \text{ou} \quad t = \sin\varphi_1 > b$$

et, pour la plaque indéfinie,

$$\pi x = 2\delta'\varphi_1 + hl.\frac{\sin(\varphi_1+\beta)}{\sin(\beta-\varphi_1)} + C, \qquad \text{avec } \varphi_1 < \beta \quad \text{ou} \quad t = \sin\varphi_1 < b,$$

La constante sera nulle si l'on prend $x = 0$, ou si l'origine est au pied de l'axe du sillon; la densité normale, pour les points très éloignés du sillon, où φ est voisin de b, est

$$\frac{1}{4\pi h}$$

et, en un point quelconque,

$$\frac{1}{4\pi h}\,\frac{\cos\beta}{\cos\varphi};$$

infinie sur les arêtes, elle décroît rapidement dans leur voisinage sur les plateaux; sur la plaque elle est minimum et égale à

$$\frac{1}{4\pi h}\cos\beta$$

sur l'axe du sillon et augmente quand on s'éloigne.

La ligne équipotentielle $V = C$ est asymptote à la droite $y = Ch$ et ne s'en écarte d'une manière appréciable que dans le voisinage du sillon; pour s'en rendre compte, il suffit de calculer la hauteur à laquelle cette courbe rencontre l'axe de ce sillon $x = 0$; on a alors

$$z = iy = K\int_0^t \frac{dt\sqrt{1+t^2}}{t^2-b^2} = iK\int_0^s \frac{ds\sqrt{1+s^2}}{b^2+s^2};$$

car, pour les points de cet axe, $r = 0$, et t se réduit à is.

On a également

$$\pi(V+i\psi)=il.\frac{t+b}{t-b}=il.\frac{si+b}{si-b}=2\operatorname{arc\,tang}\frac{s}{b}$$

ou

$$s=b\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}V,$$

tandis que

$$y=\frac{\delta'}{\pi}\left[l.(s+\sqrt{1+s^2})+\frac{\sqrt{1-b^2}}{b}\operatorname{arc\,tang}\frac{s\sqrt{1-b^2}}{b\sqrt{1+s^2}}\right]$$

ou

$$\frac{2\delta'}{\pi}l.(s+\sqrt{1+s^2})+\frac{2h}{\pi}\left(\operatorname{arc\,sin}=\sqrt{1-b^2}\sin\frac{\pi}{2}V\right),$$

qui, lorsque b est une fraction, ne diffère de Vh que pour les valeurs de V voisines de l'unité, mais est toujours plus grand.

Les lignes de force, pour lesquelles ψ est constant, sont de deux espèces. Les unes partent des flancs du sillon et viennent aboutir à la plaque. Si l'on fait $\psi=0$ pour l'axe du sillon, on a

$$\pi\psi=l\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$$

pour l'arête; la ligne de force qui part de cette arête arrive sur le plateau au point pour lequel ψ a la même valeur, et $t=b^2$, et ces lignes de force sont comprises entre l'axe du sillon et cette ligne particulière; les autres partent du bord inférieur du plateau et présentent un point d'inflexion, qui se confond avec l'arête pour la valeur ci-dessus de ψ et s'écarte de plus en plus du plateau, à mesure que ψ augmente et que les lignes de force se rapprochent de lignes droites.

Si l'on cherche à quelle distance de l'arête la densité ne dépasse la densité normale que de la fraction ε de sa valeur, on posera

$$\frac{\cos\beta}{\cos\psi}=\frac{\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1-t^2}}=1+\varepsilon,\quad\text{d'où}\quad t-b=\varepsilon\frac{\sqrt{1-b^2}}{b}=\varepsilon\cot\beta.$$

D'ailleurs, si l'on appelle x' la distance à l'arête, ou $x-\delta$, l'équation (2) donne

$$\sin(\varphi-\beta)=\sin(\varphi+\beta)e^{-\frac{\pi x'+\delta'(\pi-2\varphi)}{h}}$$

ou, pour les petites valeurs de ε,

$$\varepsilon=2\sin^2\beta\cos\beta e^{-\frac{\pi x'+\delta'(\pi-2\varphi)}{h}}.$$

Or φ est sensiblement égal à β, et $\delta'(\pi-2\varphi)$ presque constant; ε décroît donc sensiblement comme $e^{-\frac{\pi x'}{h}}$.

Il en résulte que, si deux sillons sont placés à une distance $2R$ l'un de l'autre, la présence de l'un d'eux sera sans action sur la densité au voisinage de l'autre tant que $e^{-\frac{2\pi R}{h}}$ sera négligeable.

Cette proposition peut d'ailleurs se démontrer directement; il suffit de poser

$$N\delta\sigma = \frac{\sqrt{(t^2-1)(t^2-b^2)}}{t^2-c^2.t^2-d^2}$$

et de déterminer les quantités b, c, d par les conditions

$$2Nh = \int_0^\infty \frac{(s^2+1)(s^2-b^2)}{(s^2+c^2)(s^2+d^2)}\,ds,$$

$$NR = \int_0^\infty \frac{\sqrt{(t^2-1)(t^2-b^2)}}{t^2-c^2.t^2-d^2}\,dt$$

et

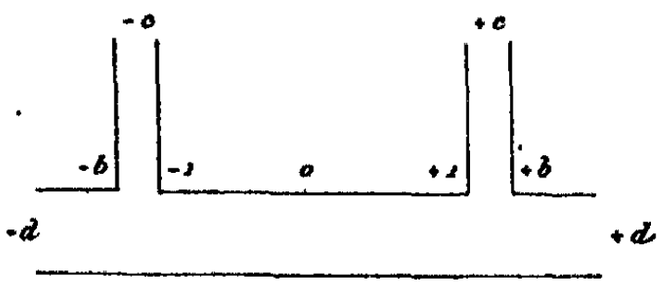
$$Nh_1 = \pi\frac{\sqrt{(d^2-1)(d^2-b^2)}}{2d.d^2-c^2}$$

et

$$N\delta = \pi\frac{\sqrt{(c^2-1)(b^2-c^2)}}{2c.d^2-c^2},$$

en profitant de ce que, pour les sillons étroits, $c-1$, $b-1$ et $b-c$ sont assez

Fig. 79.



petits pour se contenter de quadratures approchées.

8. La charge du plateau de droite, sur le flanc du sillon et sur une bande de largeur $(x_1-\delta)$ dont l'extrémité correspond à $t=t_1$, est

$$\frac{1}{4\pi}(\psi_1-\psi_\infty)$$

ou

$$\frac{1}{4\pi^2}V_0 l.\frac{t_1-b}{t_1-a} = -\frac{V_0}{4\pi^2}l.\frac{\sin\varphi_1-\sin\beta}{\sin\varphi_1-\sin\alpha}.$$

Elle excède la charge normale

$$\frac{V_0}{4\pi h_1}(x_1-\delta),$$

correspondant à la densité normale sur ce plateau, de la quantité

$$\frac{V_0}{4\pi^2}\left[-l.\frac{\sin\varphi_1-\sin\beta}{\sin\varphi_1-\sin\alpha}-l.\frac{\cos\frac{\varphi+\beta}{2}}{\sin\frac{\varphi-\beta}{2}}+\frac{h}{h_1}l.\frac{\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}}{\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}}+\frac{\delta}{h_1}(\pi-2\varphi_1)\right]$$

ou

$$\frac{V_0}{4\pi^2}\left[-l.\frac{1+\cos(\varphi_1+\beta)}{\sin\varphi_1-\sin\alpha}+\frac{h}{h_1}l.\frac{1+\cos(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi_1-\sin\alpha}+\frac{\delta}{h_1}(\pi-2\varphi)\right.$$

Cet excès tend vers une limite finie quand x_1 tend vers l'infini et φ_1 vers β. Cette limite est

$$\frac{V_0}{4\pi^2}\left[-l.\frac{2\cos^2\beta}{b-a}+\frac{h}{h_1}l.\frac{1+\cos(\alpha+\beta)}{b-a}+\frac{\delta}{h_1}(\pi-2\beta)\right],$$

ce qui serait la charge d'une bande

$$(2)\qquad -\frac{h_1}{\pi}l.\frac{2\cos^2\beta}{b-a}+\frac{h}{\pi}l.\frac{1+\cos(\alpha+\beta)}{b-a}+\delta\left(1-\frac{2\beta}{\pi}\right),$$

supposée à la densité normale.

Mais les équations (1) donnent

$$\frac{a}{h^2-h_1^2-4\delta^2}=\frac{b}{h^2-h_1^2+4\delta^2}=\frac{b-a}{8\delta^2}=\frac{\cos\alpha}{4\delta h}=\frac{\cos\beta}{4\delta h_1}=\frac{1}{M}$$

$$M^2=[(h+h_1)^2+4\delta^2][h-h_1)^2+4\delta^2].$$

L'expression (2) est donc

$$(3)\qquad \delta\left(1-\frac{2\beta}{\pi}\right)+\frac{h}{2\pi}l.\frac{(h_1+h_1)^2+4\delta^2}{(h-h_1)^2+4\delta^2}-\frac{h_1}{\pi}l.\frac{4h_1^2}{M}.$$

Lorsque $h=h_1$, on a

$$\operatorname{tang}\beta=-\operatorname{tang}\alpha=\frac{\delta}{4}$$

et la longueur de la bande (3) se réduit à

$$\delta\left(1-\frac{2\beta}{\pi}\right)+\frac{h}{\pi}l.\frac{h^2+\delta^2}{h^2}.$$

9. La pression par unité de surface est

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2=\frac{[(V_1-V_0)t+(bV_0-aV_1)]^2}{8\pi^2K^2(1-t^2)}.$$

La force que sollicite, par unité de longueur, une bande du plateau de droite, comprise entre l'arête $t=1$ et une parallèle correspondant à $t=t_1$, située à la distance x_1 de cette arête, est

$$\frac{1}{8\pi^2K^2}\int_{\delta}^{x_1}\frac{[(V_1-V_0)t+(bV_1-aV_1)]^2}{1-t^2}\,dz$$

$$=\frac{2}{8\pi^2K^2}\int_{t_1}^{1}\frac{[(V_1-V_0)t+(bV_0-aV_1)]^2}{\sqrt{1-t^2}\,(t-a)(t-b)}\,dt.$$

L'excès de cette pression sur la pression normale

$$\frac{V_1^2}{8\pi h_1^2}(x_1-\delta)=\frac{V_1^2}{8\pi^2K}\int_{t_1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}(b-a)^2}{(t-a)(t-b)(1-b^2)}\,dt$$

est

$$\frac{1}{8\pi^2 K}\int \frac{[(V_1-V_0)t+(bV_0-aV_1)]^2(V_1-b^2)-V^2(b-a)^2(1-t^2)}{(1-b^2)(t-a)(t-b)\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

ou

$$\frac{1}{8\pi^2 K(1-b^2)}\int_{t_1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}[(V_0-V_1)^2(1-b^2)+V_1^2(b-a)^2]$$
$$+\frac{dt(b-a)}{(t-a)\sqrt{1-t^2}}[V_1^2(1-a^2)-V_0^2(1-b^2)].$$

Soit

$$\frac{1}{8\pi^2 2\delta}\left[(V_0-V_1)^2+V_1^2\frac{4\delta^2}{h_1^2}\right]\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right)-\frac{4\delta^2}{8\pi^2 h}\left[\left(\frac{V_1}{h}\right)^2-\left(\frac{V_0}{h_1}\right)^2\right]l\,\frac{\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}}{\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}};$$

ce qui correspond à la pression normale sur une bande de largeur

$$\left[\left(1-\frac{V_0}{V_1}\right)^2\frac{h_1^2}{2\delta}+2\delta\right]\left(\frac{1}{2}-\frac{\varphi_1}{\pi}\right)-\frac{4\delta^2 h_1^2}{\pi h}\left[\frac{1}{h^2}-\left(\frac{V_0}{V_1 h_1}\right)^2\right]l\,\frac{\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}}{\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}}.$$

Lorsque x_1 augmente indéfiniment, cette largeur devient

$$(4)\quad \left[\left(1-\frac{V_0}{V_1}\right)^2\frac{h_1^2}{2\delta}+2\delta\right]\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}\right)-\frac{4\delta^2 h_1^2}{\pi h}\left[\frac{1}{h^2}-\left(\frac{V_0}{V_1 h_1}\right)^2\right]l\,\frac{(h+h_1)^2+4\delta^2}{(h-h_1)^2+4\delta^2},$$

ce qui, pour $V_0=V_1$, devient

$$(5)\qquad \delta\left(1-\frac{2\beta}{\pi}\right)-\frac{4\delta^2}{\pi h}\left(\frac{h_1^2-h^2}{h^2}\right)l.\frac{(h+h_1)^2+4\delta^2}{(h-h_1)^2+4\delta^2},$$

pour $h=h_1$, devient

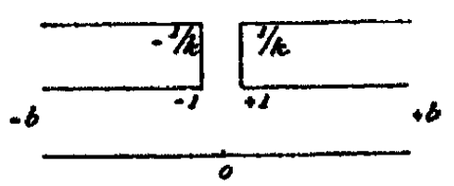
$$(6)\qquad \left[\left(1-\frac{V_0}{V_1}\right)^2\frac{h_1^2}{2\delta}+2\delta\right]\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}\right)-\frac{4\delta^2}{\pi h}\left[1-\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^2\right]l.\frac{h^2+\delta^2}{\delta^2},$$

et enfin, si $h=h_1$ en même temps que $V_0=V_1$, se réduit à

$$(7)\qquad \delta\left(1-\frac{2\beta}{\pi}\right).$$

10. On examinera encore le cas où deux plateaux indéfinis, d'épaisseur e, sé-

Fig. 80.



parés par un sillon de largeur 2δ, se trouvent en face d'une plaque indéfinie. On

prendra

$$(1)\qquad N\,dz = \frac{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}{t^2-b^2}\,dt \quad \text{avec } k<1.$$

En posant $t = \sin\operatorname{am}\varphi$, $b = \sin\operatorname{am}\beta$, cette valeur pourra s'écrire

$$N\,dz = \frac{(1-t^2)(1-k^2t^2)}{t^2-b^2}\,d\varphi = \left[k^2t^2 + k^2b^2 - (k^2+1) + \frac{(1-b^2)(1-k^2b^2)}{t^2-b^2}\right]d\varphi.$$

On en déduit, si l'on exprime les fonctions de deuxième et troisième espèce, au moyen des fonctions Θ et H de Jacobi,

$$Nz = -\varphi\left[\frac{(1-b^2)(1-k^2b^2)-1}{b^2} + \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{\sqrt{(1-b^2)(1-k^2b^2)}}{b} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} + \frac{\Theta'(\varphi)}{\Theta(\varphi)} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-k^2b^2}}{b}\,l.\frac{H(\beta+\varphi)}{H(\beta-\varphi)}\right],$$

ce qui, en observant que

$$\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} = \frac{d^2\log\Theta(\beta)}{d\beta^2} + \frac{1}{b^2}$$

et que

$$\frac{\sqrt{(1-b^2)(1-k^2b^2)}}{b} = \frac{d}{d\beta}\,l.\sin\operatorname{am}\beta = \frac{H'}{H} - \frac{\Theta'}{\Theta},$$

pourra encore s'écrire

$$Nz = -\varphi\,\frac{\Theta(\beta)}{H(\beta)}\,\frac{d}{d\beta}\,\frac{H'(\beta)}{\Theta(\beta)} + \frac{\Theta'(\varphi)}{\Theta(\varphi)} + \frac{1}{2}\,\frac{\Theta(\beta)}{H(\beta)}\,\frac{d}{d\beta}\,\frac{H(\beta)}{\Theta(\beta)} \times l.\frac{H(\beta+\varphi)}{H(\beta-\varphi)}.$$

Or il faut que, pour $t = 1$ ou $\varphi = K$, on ait

$$z = \delta + ih,$$

et pour $t = \frac{1}{K}$ ou $\varphi = K + iK'$, on ait

$$z = \delta + i(h+e);$$

on en déduit

$$(2)\qquad N\delta = -K\,\frac{\Theta(\beta)}{H(\beta)}\,\frac{d}{d\beta}\,\frac{H'(\beta)}{\Theta(\beta)},$$

$$(3)\qquad Nh = \frac{\pi}{2}\,\frac{\Theta(\beta)}{H(\beta)}\,\frac{d}{d\beta}\,\frac{H(\beta)}{\Theta(\beta)},$$

$$(4)\qquad N\left(\delta\,\frac{K'}{K} - h\,\frac{\beta}{K} - e\right) = \frac{\pi}{2K},$$

équations qui déterminent N, β et K.

La valeur de z s'écrit alors

$$z = \delta\,\frac{\varphi}{K} + \frac{1}{N}\,\frac{\Theta'(\varphi)}{\Theta(\varphi)} + \frac{h}{\pi}\,l\,\frac{H(\beta+\varphi)}{H(\beta-\varphi)},$$

et l'abscisse d'un point du plateau de droite sera, sur la face inférieure,

$$x = \delta\,\frac{\varphi}{K} + \frac{1}{N}\,\frac{\Theta'(\varphi)}{\Theta(\varphi)} + \frac{h}{\pi}\,l\,\frac{H(\varphi+\beta)}{H(\varphi-\beta)},$$

φ variant de β à K.

Le potentiel et le flux seront déterminés par l'équation

$$\pi(Vi+\psi)=\iota l.\frac{t+b}{b-t},$$

si la plaque indéfinie est au potentiel zéro et les plateaux au potentiel 1.

La charge du plateau de droite, comprenant la charge totale de la face supérieure, le flanc du sillon, et la face inférieure entre l'arête $t=1$ et une droite $t=t_1$, est

$$\frac{1}{4\pi^2}l.\frac{t_1+b}{t_1-b},$$

tandis que cette portion de la face inférieure, à la densité normale, aurait une charge

$$\frac{x_1-\delta}{4\pi h}.$$

L'excès est la charge normale d'une bande de largeur

$$\delta+\frac{h}{\pi}l.\frac{t_1+b}{t_1-b}-x_1$$

ou

$$\delta\left(1-\frac{\varphi_1}{K}\right)-\frac{1}{N}\frac{\Theta'(\varphi)}{\Theta(\varphi)}+\frac{h}{\pi}l.\frac{(t_1+b)\,H(\varphi-\beta)}{(t_1-b)\,H(\varphi+\beta)},$$

qui, si l'on considère le plateau entier, $t_1=b$, tend vers la limite

$$\delta\left(1-\frac{\beta}{K}\right)-\frac{1}{N}\frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}+\frac{h}{\pi}l.\frac{2bH'(0)}{H(2\beta)\sqrt{1-b^2}\,1-k^2b^2}$$

ou encore

$$(5)\qquad \delta\left(1-\frac{\beta}{K}\right)-\frac{1}{N}\frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}+\frac{2h}{\pi}l.\frac{H(K)\Theta(K)}{\Theta(K+\beta)H(K+\beta)}.$$

La pression par unité de surface est

$$\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2=\frac{N^2}{8\pi^2}\frac{4b^2}{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$$

et son excès sur la pression normale,

$$\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{8\pi h^2}=\frac{1}{8\pi h^2}\left[\frac{(1-b^2)(1-k^2b^2)}{(1-t^2)(1-k^2t^2)}-1\right]$$
$$=\frac{1}{8\pi h^2}\frac{(t^2-b^2)[k^2(t^2-b^2)-(k^2+1)]}{(1-t^2)(1-k^2t^2)}.$$

Pour la face intérieure tout entière, cet excès de pression est donc la pression normale sur une bande de largeur

$$\frac{1}{N}\int_\delta^\infty\frac{(t^2-b^2)[k^2(b^2+t^2)-(k^2+1)]}{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\,dx=\frac{1}{N}\int_\beta^K k^2(b^2+t^2)-(k^2+1)\,d\varphi,$$

soit, en employant les mêmes transformations que ci-dessus,

$$(6)\qquad \frac{K-\beta}{N}\left[\left(\frac{H'}{H}-\frac{\Theta'}{\Theta}\right)^2+\frac{H''}{H}-\frac{H'^2}{H^2}\right]+\frac{1}{N}\frac{\Theta'\beta}{\Theta(\beta)}.$$

La pression totale sur la surface supérieure du même plateau est la pression sur une bande

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{(1-b^2)(1-k^2b^2)}{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\,dx = \frac{1}{N}\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{(1-b^2)(1-k^2b^2)\,dt}{t^2-b^2\sqrt{1-t^2}(1-k^2t^2)}$$

$$= \frac{1}{N}\int_{0}^{k} \frac{(1-b^2)(1-k^2b^2)k^2\sin^2\operatorname{am}\varphi}{1-b^2k^2\sin^2\operatorname{am}\varphi}\,d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$(7)\qquad \frac{1}{N}\left(\frac{H'}{H}-\frac{\Theta'}{\Theta}\right)K\frac{\Theta'}{\Theta}-\frac{(\beta)}{(\beta)}=\delta\left(\frac{H'}{H}-\frac{\Theta'}{\Theta}\right)\frac{H}{\Theta^2\dfrac{d}{d\beta}\dfrac{H'}{\Theta}}.$$

Il est très difficile de déduire des équations (2), (3), (4) les valeurs de N, β, K en fonction de h, δ et e; mais on peut observer que, si e est infini, on a

$$k=0,\qquad K=\frac{\pi}{2},\qquad K'=\infty,\qquad \operatorname{tang}\beta=\frac{\delta}{h}.$$

Pour de petites valeurs de K et de $q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, on peut développer en séries les fonctions Θ, H et leurs dérivées; on a alors

$$H=2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi\varphi}{2K},\qquad \Theta=1-2q\cos\frac{\pi\varphi}{K},\qquad K=\frac{\pi}{2}(1+4q);$$

ces valeurs, portées dans les équations (2), (3), donnent, en négligeant les puissances supérieures de q,

$$N\delta=\frac{\pi^2}{4K}\left(1+8q\cos^2\frac{\pi\beta}{2K}\right),$$

$$Nh=\frac{\pi^2}{4K}\left(1-8q\sin^2\frac{\pi\beta}{2K}\right)\cos\frac{\pi\beta}{2K},$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\frac{\pi\beta}{2K}=\frac{\delta}{h}(1+8q)\qquad\text{ou}\qquad \frac{\pi\beta}{2K}=\beta_0+4q\sin 2\beta_0,$$

$$N=\frac{\pi}{2\delta}\left(1+4q\cos\frac{\pi\beta}{K}\right);$$

la troisième équation donne alors, comme première approximation,

$$-l.q=\frac{\pi K'}{K}=2\left(1+\frac{h}{\delta}\,\frac{\pi\beta}{2K}+\frac{e}{\delta}\,\frac{\pi}{2}\right),$$

par suite, $-l.q$ est plus grand que

$$4+\frac{\pi e}{\delta},$$

et, dès que la profondeur du sillon est notablement supérieure à sa largeur, on peut traiter p comme une quantité très petite, ce qui justifie les approximations ci-dessus.

Portant alors ces valeurs de β et de N dans les valeurs (5) et (6), celles-ci

deviendront, en posant $\operatorname{tang}\beta_0 = \frac{\delta}{h}$,

(5 *bis*) $$\delta\left(1 - \frac{2\beta_0}{\pi} - \frac{8q\sin 2\beta_0}{\pi}\right) - \frac{h}{\pi}\,l.\cos^2\beta_0\,[1 - 8q(\sin^2\beta_0)].$$

(6 *bis*) $$2\delta\left(\frac{K-\beta}{\pi}\right)(1-4q) + \frac{2\delta}{\pi}\,4q\sin 2\beta_0,$$

(7 *bis*) $$\frac{\delta}{\pi}\,8q\sin^2\beta_0;$$

la différence entre les deux premières et les valeurs trouvées pour $e = \infty$, dans le paragraphe précédent, sont de l'ordre de q; et la suppression des termes en q n'introduit, dans la largeur de ces bandes, qu'une erreur ordinairement négligeable.

11. Soit donc un disque de rayon R, placé à une distance h_1 d'un plateau au potentiel V_0 et entouré d'une plaque de garde placée à la distance h de ce même plateau; en désignant par 2δ la distance du disque à la plaque de garde, par V_0 le potentiel de cette dernière, par V_1 celui du disque; si l'on peut admettre que la largeur D de la plaque est assez grande pour négliger $e^{-\frac{\pi D}{R}}$, si l'on peut aussi négliger $e^{-\frac{\pi R}{h}}$ et que l'on suppose enfin R assez grand pour admettre que dans la région voisine du bord du disque, où la distribution n'est pas uniforme, la distribution est la même que si ce bord était rectiligne, on pourra, dans une première approximation, supposer que l'effet de la charge des bords est celui d'une bande de largeur Δ ajoutée au disque suspendu, et chargée à la densité uniforme $\frac{V_1 - V}{4\pi h_1}$ que ce disque porte en son centre; de sorte que la charge totale du disque est

$$\frac{V_1 - V}{4\pi h_1}\,\pi(R+\Delta)^2$$

et l'attraction exercée sur lui par le plateau

$$\frac{(V_1 - V)^2}{8\pi h_1^2}\,\pi(R+\Delta)^2,$$

la valeur de Δ étant pour la charge, et dans le cas où $V_1 = V_0$ la valeur (3) de l'article 8, et, pour l'attraction dans le cas général, la valeur (4) de l'article 9 ou les valeurs (5), (6) et (7) dans les cas particuliers. On remarquera que dans ces valeurs n'entre pas le logarithme de $(h - h_1)$ comme dans la formule de Maxwell, mais bien celui de $(h - h_1)^2 + 4\delta^2$, ce qui réduit beaucoup l'influence de la dénivellation $h - h_1$, dénivellation qu'on s'attache d'ailleurs à rendre insensible.

Lorsqu'on emploie la disposition de l'anneau de garde pour construire un condensateur étalon, on a

$$V_1 = V_0,$$

le disque et l'anneau étant de même matière. Il n'en est pas ainsi dans l'électromètre absolu, où le disque est en aluminium; on peut admettre qu'il y a entre

V_1 et V_0 une différence constante; mais, dans l'emploi de l'instrument, l'effet de cette différence est éliminé presque complètement; en effet, cette différence est une faible fraction de la différence du potentiel du disque et du plateau et l'on pourra négliger les puissances de $\frac{V_1 - V_0}{V_0 - V}$ supérieures à la première, ce qui réduit la formule (4) à

$$\Delta = \delta\left(1 - \frac{2\beta}{\pi}\right) - \frac{4}{\pi}\frac{\delta^2}{h}\left[\frac{h_1^2}{h^2} - \frac{(V_0 - V)^2}{(V_1 - V)^2}\right] l\,\frac{(h + h_1)^2 + 4\delta^2}{(h - h_1)^2 + 4\delta^2}.$$

Or, pour mesurer la différence entre les potentiels V et V' de deux sources, on les met successivement en rapport avec le plateau et l'on mesure les distances h_1, h'_1 pour lesquelles l'attraction fait équilibre à une force connue F, de sorte qu'on a

$$\sqrt{8F} = \frac{V_1 - V}{h_1}(R + \Delta) = \frac{V_1 - V'}{h'_1}(R + \Delta') = \frac{V' - V}{\frac{h_1}{R + \Delta} - \frac{h'}{R + \Delta'}}.$$

L'erreur faite en prenant dans les deux expériences la même valeur de Δ, correspondant à une valeur de h_1 moyenne, devient complètement insensible lorsque, comme dans la pratique, $(h - h_1)$ n'est qu'une très petite fraction de δ, et δ lui-même une fraction de h; supposons $h = h_1$, on a

$$\Delta = \delta\left(1 - \frac{2\beta}{\pi}\right) + \frac{4\delta^2}{h}\,2\,\frac{V_0 - V_1}{V_1 - V}\,l.\,\frac{h^2 + \delta^2}{\delta^2},$$

et, posant

$$R + \delta - \frac{2\beta\delta}{\pi} = R',$$

$$\sqrt{8F} = (V_1 - V)\frac{R'}{h} + \frac{8\delta^2}{h^2}(V_0 - V_1)\,l.\frac{h^2 + \delta^2}{\delta^2}$$

$$= (V_1 - V'))\frac{R'}{h'} + \frac{8\delta^2}{h'^2}(V_0 - V_1)l.\frac{h'^2 + \delta^2}{\delta^2}$$

ou

$$(h - h')\sqrt{8F} = (V' - V)\,R' + 8\delta^2(V_0 - V_1)\left(\frac{1}{h}\,l.\frac{h^2 + \delta^2}{\delta^2} - \frac{1}{h'}\,l.\frac{h'^2 + \delta^2}{\delta^2}\right).$$

L'erreur faite sur V' — V, en employant la formule

$$(h - h')\sqrt{8F} = (V' - V)\,R',$$

est donc

$$(V_0 - V_1)\frac{8\delta^2}{R}\left(\frac{1}{h}\,l.\frac{h^2 + \delta^2}{\delta^2} - \frac{1}{h'}\,l.\frac{h'^2 + \delta^2}{\delta^2}\right).$$

Soit une fraction très petite de $(V_0 - V_1)$, puisque $\frac{\delta}{R}$, $\frac{\delta}{h}$ et les logarithmes sont tous de très petites fractions. Ainsi il suffira de prendre

$$\Delta = \delta\left(1 - \frac{2\beta}{\pi}\right), \qquad \left(\operatorname{tang}\beta = \frac{\delta}{h}\right).$$

Il n'y a pas à tenir compte de $h_1 - h$; cette quantité ne peut être mesurée, puisqu'on amène autant que possible le disque dans le plan de l'anneau.

12. Pour se rendre compte de l'influence de la courbure du disque, on admettra d'abord que, malgré cette courbure, la distribution de l'électricité reste la même à la même distance du bord; et que, par suite, la pression P est

$$P_0 \frac{1-b^2}{1-l^2} = P_0 \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\varphi},$$

si P_0 est la pression normale; si x est la distance d'un point au bord, l'intégrale

$$\int_0^R 2\pi(R-x) P_0 \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\varphi}\, dx$$

sera la pression totale; soit ε la valeur de φ pour laquelle $x = R$; si l'on remplace dx par sa valeur

$$dx = \frac{2\delta}{\pi} \frac{\sqrt{1-l^2}}{l^2-b^2}\, dl = \frac{2\delta}{\pi} \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi - \sin^2\beta}\, d\varphi,$$

l'intégrale devient

$$\int_0^R 2\pi(R-x) P_0 dx - \int_0^R 2\pi(R-x) \frac{\cos^2\varphi - \cos^2\beta}{\cos^2\varphi} P_0\, dx$$

ou

$$\pi R^2 P_0 + P_0 \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(R-x) \frac{2\delta}{\pi}\, d\varphi$$

et l'on a à évaluer

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} R\, d\varphi = R\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

et

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} x\, d\varphi = \frac{2\delta}{\pi} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) d + \frac{h}{\pi} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} l. \frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin(\varphi-\beta)}\, d\varphi.$$

Cette dernière peut s'écrire

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} l.\sin(\varphi+\beta)\, d\varphi - \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} l.\sin(\varphi-\beta)\, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} l.\sin\varphi\, d\varphi - \int_{\varepsilon-\beta}^{\varepsilon+\beta} l.\sin\varphi\, d\varphi.$$

L'angle β étant petit, on a, en posant $\varphi' + \varphi = \frac{\pi}{2}$, lorsque φ est dans le voisinage de $\frac{\pi}{2}$,

$$l.\sin\varphi = l.\cos\varphi' = \frac{-\varphi'^2}{2}$$

et

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} l.\sin\varphi\, d\varphi = -\int_{-\beta}^{+\beta} \frac{\varphi'^2}{2}\, d\varphi' = -\frac{1}{3}\beta^3,$$

tandis que, lorsque φ varie de $\varepsilon-\beta$ à $\varepsilon+\beta$, on doit écrire

$$l.\sin\varphi = l.(\varphi)+l.\left(1-\frac{\varphi^2}{6}\right) = l.\varphi - \frac{\varphi^2}{6},$$

et

$$\int l.\sin\varphi\, d\varphi = \varphi(l.\varphi - 1) - \frac{\varphi^3}{6.3};$$

d'où

$$\int_{\varepsilon-\beta}^{\varepsilon+\beta} l.\sin\varphi\, d\varphi = (\varepsilon+\beta)\, l.(\varepsilon+\beta) - (\varepsilon-\beta)\, l.(\varepsilon-\beta) - 2\beta - \frac{(\varepsilon+\beta)^3-(\varepsilon-\beta)^3}{18}.$$

D'un autre côté, R est lié à ε par la relation

$$R = \frac{2\delta}{\pi}\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{h}{\pi}\, l.\frac{\sin(\beta+\varepsilon)}{\sin(\varepsilon-\beta)}$$

et, comme R est grand par rapport à h, et celui-ci grand par rapport à δ, on a très approximativement

$$\frac{\sin(\beta+\varepsilon)}{\sin(\varepsilon-\beta)} = e^{\frac{\pi R}{h}},$$

de sorte que l'angle $\varepsilon-\beta$ n'est qu'une fraction négligeable de $\beta+\varepsilon$, et l'on ne commettra pas d'erreur sensible en prenant $\varepsilon=\beta$; la dernière intégrale devient alors

$$2\beta(l.2\beta-1) - \frac{4\beta^3}{9}$$

et la pression totale devient

$$P_0\left\{\pi R^2 + 4\delta R\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) + \frac{8\delta^2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{2}\beta+\frac{\beta^2}{2}\right) + \frac{4\delta h}{\pi}\left[\frac{\beta^2}{3}-\frac{4\beta^3}{9}+2\beta\, l.(2\beta-1)\right]\right\},$$

en se bornant aux termes de l'ordre de δ^2 et observant que $\beta h = \delta$, cette expression se réduit à

$$P_0\left[\pi R^2 + 4\delta R\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) + \frac{4\delta^2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4} + l.(2\beta-1)\right]\right.$$
$$\left. = P_0\pi R^2\left\{1 + \frac{2\delta}{R}\left(1-\frac{2\beta}{\pi}\right) + \frac{4\delta^2}{\pi^2 R^2}\left[\frac{\pi^2}{4} + l(2\beta-1)\right]\right\},\right.$$

qui ne différera pas sensiblement de $P_0\pi(R+\delta)^2$.

Toutefois cette correction est fort incomplète, car la courbure des bords a une influence sur la distribution et introduit par là des termes de même ordre que ceux qui viennent d'être évalués.

13. Lorsque le contour des conducteurs satisfait aux conditions du n° 3, on peut aussi calculer la distribution de l'électricité induite à leur surface, par une quantité fixe d'électricité distribuée dans l'espace qui les sépare, avec une densité ρ, fonction de x et y seulement; en effet, cette distribution sera connue, si l'on connaît une fonction V satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 4\pi\rho = 0$$

et s'annulant sur tout le contour; mais x et y sont des fonctions des variables r et s; ρ peut donc être exprimé en fonction de r et s, et la fonction V devra satisfaire à l'équation

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)+4\pi\rho=0$$

et s'annuler pour $s=0$; on sait d'ailleurs que

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\times\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2=1,$$

de sorte que cette équation est

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+4\pi\rho\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2=0,$$

dont l'intégrale est

$$V=\int\int dr'\,ds'\,\rho\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 l.\frac{(r-r')^2+(s+s')^2}{(r-r')^2+(s-s')^2},$$

expression où il faut donner à ρ et à $\frac{\partial x}{\partial r}$ les valeurs correspondantes au point r', s'.

La densité induite, en un point des conducteurs, correspondant à $s=0$, $r=r_1$, est

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial n}=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial s}\frac{dt}{dz},$$

lorsque l'on tient compte des relations

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{dt}{dz},$$

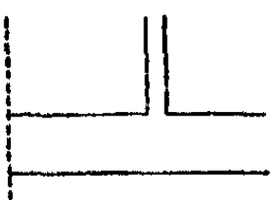
qui existent entre les fonctions conjuguées, soit

$$\frac{1}{4\pi}\int\int dr'\,ds'\,\rho\left(\frac{dt}{dz}\right)^2\frac{4s'}{(r-r')^2+s'^2}.$$

Les intégrales doivent être étendues de $s=0$ à $s=+\infty$ et de $r'=-\infty$ à $r'=+\infty$.

On peut déduire de cette remarque un procédé de calcul pour la distribution de l'électricité à la surface de conducteurs de révolution; par exemple, si AB est

Fig. 81.



l'axe de révolution, et qu'on ait, comme dans l'électromètre Thomson, en face d'un plateau indéfini, deux conducteurs séparés par un profond sillon circulaire. En désignant par x la distance à l'axe, le potentiel doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial V}{\partial x}=0,$$

être nul sur la plaque indéfinie et être égal à 1 sur les conducteurs supérieurs; et il est évident que, si le rayon du cylindre est plusieurs fois la distance h, la densité est très voisine de ce qu'elle serait sur un système de conducteurs indéfinis dans la direction perpendiculaire au plan de la figure, et que le potentiel V est peu différent d'une fonction V_0, satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} = 0$$

et égal à zéro ou à l'unité sur les conducteurs; on obtiendra donc une solution plus approchée de l'équation proposée en prenant

$$V_1 = V_0 + V_1,$$

si V_1, nul sur tous les conducteurs, satisfait à

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial V_0}{\partial x} = 0,$$

et une solution encore plus approchée, si l'on prend

$$V = V_0 + V_1 + V_2$$

avec

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial V_2}{\partial y^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial V_1}{\partial x} = 0.$$

Or ces équations sont celles dont la solution a été trouvée plus haut, si l'on pose successivement

$$4\pi\rho = \frac{\partial V_0}{\partial x}, \qquad 4\pi\rho = \frac{\partial V_1}{\partial x}, \qquad \ldots.$$

De même que $\frac{\partial V_0}{\partial x}$, les termes $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_2}{\partial x}$ n'auront de valeur appréciable que si x est voisin de R, et les corrections successives, ainsi apportées à la valeur de V, seront rapidement décroissantes.

La plus importante résultera de la première équation, qui exprime que V_1 est le potentiel dû à une distribution de densité $\frac{1}{4\pi x}\frac{\partial V_0}{\partial x}$ dans l'espace qui sépare les conducteurs, et que, par suite, les corrections de densité sont les densités induites à la surface de conducteurs indéfinis par cette distribution.

14. Dans le cas de l'électromètre, les surfaces d'égal potentiel, sensiblement parallèles au plateau dans le voisinage de l'axe et pour de grandes valeurs de x, s'élèvent en face du sillon et y pénètrent même pour des valeurs voisines de l'unité, l'ordonnée de ces surfaces ayant un maximum pour $x = R + \delta$; la densité $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_0}{\partial x}$ est négative à gauche de cette ordonnée, positive à droite et, par suite, la charge induite, positive sur le plateau suspendu, négative sur la plaque de garde et sensiblement nulle sur la plaque indéfinie; de plus, comme $\frac{\partial V}{\partial x}$ n'atteint une valeur notable que pour les points situés tout près des deux arêtes et des conducteurs par conséquent, on ne fera pas d'erreur sensible en admettant que la charge induite sur chacun des points des conducteurs est égale à la charge induc-

trice dans son voisinage immédiat, et en attribuant à chaque élément ds du contour une charge supplémentaire égale à la quantité d'électricité

$$\frac{1}{4\pi x}\int\frac{\partial V}{\partial x}\,d\sigma,$$

où $d\sigma$ est un élément de surface compris entre les deux lignes de force qui limitent cet élément ds; et la correction ainsi calculée sera approchée par excès; si l'on calcule l'élément $d\sigma = dx\,dy$ non en fonction de x et de y, mais en fonction des V et ψ, on aura

$$d\sigma = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial V}\right)^2\right] dV\,d\psi,$$

et, comme

$$\frac{\partial V}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial V}\right)^2\right] = -\frac{\partial x}{\partial V},$$

cette charge sera

$$\frac{1}{4\pi x_2}\int_{V=0}^{V=1}\frac{\partial x}{\partial V}\,d\psi\,dV = \frac{x_2 - x_1}{4\pi x_2}\,d\psi,$$

en désignant par x_2 et x_1 les abscisses des points où la ligne de force rencontre la plaque indéfinie ($x = x_1$) et le plateau suspendu ($x = x_2$); la correction est donc une fraction $\frac{x_2 - x_1}{x_2}$ de la charge $\frac{1}{4\pi}\,d\psi$, calculée au moyen de la valeur de V_0.

Pour les points situés sur le flanc du sillon, cette différence est très sensiblement δ, la demi-largeur du sillon; en effet, l'axe du sillon ou l'ordonnée $x = R + \delta$ est une ligne de force; la ligne de force partant de l'arête $t = +1$ rencontre le plateau indéfini, au point pour lequel $t = b'$, de telle sorte que ψ est la même valeur pour ces deux valeurs de t; or b' est ordinairement négligeable, et la valeur de la distance de ce point à l'ordonnée $x = R + \delta$, que donne la formule

$$2\delta\varphi_1 + hl.\frac{\sin(\varphi_1 + \beta)}{\sin(\varphi_1 - \beta)},$$

où il faudra faire $\sin\varphi_1 = b'$, est aussi négligeable; pour le flanc du sillon, on a donc

$$x_2 = R, \qquad x_1 = R + \delta$$

et, par suite, la charge du flanc du sillon devra être multipliée par $1 + \frac{\delta}{R}$ et sera

$$\frac{1}{2}(R + \delta)\,l.\frac{1 + b}{1 - b} = \frac{1}{2}(R + \delta)\,l.\frac{h + \delta}{h - \delta}.$$

La densité est modifiée aussi sur la partie horizontale du plateau suspendu dans le voisinage des bords; si σ_0 est la densité calculée au moyen de la valeur V_0, cette densité devient

$$\sigma_0\left(1 + \frac{x_1 - x_2}{x_2}\right)$$

et la charge

$$2\pi\int_0^R x\,dx\,\sigma_0\left(1 + \frac{x_1 - x}{x}\right) = 2\pi\int_0^R x\,dx\,\sigma_0 + 2\pi\int_0^R \sigma_0(x_1 - x)\,dx.$$

La correction sera pratiquement indépendante de la valeur de R, parce que $x_1 - x$ devient négligeable dès que x s'éloigne de R; par suite, le rapport de la correction à la charge serait de l'ordre $\left(\frac{\delta}{R}\right)^2$ et généralement négligeable; la marche du calcul est la même que celle du calcul de la pression, qui sera indiqué ci-dessous.

15. La correction due à la courbure du bord peut être ainsi estimée : la densité réelle s'obtient en ajoutant à la densité calculée $\frac{x_2 - x_1}{R - x_2}\frac{d\psi}{4\pi\, dx_2}$; x_2 est la distance d'un point du plateau au bord, et $x_2 - x_1$ la différence des abscisses des extrémités d'une ligne de force : la pression est donc à la pression calculée dans le rapport de

$$1 + 2\,\frac{x_2 - x_1}{R - x_2}$$

à l'unité, et sa valeur est

$$P = P_0\,\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\varphi}\left(1 + 2\,\frac{x_2 - x_1}{R - x_2}\right).$$

L'intégrale

$$2\pi\int (R - x_2)\,P\,dx = 2\pi\int P_0\,\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\varphi}\,(R - x_2)\,dx_2 + 4\pi P_0\int (x_2 - x_1)\,\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\varphi_2}\,dx_2$$

représentera la pression; la dernière intégrale est la correction à apporter aux résultats calculés précédemment (art. 12).

Si φ_1, φ_2 sont des valeurs de φ correspondant aux extrémités d'une ligne de force, on doit avoir la même valeur de ψ et, par suite,

$$\frac{\sin\varphi_1 + \sin\beta}{\sin\varphi_1 - \sin\beta} = \frac{\sin\beta + \sin\varphi_2}{\sin\beta - \sin\varphi_2} \qquad \text{ou} \qquad \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \sin^2\beta,$$

et, comme on a

$$\pi\left(x_1 + \frac{\delta}{\pi}\right) = 2\,\delta\varphi_1 + h\,l.\,\frac{\sin(\varphi_1 + \beta)}{\sin(\beta - \varphi_1)},$$

$$\pi\left(x_2 + \frac{\delta}{\pi}\right) = 2\,\delta\varphi_2 + h\,l.\,\frac{\sin(\varphi_2 + \beta)}{\sin(\varphi_2 - \beta)},$$

il vient

$$\pi(x_2 - x_1) = 2\,\delta(\varphi_2 - \varphi_1) + 2h\,l.\,\frac{\cos\frac{\varphi_2 + \beta}{2}\cos\frac{\beta + \varphi_1}{2}}{\cos\frac{\beta - \varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2 - \beta}{2}}$$

et l'on doit évaluer

$$\frac{2\,\delta}{\pi^2}\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}\left[2\,\delta(\varphi_2 - \varphi_1) + 2h\,l.\,\frac{\cos\frac{\varphi_2 + \beta}{2}\cos\frac{\varphi_1 + \beta}{2}}{\cos\frac{\beta - \varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_1 - \beta}{2}}\right]\frac{\cos^2\beta\,d\varphi_2}{\sin^2\varphi_2 - \sin^2\beta}.$$

Le facteur de h peut, sans erreur appréciable, s'écrire

$$2\,\text{tang}\,\frac{\beta}{2}\left(\text{tang}\,\frac{\varphi_2}{2} - \text{tang}\,\frac{\varphi_1}{2}\right)\frac{\cos^2\beta\,d\varphi_2}{(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)\sin\varphi_2}$$

ou encore

$$2\tan\frac{\beta}{2}\frac{\cos^2\beta\,d\varphi_2}{\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2}\sin\varphi_2\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}$$

et, si l'on observe que φ_1 est toujours plus petit que β, on ne commettra qu'une petite erreur relative sur ce terme en l'écrivant

$$2\tan\frac{\beta}{2}\cos^2\beta\,\frac{d\varphi_2}{2\cos^2\frac{\varphi_2}{2}\sin\varphi_2};$$

la deuxième partie de l'intégrale est donc

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} 2h.2\tan\frac{\beta}{2}\cos^2\beta\,\frac{d\varphi_2}{2\cos^2\frac{\varphi_2}{2}\sin\varphi_2} = 2h.2\tan\frac{\beta}{2}\cos^2\beta\left(\frac{1}{2}l.\tan\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right)_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$$

ou

$$2h\,2\tan\frac{\beta}{2}\cos^2\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}l.\tan\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{4\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}\right),$$

ce qui, vu la faiblesse de la différence entre ε et β et la petitesse de β même, sera

$$2h\tan\beta\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}l.\frac{1}{2b}\right)=\frac{2\delta}{4}\left(1+2l.\frac{1}{2b}\right).$$

Pour la première partie de l'intégrale, si on l'écrit

$$2\delta\cos^2\beta\int\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\sin\varphi_2-\sin\varphi_1}\right)\frac{d\varphi_2}{\sin\varphi_2},$$

on pourra encore observer que

$$\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\sin\varphi_2-\sin\varphi_1}$$

ne diffère pas sensiblement de

$$\frac{\varphi_2}{\sin\varphi_2}$$

et l'on pourra se borner à évaluer

$$\int\frac{\varphi_2\,d\varphi_2}{\sin^2\varphi_2}=\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_2}{\sin^2\varphi_2}\,d\varphi_2+(l.\sin\varphi)_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}.$$

L'intégrale diffère de l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi-\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,d\varphi=1,02$$

d'une quantité de l'ordre de ε^2; on a vu que $l.\frac{\varepsilon}{\beta}$ était aussi négligeable. Donc

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}2\delta(\varphi_2-\varphi_1)\,\frac{d\varphi\cos^2\beta}{\sin^2\varphi_2-\sin^2\beta}=2\delta\cos^2\beta\left(1,02+l.\frac{1}{b}\right),$$

et la correction totale, en remplaçant $\cos^2\beta$ par l'unité, sera

$$\frac{2\delta}{\pi}\frac{2\delta}{\pi}\left(1{,}02+l.\frac{1}{b}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}l.\frac{1}{2b}\right)=\frac{4\delta^2}{\pi}\left(\frac{3}{2}l.\frac{1}{b}+1{,}10\right)$$

et le rapport de cette correction à la pression sur le plateau

$$\frac{4\delta^2}{R^2\pi^2}\left(\frac{3}{2}l.\frac{1}{b}+1{,}10\right).$$

La valeur complète de la pression est donc

$$\pi R^2 P_0\left[\left(1+\frac{\delta}{R}\right)^2-\frac{4b\delta}{\pi R}+\left(\frac{2\delta}{\pi R}\right)^2\left(0{,}79+\frac{1}{2}l.\frac{1}{b}\right)\right].$$

APPENDICE.

NOTE

SUR LA

THÉORIE DES QUATERNIONS.

NOTE

SUR LA

THÉORIE DES QUATERNIONS;

PAR M. SARRAU.

Dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, Maxwell emploie assez fréquemment quelques notations et formes de calcul appartenant à la théorie des quaternions. Bien que l'usage qui est ainsi fait de cette théorie soit, au fond, très secondaire, et bien que le lecteur puisse, sans grands efforts, ramener les démonstrations à la forme ordinaire de l'enseignement français, il a paru utile, pour l'intelligence complète de l'Ouvrage, de présenter dans une Note le résumé très succinct d'une théorie qui occupe aujourd'hui, en Angleterre, une place importante dans l'enseignement.

I. — Notions générales sur les quantités complexes.

1. *Quantités imaginaires.* — La considération des symboles désignés sous le nom de *quaternions* peut être considérée comme une extension de la théorie des quantités imaginaires.

La théorie de ces quantités, qui a si profondément transformé l'Analyse, a son point de départ dans l'Algèbre, où la résolution des équations du second degré introduit des expressions de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Sans attacher aucune idée de quantité au symbole $\sqrt{-1}$, que l'on peut représenter par la lettre i, il suffit, pour

établir toute la théorie, d'appliquer aux quantités $a + bi$ les opérations ordinaires de l'Algèbre, en traitant i comme un facteur ordinaire, et en convenant seulement de remplacer, après tous les calculs effectués, les puissances i, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, ... par i, -1, $-i$, $+1$, i, -1, ..., ce qui revient simplement à remplacer i^2 par -1 dans le produit de deux expressions de la forme $a + bi$.

De plus, on pose *a priori* que les deux termes d'une quantité imaginaire sont irréductibles entre eux, en sorte que, toutes les fois qu'un calcul conduit à une équation de la forme $a + bi = 0$, cette équation se décompose en ces deux équations $a = 0$, $b = 0$.

La généralisation de ces principes conduit, comme il suit, à la théorie des *quantités complexes*.

2. *Définition des quantités complexes.* — On appelle *quantité complexe* une expression linéaire par rapport à *n unités imaginaires*, $i_1, i_2, \ldots, i_n$, de la forme

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n,$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignant des quantités réelles.

On pose *a priori* que tous les termes d'une quantité complexe sont irréductibles entre eux, de sorte qu'une relation linéaire ne peut exister entre les unités imaginaires sans que tous les coefficients en soient nuls séparément, c'est-à-dire que, si, par une suite de calculs, on est amené à une relation

$$\alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n = 0,$$

on a nécessairement

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n = 0.$$

On convient, d'ailleurs, d'appliquer aux quantités complexes les opérations ordinaires de l'Algèbre, en traitant les unités i comme des facteurs ordinaires, et, comme pour les quantités imaginaires, c'est dans la multiplication que s'introduisent les conventions qui définissent les différents systèmes de quantités complexes.

3. *Addition des quantités complexes.* — La somme de deux quantités complexes est le résultat que l'on obtient en ajoutant

leurs parties similaires. Par exemple, ayant

$$A = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n,$$
$$B = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n,$$

on appellera, par définition, A + B la quantité complexe

$$a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + \ldots + (a_n + b_n) i_n.$$

4. *Multiplication des quantités complexes.* — Étant données les deux quantités complexes

$$A = a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_r i_r + \ldots\ldots\ldots + a_n i_n,$$
$$B = b_0 + b_1 i_1 + \ldots\ldots\ldots + b_s i_s + \ldots + b_n i_n,$$

on peut multiplier la première par la seconde, suivant la règle ordinaire de la multiplication algébrique, ce qui donne

$$AB = \Sigma a_r b_s i_r i_s,$$

le Σ du second membre s'étendant à tous les termes obtenus, en attribuant à r et s toutes les valeurs entières de 0 à n, et en remplaçant i_0 par 1.

Dans cette opération, on ne considère pas, en général, comme égaux les deux produits $i_r i_s$ et $i_s i_r$ obtenus par la permutation des indices dans le produit de deux unités, d'où il résulte qu'on ne peut réduire ensemble les termes $a_r b_s i_r i_s$ et $a_s b_r i_s i_r$, de sorte qu'*un produit de deux facteurs change avec l'ordre des facteurs.*

5. *Clefs algébriques.* — Chaque système de quantités complexes est caractérisé par la valeur que l'on attribue conventionnellement aux produits $i_r i_s$.

Par exemple, dans un système particulier d'unités imaginaires, considéré d'abord par Grassmann, puis par Cauchy sous le nom de *clefs algébriques,* on ne suppose pas de parties réelles dans A et B, de sorte que

$$a_0 = 0, \qquad b_0 = 0$$

et, dans la multiplication, le produit de deux unités change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs,

$$i_r i_s = - i_s i_r,$$

d'où il résulte que le produit d'une unité par elle-même est égal

à zéro;

$$i_r^2 = 0.$$

Dans ce système, l'annulation d'un produit n'entraîne pas celle de l'un des facteurs.

L'emploi des clefs algébriques permet de présenter, sous une forme simple, la théorie des déterminants.

6. *Règles particulières de multiplication.* — On suppose, en général, notamment dans la théorie des quaternions, que le produit de deux quantités complexes est une quantité complexe de même espèce, ce qui exige que les carrés et les produits des unités imaginaires soient exprimés par des fonctions linéaires de ces mêmes unités.

On conserve, en outre, une propriété importante de la multiplication algébrique ordinaire, en faisant des conventions telles que, pour multiplier une quantité complexe par un produit de quantités complexes, il suffise de la multiplier par chacun des facteurs de ce produit.

Pour trouver la condition qui assure ce résultat, considérons trois quantités complexes

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_r i_r + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n i_n, \\ B &= b_0 + b_1 i_1 + \ldots\ldots\ldots + b_s i_s + \ldots\ldots\ldots + b_n i_n, \\ C &= c_0 + c_1 i_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_t i_t + \ldots + c_n i_n. \end{aligned}$$

Multipliant B par C, formons le produit

$$BC = \Sigma b_s c_t i_s i_t.$$

Multipliant ensuite A par BC, on a

$$A(BC) = \Sigma a_r b_s c_t i_r (i_s i_t).$$

Au lieu d'opérer ainsi, commençons par multiplier A par B,

$$AB = \Sigma a_r b_s i_r i_s;$$

puis AB par C,

$$(AB)C = \Sigma a_r b_s c_t (i_r i_s) i_t.$$

On aura, évidemment,

$$A(BC) = (AB)C,$$

si l'on suppose que les unités satisfassent à la condition

$$i_r(i_s i_t) = (i_r i_s) i_t.$$

Les unités des quantités complexes dites *quaternions* satisfont à cette condition.

II. — Principes du Calcul des quaternions.

7. *Définitions.* — Hamilton a donné le nom de *quaternion* à une quantité complexe à quatre termes

$$A = s + xi + yj + zk,$$

qui se décompose en une partie réelle s et une partie symbolique $xi + yj + zk$, où i, j, k sont trois unités imaginaires dont les carrés et les produits deux à deux sont assujettis aux conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ jk = -kj = i, \\ ki = -ik = j, \\ ij = -ji = k. \end{cases}$$

Hamilton désigne les deux parties, réelle et symbolique, d'un quaternion respectivement par les noms de *scalaire* et de *vecteur*, et il les représente par les caractéristiques S et V placées devant la lettre qui désigne le quaternion, de sorte que l'on a

$$A = SA + VA.$$

8. Le *tenseur* d'un quaternion est la racine carrée de la somme des carrés des quatre quantités réelles qui figurent dans ce quaternion; on le représente par la caractéristique T,

$$(2) \qquad TA = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dans ce qui va suivre, nous substituerons au mot *tenseur* le mot *module*, qui est déjà usité pour représenter la quantité analogue dans la théorie des imaginaires.

9. Le *verseur* d'un quaternion est le *quaternion-unité* que l'on obtient en divisant ce quaternion par son module; on le représente

par la caractéristique U,

$$\text{UA} = \frac{s + xi + yj + zk}{\sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{3}$$

10. Deux quaternions sont dits *conjugués* quand ils ont le même scalaire et des vecteurs égaux et de signe contraire. Le conjugué d'un quaternion est représenté par la caractéristique K,

$$\text{KA} = s - xi - yj - zk. \tag{4}$$

11. *Multiplication des quaternions.* — Soient deux quaternions

$$\text{A} = s + xi + yj + zk,$$
$$\text{A}' = s' + x'i + y'j + z'k.$$

Multipliant le premier par le second, suivant la règle ordinaire de l'Algèbre, observant l'ordre des facteurs dans les produits partiels et tenant compte des conditions (1), on trouve un produit qui est lui-même un quaternion

$$\left\{\begin{aligned} \text{AA}' = {} & ss' - xx' - yy' - zz' \\ & + [(sx' + s'x) + (yz' - zy')]i \\ & + [(sy' - s'y) + (zx' - xz')]j \\ & + [(sz' + s'z) + (xy' - yx')]k. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

On obtient le produit de A' par A en permutant s, x, y, z avec s', x', y', z',

$$\left\{\begin{aligned} \text{A}'\text{A} = {} & ss' - xx' - yy' - zz' \\ & + [(sx' + s'x) - (yz' - zy')]i \\ & + [(sy' + s'y) - (xz' - xz')]j \\ & + [(sz' + s'z) - (xy' - yx')]k. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ces deux produits ne sont pas, en général, identiques; donc, dans le Calcul des quaternions, *la valeur d'un produit change avec l'ordre de ses facteurs.*

D'ailleurs, les unités i, j, k satisfont, par suite des relations (1), à la condition particulière du n° 6; donc, *pour multiplier un quaternion par un produit de quaternions, il suffit de le multiplier par les facteurs de ce produit.*

12. *Produit de deux quaternions conjugués.* — En faisant

$$s' = s, \qquad x' = -x, \qquad y' = -y, \qquad z' = -z,$$

on a

$$A' = KA,$$

et la formule (5) donne

$$A.KA = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = (TA)^2;$$

donc *le produit de deux quaternions conjugués est égal au carré de leur module.*

D'ailleurs, le produit KA.A a la même valeur, de sorte que, dans ce cas, on peut intervertir les facteurs sans changer le produit.

13. Théorème. — *Le quaternion conjugué du produit de deux quaternions est égal au produit des conjugués de ces facteurs multipliés en ordre inverse,* c'est-à-dire que l'on a

$$K(AA') = KA'.KA.$$

En effet, on a K(AA') en changeant les signes des coefficients de i, j, k dans l'expression (5) du n° 11; d'autre part, on a KA'.KA en changeant les signes de x, y, z; x', y', z', dans l'expression (6); on voit immédiatement que ces deux opérations donnent le même résultat.

Ce théorème s'étend sans difficulté à un nombre quelconque de facteurs.

14. Théorème. — *Le module d'un produit de quaternions est égal au produit des modules des facteurs.*

Il suffit de démontrer que le théorème est vrai pour deux facteurs, c'est-à-dire que l'on a

$$T(AA') = TA.TA'.$$

Or, d'après la remarque du n° 12, on peut écrire

$$T(AA')^2 = AA'.K(AA')$$

ou bien, d'après le théorème du n° 13,

$$T(AA')^2 = AA'.KA'.KA;$$

mais les deux produits A.KA et A'.KA' sont algébriques et égaux respectivement aux carrés des modules de A et A'; on a donc

$$T(AA')^2 = TA^2.TA'^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

15. *Produit de deux vecteurs.* — Soient deux vecteurs

$$\alpha = xi + yj + zk,$$
$$\alpha' = x'i + y'j + z'k.$$

En faisant $s = 0$, $s' = 0$, la formule (5) donne, pour le produit $\alpha\alpha'$,

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha\alpha' = -(xx' + yy' + zz') \\ \qquad + (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k. \end{cases}$$

On a donc

$$(8)\qquad S(\alpha\alpha') = -(xx' + yy' + zz'),$$

$$(9)\qquad V(\alpha\alpha') = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k.$$

En changeant l'ordre des facteurs, suivant la formule (5), il vient

$$(10)\qquad \begin{cases} \alpha'\alpha = -(xx' + yy' + zz') \\ \qquad - (yz' - zy')i - (zx' - xz')j - (xy' - yx')k. \end{cases}$$

On voit que, dans ce cas, *l'interversion des facteurs conserve la partie scalaire du produit et change le signe de sa partie vectorielle.*

16. En ajoutant et retranchant successivement les deux équations qui donnent les valeurs de $\alpha\alpha'$ et $\alpha'\alpha$, on obtient les deux relations suivantes, qui sont souvent utiles,

$$(11)\qquad \begin{cases} S(\alpha\alpha') = \frac{1}{2}(\alpha\alpha' + \alpha'\alpha), \\ V(\alpha\alpha') = \frac{1}{2}(\alpha\alpha' - \alpha'\alpha). \end{cases}$$

17. *Produit de trois vecteurs.* — Soient les trois vecteurs

$$\alpha = xi + yj + zk,$$
$$\alpha' = x'i + y'j + z'k,$$
$$\alpha'' = x''i + y''j + z''k.$$

Il s'agit de calculer le produit $\alpha\alpha'\alpha''$; on forme d'abord le produit $\alpha\alpha'$, qui est un quaternion donné par la formule (7), et l'on multiplie ce quaternion par α'', en appliquant la formule (5) du n° 10. On trouve ainsi, pour les parties scalaire et vectorielle du pro-

duit,

$$(12)\qquad S(\alpha\alpha'\alpha'') = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

$$(13)\qquad \begin{cases} -V(\alpha\alpha'\alpha'') = [x(x'x''+y'y''+z'z'') - x'(x''x+y''y+z''z) \\ \qquad\qquad + x''(xx'+yy'+zz')]i \\ \quad + [y(x'x''+y'y''+z'z'') - y'(x''x+y''y+z''z) \\ \qquad\qquad + y''(xx'+yy'+zz')]j \\ \quad + [z(x'x''+y'y''+z'z'') - z'(x''x+y''y+z''z) \\ \qquad\qquad + z''(xx'+yy'+zz')]k. \end{cases}$$

D'après la relation (8), on peut écrire

$$(14)\qquad V(\alpha\alpha'\alpha'') = \alpha S(\alpha'\alpha'') - \alpha' S(\alpha''\alpha) + \alpha'' S(\alpha\alpha').$$

18. On peut arriver directement à cette dernière expression par le calcul suivant, qui donne une idée de la forme usuelle du Calcul des quaternions.

On a, par définition des symboles S et V,

$$\alpha\alpha' = S(\alpha\alpha') + V(\alpha\alpha')$$

et, en multipliant par α'',

$$\alpha\alpha'\alpha'' = S(\alpha\alpha')\alpha'' + V(\alpha\alpha')\alpha''.$$

Telle est l'expression dont nous cherchons la partie vectorielle. Le premier terme, produit d'un scalaire par un vecteur, est un vecteur, de sorte que l'on a

$$V(\alpha\alpha'\alpha'') = S(\alpha\alpha')\alpha'' + V[V(\alpha\alpha')\alpha'']$$

ou bien, d'après la deuxième des relations (11) du n° 16,

$$2V(\alpha\alpha'\alpha'') = 2S(\alpha\alpha')\alpha'' + V(\alpha\alpha')\alpha'' - \alpha''V(\alpha\alpha'),$$

ce que l'on peut écrire

$$2V(\alpha\alpha'\alpha'') = [S(\alpha\alpha') + V(\alpha\alpha')]\alpha'' + \alpha''[S(\alpha\alpha') - V(\alpha\alpha')].$$

On a d'ailleurs, d'après la remarque finale du n° 15,

$$S(\alpha\alpha') - V(\alpha\alpha') = \alpha'\alpha.$$

Il en résulte

$$2V(\alpha\alpha'\alpha'') = \alpha\alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha'\alpha$$

et, par suite,

$$2V(\alpha\alpha'\alpha'') = \alpha(\alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha') - \alpha\alpha''\alpha' + \alpha''(\alpha'\alpha + \alpha\alpha') - \alpha''\alpha\alpha',$$
$$2V(\alpha\alpha'\alpha'') = \alpha(\alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha') - (\alpha\alpha'' + \alpha''\alpha)\alpha' + \alpha''(\alpha'\alpha + \alpha\alpha').$$

Enfin, en tenant compte des relations (11), on retrouve ainsi la formule (14).

19. *Formule usuelle.* — On a souvent à considérer le produit des parties vectorielles de deux quaternions, dont chacun est le produit de deux vecteurs; la partie vectorielle de ce produit est donnée par la formule suivante :

$$V[V(\alpha\alpha')V(\alpha''\alpha''')] = \alpha S(\alpha'\alpha''\alpha''') - \alpha' S(\alpha\alpha''\alpha'''). \tag{15}$$

En effet, si l'on remplace $\alpha\alpha'$ par $S(\alpha\alpha') + V(\alpha\alpha')$, le premier membre de l'équation (14) devient

$$V[S(\alpha\alpha')\alpha'' + V(\alpha\alpha')\alpha''].$$

D'ailleurs, $S(\alpha\alpha')$ étant un scalaire, on a

$$V[S(\alpha\alpha')\alpha''] = S(\alpha\alpha')V\alpha'',$$

ce qui se réduit à $\alpha'' S(\alpha\alpha')$, puisque α'' est un vecteur. La relation (14) peut donc s'écrire

$$V[V(\alpha\alpha')\alpha''] = \alpha S(\alpha'\alpha'') - \alpha' S(\alpha''\alpha).$$

En remplaçant α'' par $V(\alpha''\alpha''')$, il vient

$$V[V(\alpha\alpha')V(\alpha''\alpha''')] = \alpha S[\alpha' V(\alpha''\alpha''')] - \alpha' S[\alpha V(\alpha''\alpha''')]. \tag{16}$$

Cela posé, on a identiquement

$$\alpha'\alpha''\alpha''' = \alpha' S(\alpha''\alpha''') + \alpha' V(\alpha''\alpha''').$$

Le premier terme du second membre est un vecteur, dont le scalaire est nul; il en résulte

$$S(\alpha'\alpha''\alpha''') = S[\alpha' V(\alpha''\alpha''')]$$

et, de même,

$$S(\alpha\alpha''\alpha''') = S[\alpha V(\alpha''\alpha''')].$$

Par suite, la relation (16) se confond avec la relation (15) qu'il s'agissait d'établir.

20. *Division des quaternions.* — Dans le calcul des quantités réelles, la division consiste, étant donnés un produit et l'un de ses facteurs, à trouver l'autre facteur.

Si l'on étend cette définition au Calcul des quaternions, la valeur d'un produit changeant avec l'ordre des facteurs, le résultat de la division dépendra de la place attribuée, dans le produit, au facteur inconnu. En désignant par A le produit donné, par B le facteur connu et par Q le facteur inconnu, suivant que l'on écrira

$$A = B \times Q$$

ou bien

$$A = Q \times B,$$

il en résultera pour Q deux valeurs différentes.

Ces deux valeurs s'obtiennent immédiatement d'après la proposition suivante :

Étant donné un quaternion, il en existe un autre et un seul qui, multiplié par le premier, donne un produit égal à 1.

En effet, le produit d'un quaternion par son conjugué étant égal, quel que soit l'ordre des facteurs, au carré du module (n° 12), on a

$$A.KA = KA.A = (TA)^2,$$

ce que l'on peut écrire

$$A.\frac{KA}{(TA)^2} = \frac{KA}{(TA)^2}.A = 1.$$

Il en résulte que l'inverse d'un quaternion a une valeur unique que l'on obtient *en divisant le conjugué par le carré du module.*

On représente l'inverse d'un quaternion A par A^{-1}, de sorte que

$$A^{-1} = \frac{KA}{(TA)^2}, \tag{17}$$

et les deux valeurs du quotient de deux quaternions A et B sont AB^{-1} et $B^{-1}A$.

Pour éviter toute ambiguïté, c'est le deuxième de ces produits que l'on conviendra d'appeler quotient de A par B et de désigner

par $\frac{A}{B}$. On a ainsi

$$Q = \frac{A}{B} = B^{-1}A. \tag{18}$$

Il en résulte

$$BQ = BB^{-1}A = A;$$

de sorte que, par suite de cette convention, *le dividende est égal au diviseur multiplié par le quotient.*

III. — Interprétation géométrique du Calcul des quaternions.

21. *Représentation d'un vecteur.* — Soit le vecteur

$$\alpha = xi + yj + zk.$$

On le représente, dans un système de coordonnées rectangulaires, par le segment de droite joignant l'origine O au point A dont les coordonnées sont (x, y, z).

En désignant par (a, b, c) les cosinus directeurs de la droite OA et par r sa longueur, égale au module du vecteur, on a

$$x = ra, \quad y = rb, \quad z = rc.$$

22. *Somme de vecteurs.* — Soient des vecteurs, en nombre quelconque,

$$\alpha = xi + yj + zk, \quad \alpha' = x'i + y'j + z'k, \quad \ldots.$$

Leur somme est un vecteur $Xi + Yj + Zk$, et l'on a

$$X = \Sigma x, \quad Y = \Sigma y, \quad Z = \Sigma z.$$

Il en résulte que *la somme de plusieurs vecteurs se représente par le vecteur qui forme le contour polygonal construit en portant les vecteurs, bout à bout, parallèlement à eux-mêmes.*

23. *Rappel d'une formule de Géométrie analytique.* — Considérons deux directions OM, OM′ dont les cosinus directeurs sont (a, b, c) et (a', b', c'). Soient (l, m, n) les cosinus directeurs de la perpendiculaire commune à ces directions; on a les équations

$$al + bm + cn = 0,$$
$$a'l + b'm + c'n = 0,$$
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1;$$

d'où l'on tire

$$\frac{l}{cb'-c'b}=\frac{m}{ca'-ac'}=\frac{n}{ab'-ba'}=\pm\frac{1}{D},$$

en posant

$$D^2=(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2.$$

La valeur de D^2 pouvant être mise sous la forme

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2,$$

on voit qu'elle est égale à $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$, en désignant par θ l'angle des deux directions. On a donc les formules

$$\frac{l}{bc'-cb'}=\frac{m}{ca'-ac'}=\frac{n}{ab'-ba'}=\pm\frac{1}{\sin\theta}.$$

Le double signe correspond aux directions opposées que présente, à partir de l'un de ses points, la perpendiculaire commune aux directions OM, OM'; on détermine ce signe en définissant, comme il suit, l'*axe de deux directions.*

24. On appelle axe de deux directions (OM, OM') celle des deux directions perpendiculaires au plan MOM' suivant laquelle un observateur, ayant les pieds sur ce plan, doit se placer pour voir s'effectuer *de droite à gauche* (1) la rotation d'un rayon partant de la direction OM pour se rapprocher de la direction OM'.

D'après cette convention, la direction OZ est opposée à l'axe des directions (OX, OY); donc le signe des formules précédentes doit être tel que l'on trouve

$$l=0,\qquad m=0,\qquad n=-1,$$

quand on suppose

$$a=1,\qquad b=0,\qquad c=0,$$
$$a'=0,\qquad b'=1,\qquad c'=0,$$

ce qui exige que l'on prenne le signe +. On a donc

$$\frac{l}{bc'-cb'}=\frac{m}{ca'-ac'}=\frac{n}{ab'-ba'}=-\frac{1}{\sin\theta}. \tag{19}$$

(1) Cette convention, sur le *sens direct* des rotations, est conforme à celle que Maxwell a adoptée (*Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 26).

25. *Produit de deux vecteurs.* — Soient deux vecteurs

$$\alpha = xi + yj + zk,$$
$$\alpha' = x'i + y'j + z'k.$$

Leur produit est donné par les formules (8) et (9) du n° 15; en désignant par r, r' leurs modules et par (a, b, c), (a', b', c') leurs cosinus directeurs, ces formules deviennent

$$S(\alpha\alpha') = -rr'(aa' + bb' + cc'),$$
$$V(\alpha\alpha') = rr'[(bc' - cb')i + (ca' - ac')j + (ab' - ba')k],$$

ou bien, en désignant par θ l'angle des deux vecteurs et, en introduisant, d'après les relations (19), les cosinus directeurs (l, m, n) de l'axe des vecteurs (α, α')

$$S(\alpha\alpha') = -rr'\cos\theta, \tag{20}$$

$$V(\alpha\alpha') = -rr'\sin\theta(li + mj + nk). \tag{21}$$

Donc, *le scalaire du produit $\alpha\alpha'$ de deux vecteurs est égal à la projection de l'un d'eux sur le prolongement de l'autre et le vecteur de ce produit s'obtient en portant sur le prolongement de l'axe des vecteurs (α, α') une longueur égale à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.*

26. En posant

$$\lambda = li + mj + nk,$$

le vecteur-unité λ représente l'axe des vecteurs (α, α') et l'on a, d'après les formules (20) et (21),

$$\alpha\alpha' = -rr'(\cos\theta + \lambda\sin\theta). \tag{22}$$

27. *Quotient de deux vecteurs.* — On a, d'après la formule (17),

$$\alpha^{-1}\alpha' = \frac{K\alpha.\alpha'}{(T\alpha)^2}.$$

Le conjugué d'un vecteur étant ce vecteur pris avec le signe contraire, il vient, en posant $T\alpha = r$,

$$\alpha^{-1}\alpha' = -\frac{\alpha\alpha'}{r^2};$$

mais, par définition (n° 20), $\alpha^{-1}\alpha'$ représente le quotient $\frac{\alpha'}{\alpha}$ de α'

par α; par suite, la relation (22) donne

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{r'}{r}(\cos\theta + \lambda \sin\theta), \tag{23}$$

λ représentant, comme précédemment, l'axe des vecteurs (α, α').

28. En supposant $r' = r$, on a

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \cos\theta + \lambda \sin\theta; \tag{24}$$

d'où l'on déduit (n° 20)

$$\alpha' = \alpha(\cos\theta + \lambda \sin\theta).$$

Ce dernier résultat s'interprète comme il suit :

Le produit d'un vecteur α par le quaternion $\cos\theta + \lambda \sin\theta$ *représente le vecteur obtenu en faisant tourner α de droite à gauche, d'un angle θ, autour d'un axe λ perpendiculaire à α.*

29. *Représentation d'un quaternion.* — Soit un quaternion

$$A = s + xi + yj + zk.$$

En désignant par (l, m, n) et par r les cosinus directeurs et le module de son vecteur, on a d'abord

$$A = s + r(li + mj + nk).$$

En posant ensuite

$$s = \rho\cos\theta, \qquad r = \rho\sin\theta, \qquad \lambda = li + mj + nk,$$

il vient

$$A = \rho(\cos\theta + \lambda \sin\theta).$$

Telle est la forme à laquelle est réductible un quaternion. La quantité ρ représente le *module* du quaternion, puisque l'on a

$$\rho^2 = s^2 + r^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

L'angle θ est l'*argument* du quaternion; λ est son *vecteur-unité* qui s'obtient en portant sur la direction (l, m, n) une longueur égale à l'unité.

30. Un quaternion étant réduit à cette forme, son *verseur*

(n° 9) est

$$UA = \cos\theta + \lambda \sin\theta.$$

D'après la formule (23), cette valeur peut s'identifier à celle qui représente le quotient de deux vecteurs dont les modules sont égaux à l'unité; il en résulte que tout verseur est le quotient de deux vecteurs suivant cette règle :

Etant donné un quaternion quelconque, si l'on mène dans un plan perpendiculaire à son vecteur-unité OL, *deux autres vecteurs-unités* OM, OM', *faisant entre eux un angle égal à l'argument du quaternion et tels que l'on puisse appliquer* OM *sur* OM' *par une rotation directe, autour de* OL, *égale à cet argument, le verseur du quaternion est égal au quotient de* OM' *par* OM.

D'après cette règle, on peut représenter un verseur, sur une sphère de rayon égal à l'unité, par un arc de grand cercle MM' égal à θ, ayant pour pôle le point L extrémité du vecteur-unité λ et tel que le chemin MM' soit décrit, sur la sphère, d'un mouvement direct par rapport à ce pôle. Cet arc représente d'ailleurs, quelle que soit la position qu'il occupe sur son cercle, le verseur du même quaternion.

31. On peut établir maintenant la signification géométrique du produit de deux et, par suite, d'un nombre quelconque de verseurs.

Les verseurs de deux quaternions (A, B) étant donnés par leurs arcs, ces arcs peuvent être déplacés sur leurs cercles respectifs de manière à avoir une extrémité commune et à former, par conséquent, un triangle sphérique MNP, tel que les deux côtés MN, NP représentent les deux verseurs.

Désignons par α, β, γ les vecteurs menés du centre aux sommets M, N, P; on aura, d'après ce qui précède,

$$UA = \alpha^{-1}\beta, \qquad UB = \beta^{-1}\gamma;$$

d'où il résulte, en faisant la multiplication,

$$UA.UB = \alpha^{-1}\beta\beta^{-1}\gamma = \alpha^{-1}\gamma$$

et, par suite, l'arc représentatif du verseur-produit est le troisième côté MP du triangle sphérique.

On voit que la multiplication des verseurs s'opère, sur la sphère, avec les arcs de grand cercle suivant la même règle que l'addition des imaginaires, sur le plan, avec les vecteurs.

32. Pour déterminer un produit de plusieurs verseurs, on multipliera, suivant cette règle, le premier par le deuxième, puis le produit par le troisième et ainsi de suite, de manière à obtenir un dernier arc de grand cercle qui représente le produit.

Enfin, pour multiplier des quaternions, il suffira de multiplier d'abord leurs verseurs et de multiplier ensuite le résultat par le produit des modules.

33. *Analogie des quaternions et des imaginaires.* — Il résulte des formules de la multiplication des vecteurs (n° 15) que *le carré d'un vecteur-unité est égal à* -1.

Si donc A et A′ sont deux quaternions, ayant le même vecteur-unité λ, sous la forme

$$A = \rho(\cos\theta + \lambda \sin\theta), \qquad A' = \rho'(\cos\theta' + \lambda \sin\theta'),$$

on trouvera, en faisant la multiplication,

$$AA' = \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + \lambda \sin(\theta + \theta')],$$

et l'on en tire, par le procédé connu, quel que soit l'exposant n,

$$A^n = \rho^n(\cos n\theta + \lambda \sin n\theta).$$

34. Ce résultat, qui généralise la formule de Moivre, permet de définir une fonction $F(z)$ de la variable z, lorsque celle-ci est un quaternion. Supposons, en effet, que l'on puisse définir cette fonction, lorsque z est imaginaire, par un développement en série convergente ordonnée suivant les puissances de la variable; le même développement pourra s'appliquer en remplaçant z par un quaternion et l'imaginaire i, qui entre dans z, par le symbole λ.

IV. — Différentiation des fonctions de quaternions.

35. *Différentielle d'un quaternion.* — Quand les termes d'un quaternion $A = s + xi + yj + zk$ sont variables, sa différentielle s'obtient en différentiant ses termes constituants; elle a pour

valeur

$$dA = ds + dx\,i + dy\,j + dz\,k.$$

Il en résulte que l'on a

$$S\,dA = d\,SA, \qquad V\,dA = d\,VA,$$

de sorte que la caractéristique d est commutative avec chacune des caractéristiques S et V.

Étant donné un quaternion, il est souvent utile de différentier séparément son module et son verseur; les formules suivantes, qui donnent le résultat général de cette opération, sont d'un usage fréquent dans les applications.

36. *Différentielle d'un module.* — Soit

$$TA = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2};$$

on en tire

$$d\,TA = \frac{s\,ds + x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Le numérateur est le scalaire du produit de dA par le conjugué KA; donc

$$d\,TA = \frac{S(dA.KA)}{TA} \tag{25}$$

ou, puisque $KA = A^{-1}(TA)^2$ (n° 20),

$$d\,TA = S(dA.A^{-1})TA. \tag{26}$$

Si le quaternion se réduit à un vecteur α, on a

$$K\alpha = -\alpha,$$

et la formule (25) devient

$$d\,T\alpha = -\frac{S(\alpha\,d\alpha)}{T\alpha}. \tag{27}$$

Il en résulte que, si un vecteur varie de manière que son module reste constant, on a

$$S(\alpha\,d\alpha) = 0, \tag{28}$$

ce qui exprime, d'après la relation (20), que les vecteurs α, $d\alpha$ sont perpendiculaires entre eux.

37. *Différentielle d'un verseur.* — Le verseur d'un quaternion A est, par définition,

$$UA = \frac{A}{TA}.$$

Il en résulte

$$dUA = \frac{dA.TA - dTA.A}{(TA)^2}$$

ou, en remplaçant dTA par sa valeur (25),

$$dUA = \frac{dA.(TA)^2 - S(dA.KA)A}{(TA)^3};$$

mais on a

$$(TA)^2 = KA.A \qquad (n^o\ 12);$$

par suite, le numérateur devient

$$[dA.KA - S(dA.KA)]A = V(dA.KA)A,$$

et l'on a, par conséquent,

$$dUA = \frac{V(dA.KA).UA}{(TA)^2} \tag{29}$$

ou bien, en remplaçant KA par $A^{-1}(TA)^2$,

$$dUA = V(dA.A^{-1})UA. \tag{30}$$

Pour un vecteur α, la formule (29) devient

$$dU\alpha = \frac{V(\alpha\, d\alpha)\alpha}{(T\alpha)^3}. \tag{31}$$

Quand le module du vecteur reste constant, on a, d'après la relation (28),

$$V(\alpha\, d\alpha) = \alpha\, dx$$

et, par conséquent,

$$dU\alpha = -\frac{\alpha^2\, d\alpha}{(T\alpha)^3}$$

ou simplement, puisque $\alpha^2 = -(T\alpha)^2$,

$$dU\alpha = \frac{d\alpha}{T\alpha}. \tag{32}$$

38. *Différentielle d'une fonction de quaternions.* — Pour une fonction d'une variable z, réelle ou imaginaire, l'existence de la fonction dérivée résulte de la possibilité de mettre sous la forme

$\varphi(z)\,dz$ l'accroissement de la fonction correspondant à un accroissement infiniment petit, dz de la variable. Lorsque z est un quaternion, les règles spéciales du calcul ne permettent pas, en général, d'attribuer cette forme à l'accroissement de la fonction.

Considérons, par exemple, la fonction $f(z) = z^2$; son accroissement, pour l'accroissement dz de la variable, est

$$(z + dz)^2 - z^2 = z.dz + dz.z + dz^2.$$

On a, en négligeant le second ordre,

$$df(z) = z.dz + dz.z,$$

et cette forme est irréductible.

Cette absence des dérivées, dans le cas général d'une fonction de quaternions, ne permet pas d'appliquer la règle ordinaire de la différentiation d'une fonction composée $f(u, v, w, \ldots)$, lorsque $u, v, w, \ldots$ sont des quaternions. Cette règle, d'après laquelle on a, pour des quantités $u, v, w, \ldots$ réelles ou imaginaires,

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw + \ldots,$$

perd alors toute signification. Mais on doit remarquer que, si l'on attribue à $u, v, w, \ldots$ des accroissements infiniment petits, les règles particulières du Calcul des quaternions donneront, en général, pour l'accroissement correspondant de f réduit au premier ordre, c'est-à-dire pour sa différentielle, une expression linéaire et homogène par rapport aux différentielles des variables, de sorte que, comme dans le calcul ordinaire, pour différentier une fonction composée de quaternions variables, il suffira de différentier par rapport à chacune des variables, comme si elle était seule, et de faire la somme des résultats.

39. *Différentielle d'un produit.* — En appliquant cette règle à un produit $f = uv$, on trouve

$$df = du.v + u.dv.$$

Le résultat est le même que celui que donne la différentiation d'un produit de fonctions algébriques, avec l'obligation d'observer l'ordre des facteurs.

V. — Applications géométriques.

40. On se bornera à indiquer comment le Calcul des quaternions permet de présenter les éléments de la théorie des lignes courbes.

Les points et les directions étant rapportés à un système de coordonnées rectangulaires, on représentera :

1° Le point dont les coordonnées sont (x, y, z) par le vecteur

$$u = xi + yj + zk;$$

2° La direction dont les cosinus directeurs sont (a, b, c) par le vecteur-unité

$$\alpha = ai + bj + ck.$$

Si l'on suppose que (x, y, z) soient des fonctions d'une variable indépendante t, u sera une fonction de la même variable et donnera, par la variation continue de t, tous les points d'une *ligne courbe* dont cette fonction symbolique unique servira à faire connaître les propriétés.

En supposant que u et α représentent un point et une direction variables avec t, nous désignerons par des accents leurs dérivées, de sorte que l'on aura

$$u' = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k,$$

$$\alpha' = \frac{da}{dt} i + \frac{db}{dt} j + \frac{dc}{dt} k.$$

Nous rappellerons enfin que, si l'on considère une direction α variant continûment avec t et si l'on appelle $d\varphi$ l'angle infiniment petit compris entre les deux directions qui correspondent aux valeurs t, $t + dt$, on a, d'après une formule connue de Géométrie,

$$d\varphi = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2},$$

ce que l'on peut écrire, avec la notation des quaternions,

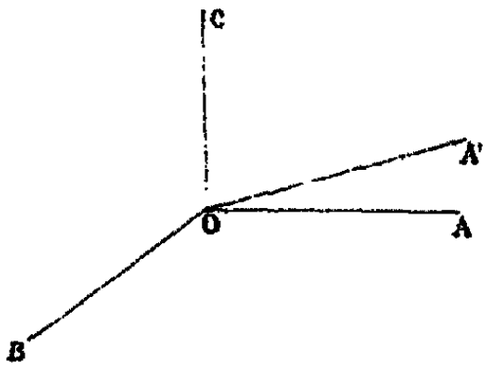
$$d\varphi = \mathrm{T}\alpha' . dt. \tag{33}$$

41. *Système trirectangle.* — En un point d'une ligne courbe, trois droites sont à considérer : la tangente, la perpendiculaire au plan osculateur, la normale principale.

Par un point quelconque O, menons deux parallèles OA, OA′ aux tangentes correspondant aux valeurs t, $t + dt$ de la variable; nous appellerons *axe du plan osculateur* l'axe OB des deux directions (OA, OA′).

Sur la normale principale, nous considérerons, sous le nom de

Fig. 1.



direction du *rayon de courbure*, l'axe OC des deux directions (OB, OA).

Les trois directions OA, OB, OC, formant un système trirectangle, seront respectivement représentées par trois vecteurs-unités (α, β, γ) variables avec t.

La direction OA étant l'axe des directions (OC, OB), rectangulaires entre elles, les formules (20) et (21) se réduisent aux suivantes

$$S(\gamma\beta) = 0, \qquad V(\gamma\beta) = -\alpha.$$

On en conclut la première de ces trois équations

$$\alpha = \beta\gamma, \qquad \beta = \gamma\alpha, \qquad \gamma = \alpha\beta, \tag{34}$$

et les deux autres s'obtiennent en permutant les lettres.

Telles sont les équations qui lient les vecteurs-unités d'un système trirectangle quelconque. Voici maintenant les formules qui donnent β, γ, ainsi que leurs dérivées β', γ', en fonction de α, α'.

42. *Valeurs de* β, γ. — La direction OB est l'axe des directions (OA, OA′) représentées par les vecteurs unités α, $\alpha + d\alpha$; par suite, en désignant par $d\varphi$ l'angle de contingence AOA′, on aura,

d'après la formule (21),

$$\beta\, d\varphi = -\,V[\alpha(\alpha + d\alpha)] = -\,V(\alpha\, d\alpha),$$

ce que l'on peut écrire

$$\beta\, d\varphi = -\,\alpha\, d\alpha,$$

puisque, d'après l'équation (28), on a

$$S(\alpha\, d\alpha) = 0.$$

Si donc on remplace $d\alpha$ par $\alpha'\, dt$ et si l'on pose $\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt}$, la direction de l'axe du plan osculateur est donnée par la formule

$$\beta = -\frac{V(\alpha\alpha')}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \beta = -\frac{\alpha\alpha'}{\varepsilon}. \tag{35}$$

En substituant la deuxième de ces valeurs dans la troisième des équations (34), il vient

$$\gamma = -\frac{\alpha^2\alpha'}{\varepsilon}$$

et, puisque $\alpha^2 = -1$,

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\varepsilon}. \tag{36}$$

43. *Valeurs de* β', γ'. — D'après la valeur (35), on peut écrire

$$\beta = U\,V(\alpha'\alpha).$$

En différentiant suivant la formule (31) et remarquant que la dérivée de $V(\alpha'\alpha)$ est $V(\alpha''\alpha + \alpha'^2) = V(\alpha''\alpha)$, on trouve

$$\beta' = \frac{V[V(\alpha'\alpha)\,V(\alpha''\alpha)]}{[T\,V(\alpha'\alpha)]^3}\,\beta.$$

Mais, d'après la formule (15),

$$V(\alpha'\alpha)\,V(\alpha''\alpha) = -\,\alpha\,S(\alpha'\alpha''\alpha) = \alpha\,S(\alpha\alpha'\alpha'').$$

On a de plus

$$T\,V(\alpha'\alpha) = T(\alpha'\alpha) = T\alpha'.T\alpha$$

avec $T\alpha = 1$, $T\alpha' = \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon$. En tenant compte enfin de la relation $\alpha\beta = \gamma$, il vient

$$\beta' = \frac{S(\alpha\alpha'\alpha'')}{\varepsilon^3}\,\beta. \tag{37}$$

L'angle de torsion $d\psi$ est donné par l'expression $d\psi = T\beta' dt$ et, par suite, en posant $\eta = \frac{d\psi}{dt}$, on a, d'après (37),

$$\eta = \frac{S(\alpha\alpha'\alpha'')}{\varepsilon^3}, \tag{38}$$

de sorte que l'on peut écrire simplement

$$\beta' = \eta\gamma. \tag{39}$$

Cette dernière formule, qui, d'après (36), se réduit aussi à la suivante

$$\beta' = \frac{\eta}{\varepsilon}\alpha',$$

correspond à un théorème de Serret.

44. La troisième des équations (34) donne, par différentiation,

$$\gamma' = \alpha'\beta + \alpha\beta'.$$

En remplaçant β et β' par leurs valeurs (35) et (39) et en remarquant que l'on a

$$\alpha'^2 = -\varepsilon^2,$$

on trouve immédiatement

$$\gamma' = -\alpha\varepsilon - \beta\eta, \tag{40}$$

ce qui équivaut aux formules de Frenet et au théorème de Lancret sur l'angle de deux normales principales infiniment voisines.

45. *Courbure et torsion.* — En introduisant le vecteur u d'un point de la courbe au lieu du vecteur-unité α, on retrouve les formules ordinaires de la courbure et de la torsion où figurent les dérivées des coordonnées.

Remarquons d'abord que, si l'on désigne par ds la longueur d'un arc infiniment petit de la courbe, on a

$$ds = Tu'.dt.$$

Cela posé, α étant, comme précédemment, le vecteur-unité de la tangente, on a

$$\alpha = Uu';$$

d'où, en différentiant suivant la formule (31),

$$\alpha' = \frac{\mathrm{V}(u'u'')u'}{(\mathrm{T}u')^3}.$$

Donc l'angle de contingence est donné par la formule

$$d\varphi = \frac{\mathrm{T}\,\mathrm{V}(u'u'')}{(\mathrm{T}u')^3}\,dt,$$

et la courbure a pour expression

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\mathrm{T}\,\mathrm{V}(u'u'')}{(\mathrm{T}u')^3}, \tag{41}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{[(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2]^{\frac{1}{2}}}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dans le cas où s est la variable indépendante, on a

$$\mathrm{T}u' = 1;$$

il en résulte, d'après (28),

$$\mathrm{S}(u'u'') = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(u'u'') = u'u''.$$

On a alors

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathrm{T}u'', \tag{42}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

46. Pour calculer la torsion, on partira de la formule

$$\beta = \mathrm{U}\,\mathrm{V}(u''u');$$

d'où l'on tire, par un calcul analogue à celui du n° 43,

$$\beta' = \frac{\mathrm{V}[\mathrm{V}(u''u')\,\mathrm{V}(u'''u')]}{[\mathrm{T}\,\mathrm{V}(u''u')]^2}\,\beta.$$

On a d'ailleurs

$$\mathrm{V}(u''u')\,\mathrm{V}(u'''u') = u'\mathrm{S}(u'u''u'''), \qquad \mathrm{V}u' = u'$$

et, par suite,

$$\beta' = \frac{\mathrm{S}(u'u''u''')}{[\mathrm{T}\,\mathrm{V}(u'u'')]^2}\,u'\beta.$$

L'angle de torsion $d\psi$, égal à $T\beta' dt$, est donc donné par la formule

$$d\psi = \frac{S(u'u''u''')}{[TV(u'u'')]^2} Tu'.dt,$$

et la torsion a pour expression

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{S(u'u''u''')}{[TV(u'u'')]^2}. \tag{43}$$

D'après la formule (12), cette expression équivaut à la suivante :

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{dx(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + dy(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + dz(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

VI. — Applications cinématiques.

A. — Rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

47. *Déplacement d'un solide autour d'un axe.* — Supposons qu'un solide tourne autour d'une droite LL'. A partir d'un point O de cette droite existent deux directions opposées OL, OL'; nous appellerons *axe de la rotation* la direction OL suivant laquelle un observateur, ayant les pieds en O, doit se déplacer pour voir la rotation s'effectuer de droite à gauche.

Soient (a, b, c) les cosinus directeurs de la direction OL rapportée à un système de trois axes rectangulaires; l'axe de la rotation sera représenté par le vecteur-unité

$$\lambda = ai + bj + ck,$$

et, en désignant par θ l'angle de la rotation, le déplacement du solide sera défini par les données (λ, θ).

48. Considérons un point M du solide; après la rotation, ce point vient en M_1. L'origine des coordonnées étant au point O de l'axe fixe, désignons par (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées des points M et M_1; les positions respectives de ces points seront représentées par les vecteurs

$$u = xi + yj + zk,$$
$$u_1 = x_1 i - y_1 j + z_1 k.$$

et, pour déterminer la position finale du solide, il suffira d'ex-

primer u_1 en fonction de u, λ, θ; on y parvient à l'aide du théorème suivant, dû à Hamilton.

49. Théorème. — *La position d'un vecteur u, après une rotation égale à θ autour d'un axe λ, est représentée par le produit*

$$u_1 = p^{-\frac{1}{2}} u p^{\frac{1}{2}},$$

où l'on désigne par p le verseur $\cos\theta + \lambda\sin\theta$.

En effet, décomposons le vecteur u en deux autres (β, α) suivant l'axe de rotation et suivant une direction perpendiculaire à cet axe, de sorte que $u = \beta + \alpha$. La rotation conserve la composante β et multiplie α par le verseur p (n° 28); d'où il résulte

$$u_1 = \beta + \alpha p. \tag{44}$$

Cela posé, on a identiquement

$$u = -\lambda^2 u,$$

c'est-à-dire

$$u = -\lambda S(\lambda u) - \lambda V(\lambda u);$$

mais, d'après la formule (20) du n° 25, le scalaire $S(\lambda u)$, pris avec le signe contraire, représente la projection de u sur λ; donc on a

$$-\lambda S(\lambda u) = \beta$$

et, par suite,

$$-\lambda V(\lambda u) = \alpha.$$

Par conséquent, la relation (44) devient

$$u_1 = -\lambda S(\lambda u) - \lambda V(\lambda u) p. \tag{45}$$

Cette formule résout le problème: voici comment on en déduit l'expression transformée qui figure dans l'énoncé.

50. On a, identiquement,

$$u_1 = -\lambda\left[S(\lambda u)p^{-\frac{1}{2}} + V(\lambda u)p^{\frac{1}{2}}\right]p^{\frac{1}{2}}$$

et, d'après le n° 33,

$$p^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + \lambda\sin\frac{\theta}{2},$$

$$p^{-\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} - \lambda\sin\frac{\theta}{2}.$$

Substituant ces valeurs, il vient

$$u_1 = -\lambda\left\{\cos\frac{\theta}{2}[S(\lambda u)+V(\lambda u)] - \sin\frac{\theta}{2}[S(\lambda u)-V(\lambda u)]\lambda\right\}p^{\frac{1}{2}}.$$

On a enfin

$$S(\lambda u)+V(\lambda u)=\lambda u,$$
$$S(\lambda u)-V(\lambda u)=u\lambda.$$

Par suite,

$$u_1 = -\lambda\left(\cos\frac{\theta}{2}\lambda u+\sin\frac{\theta}{2}u\right)p^{\frac{1}{2}} = \left(\cos\frac{\theta}{2}-\lambda\sin\frac{\theta}{2}\right)up^{\frac{1}{2}};$$

c'est-à-dire, conformément à l'énoncé,

$$u_1 = p^{-\frac{1}{2}}up^{\frac{1}{2}}. \tag{46}$$

51. *Formules d'Euler.* — On peut déduire de cette formule les coordonnées (x_1, y_1, z_1) du point M_1 où vient le point M après la rotation. En désignant, en effet, par (a, b, c) les cosinus directeurs de l'axe de rotation et, en posant

$$a\tan\frac{\theta}{2}=l, \qquad b\tan\frac{\theta}{2}=m, \qquad c\tan\frac{\theta}{2}=n,$$
$$v=li+mj+nk,$$

la formule (46) peut s'écrire

$$u_1=\cos^2\frac{\theta}{2}(1-v)u(1+v)=\cos^2\frac{\theta}{2}(u-vu+uv-vuv)$$

ou bien, en appliquant la règle établie (n° 17) pour un produit de trois vecteurs,

$$u_1=\cos^2\frac{\theta}{2}[u+2V(uv)-2vS(uv)+uS(v^2)]. \tag{47}$$

On a, d'ailleurs,

$$V(uv)=(ny-mz)i+(lz-nx)j+(mx-ly)k,$$
$$S(uv)=-(lx+my+nz), \qquad S(v^2)=-(l^2+m^2+n^2).$$

Enfin, en posant

$$h=1+l^2+m^2+n^2, \tag{48}$$

on a

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{1+l^2+m^2+n^2}=\frac{1}{h}.$$

En remplaçant les diverses quantités qui figurent dans (47) par leurs valeurs et en identifiant les coefficients de i, j, k dans les deux membres, on trouve

$$(49)\quad \begin{cases} hx_1 = (1+l^2-m^2-n^2)x + 2(lm+n)y + 2(ln-m)z, \\ hy_1 = 2(ml-n)x + (1-l^2+m^2-n^2)y + 2(mn+l)z, \\ hz_1 = 2(nl+m)x + 2(nm-l)y + (1-l^2-m^2+n^2)z. \end{cases}$$

L'équation unique (46) équivaut au système des trois équations (49); on a donc un exemple remarquable de la concision que l'algorithme des quaternions est susceptible d'introduire dans les formules.

52. *Mouvement d'un point.* — Le mouvement d'un point est déterminé quand on connaît les fonctions du temps t qui expriment les coordonnées (x, y, z) de ce point. En représentant le point par le vecteur $u = xi + yj + zk$, on n'a plus à considérer qu'une seule fonction $u = f(t)$.

Les dérivées première et seconde de u par rapport à t sont deux vecteurs, v et w, qui représentent respectivement, en grandeur et en direction, la vitesse et l'accélération du mobile.

53. *Mouvement d'un solide autour d'un point.* — Supposons que le point M appartienne à un solide mobile autour d'un point fixe pris pour origine des vecteurs. Pendant un temps infiniment petit dt, le mouvement du solide peut être considéré comme une rotation d'un angle $d\varphi$ autour d'un vecteur unité λ. En négligeant les infiniment petits du second ordre, le verseur p de la rotation devient

$$p = 1 + \lambda\, d\varphi$$

et, en désignant par du l'accroissement que reçoit, pendant le temps dt, le vecteur u du point M, on a, d'après la formule (46),

$$u + du = (1 - \tfrac{1}{2}\lambda\, d\varphi)\, u\, (1 + \tfrac{1}{2}\lambda\, d\varphi);$$

d'où, en développant et en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre,

$$du = \tfrac{1}{2}\, d\varphi (u\lambda - \lambda u) = d\varphi\, \mathrm{V}(u\lambda).$$

En divisant les deux membres par dt et désignant par ε la

vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$, on a, pour la vitesse du point M,

$$v = \varepsilon V(u\lambda).$$

On peut encore écrire

$$v = V(u, \varepsilon\lambda),$$

et le facteur $\varepsilon\lambda$ est un vecteur obtenu en portant sur l'axe de la rotation une longueur égale à la vitesse angulaire de cette rotation; c'est le *vecteur représentatif* ou, simplement, *le vecteur de la rotation instantanée*. En le désignant par ω, on a

$$v = V(u\omega). \tag{50}$$

En prenant la dérivée de v par rapport à t, on a, pour l'accélération,

$$w = V(u'\omega + u\omega')$$

ou, en remplaçant u' par sa valeur,

$$w = V[V(u\omega)\omega + u\omega']. \tag{51}$$

En désignant cette dernière expression par $V'(u\omega)$, la vitesse et l'accélération d'un point quelconque d'un solide tournant autour d'un centre fixe sont représentées par les formules

$$v = V(u\omega), \qquad w = V'(u\omega). \tag{52}$$

B. — Théorie des mouvements relatifs.

54. *Théorème de Coriolis.* — Connaissant le mouvement (relatif) d'un point M par rapport à un système mobile autour d'un centre fixe, ainsi que le mouvement de ce système par rapport à un système fixe, on se propose de déterminer le mouvement (absolu) du point M par rapport au système fixe.

Prenant le centre fixe pour origine des vecteurs, soit u le vecteur qui définit la position du point M par rapport au système fixe.

Le *mouvement d'entraînement* du point M à l'instant t est le mouvement que prendrait ce point si, à partir de cet instant, il restait en repos relatif; il résulte de cette définition que, si l'on désigne par ω le vecteur de la rotation instantanée du système mobile, la vitesse et l'accélération d'entraînement sont, d'après les

relations (52), données par les formules

$$v_e = V(u\omega), \qquad w_e = V'(u\omega). \tag{53}$$

55. Cela posé, imaginons que, le système mobile étant réduit au repos pendant le temps dt, le point M accomplisse son mouvement relatif. La valeur finale de son vecteur sera

$$u_1 = u + v_r\,dt + \tfrac{1}{2} w_r\,dt^2 + \ldots, \tag{54}$$

en désignant par v_r et w_r les vecteurs qui définissent, par rapport aux axes fixes, la vitesse et l'accélération relatives.

Supposons maintenant que le point M reste en repos relatif et que l'on imprime au système mobile le mouvement dont il est réellement animé pendant le temps dt. D'après les formules du n° 53, le vecteur u_1 deviendra

$$u_2 = u_1 + V(u_1\omega)\,dt + \tfrac{1}{2} V'(u_1\omega)\,dt^2 + \ldots. \tag{55}$$

Par ces deux mouvements successifs, le mobile vient à la position qu'il occupe, après l'intervalle de temps dt, dans son mouvement absolu; par suite, en désignant par Δu l'accroissement du vecteur u correspondant à l'accroissement dt du temps, on a

$$u + \Delta u = u_2 \qquad \text{et} \qquad \Delta u = u_2 - u.$$

En remplaçant, dans u_2, u_1 par sa valeur (54), il vient

$$\Delta u = [v_r + V(u\omega)]\,dt + \tfrac{1}{2}[w_r + 2V(v_r\omega) + V'(u\omega)]\,dt^2 + \ldots.$$

En prenant les coefficients de dt et dt^2 et en ayant égard aux formules (53), on a, pour la vitesse et l'accélération absolues,

$$\begin{cases} v = v_r + v_e, \\ w = w_r + w_e + 2V(v_r\omega). \end{cases} \tag{56}$$

Par suite :

1° La vitesse absolue est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement;

2° L'accélération absolue est la résultante de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et d'une accélération complémentaire. D'après la règle du n° 25, l'accélération complémentaire s'obtient en portant sur l'axe des deux vecteurs (ω, v_r) le double produit du sinus de l'angle compris entre ces deux vecteurs par la grandeur de la vitesse relative et par la vitesse angulaire de la rotation instantanée du système mobile.

VII. — Applications mécaniques et physiques.

55. On peut représenter par un vecteur toute grandeur, mécanique ou physique, présentant à la fois une quantité et une direction (vitesse, force, flux de chaleur ou d'électricité à travers un plan, etc.). Au lieu de trois notations nécessaires pour représenter les trois composantes de cette grandeur, il suffit d'en introduire une seule sur laquelle on peut généralement opérer suivant les règles du Calcul des quaternions. On trouve ainsi, dans un grand nombre de cas, une équation unique qu'il suffit de décomposer en trois autres pour retrouver, sous leur forme usuelle, les résultats de l'analyse ordinaire. Voici quelques notions se rapportant à ce genre d'applications.

56. *Fonctions vectorielles.* — Soit un vecteur variable

$$\rho = xi + yj + zk.$$

Si l'on désigne par X, Y, Z trois fonctions réelles quelconques des variables (x, y, z), l'expression

$$\sigma = Xi + Yj + Zk$$

peut être considérée comme une fonction de ρ; car à chaque valeur de ρ, c'est-à-dire à chaque système de valeurs de (x, y, z), correspondent un système de valeurs de (X, Y, Z) et, par conséquent, une valeur de σ. On dit alors que σ est une *fonction vectorielle* de ρ (¹).

Cette définition est une extension de celle que Cauchy a proposée pour les fonctions d'une variable imaginaire.

57. Lorsque (X, Y, Z) sont des fonctions linéaires et homogènes de (x, y, z), on dit que σ est une fonction vectorielle et linéaire de ρ (²); on a, dans ce cas,

$$\begin{aligned} X &= a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z, \\ Y &= a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z, \\ Z &= a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z, \end{aligned}$$

en désignant par $a_{r,s}$ des coefficients constants.

(¹) *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 30.
(²) *Ibid.*, p. 152.

La forme la plus générale d'une fonction vectorielle linéaire comprend donc neuf coefficients arbitraires. Si ces coefficients satisfont à la condition $a_{r,s} = a_{s,r}$, leur nombre se réduit à six et la fonction est dite *autoconjuguée*. Dans ce cas, (X, Y, Z) sont de la forme

$$\begin{aligned} X &= a_1 x + b_3 y + b_2 z, \\ Y &= b_3 x + a_2 y + b_1 z, \\ Z &= b_2 x + b_1 y + a_3 z, \end{aligned}$$

et on peut les écrire

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

en posant

$$2\varphi = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2 b_1 yz + 2 b_2 zx + 2 b_3 xy.$$

58. *Opérateur* ∇. — Dans le cas, souvent réalisé, où (X, Y, Z) sont les dérivées partielles d'une fonction φ de (x, y, z), on a l'expression

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k;$$

Hamilton et Tait l'écrivent sous la forme

$$\sigma = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi$$

ou simplement

$$\sigma = \nabla \varphi$$

en posant symboliquement

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}. \tag{57}$$

L'*opérateur* ∇ est alors appliqué à une quantité scalaire $\varphi(x, y, z)$. Dans le cas où ce même opérateur est appliqué à un vecteur $\sigma = Xi + Yj + Zk$, on fait le produit

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) (Xi + Yj + Zk)$$

suivant la règle du produit de deux vecteurs; on obtient ainsi l'expression

$$-\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) k,$$

que l'on représente par $\nabla\sigma$, de sorte que, suivant la notation ordinaire des quaternions, on peut écrire

$$(58)\qquad S(\nabla\sigma) = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

$$(59)\qquad V(\nabla\sigma) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) k.$$

L'introduction de l'opérateur ∇ permet d'écrire sous une forme assez simple plusieurs formules usuelles de Mécanique et de Physique mathématique; nous allons en donner quelques exemples.

59. *Paramètres différentiels.* — On sait, et l'on peut d'ailleurs vérifier aisément que, φ étant une fonction des coordonnées (x, y, z) d'un point, les deux expressions différentielles

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

conservent les mêmes formes pour tous les systèmes d'axes coordonnés rectangulaires.

Lamé a proposé d'appeler ces expressions *paramètres différentiels du premier et du second ordre* de la fonction φ, et il les a désignées par $\Delta^1\varphi$, $\Delta^2\varphi$.

Ces paramètres jouent un rôle important dans un grand nombre de théories; celui du second ordre, notamment, figure dans les théories de l'attraction, de la conductibilité, de l'électricité, de l'élasticité, etc. Voici les notations qui servent à les représenter dans le système d'Hamilton.

60. En posant, suivant la notation adoptée,

$$\frac{d\varphi}{dx} i + \frac{d\varphi}{dy} j + \frac{d\varphi}{dz} = \nabla\varphi,$$

le paramètre différentiel du premier ordre est le module de $\nabla\varphi$, de sorte que l'on a

$$\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2} = T(\nabla\varphi).$$

En second lieu, suivant une propriété rappelée par Maxwell (¹), le symbole d'opération ∇, répété deux fois, devient

$$\nabla^2 = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)^2,$$

ou bien, en appliquant la règle ordinaire de la multiplication des vecteurs,

$$\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \tag{60}$$

Il en résulte que, dans ce système de notations, le paramètre différentiel du second ordre d'une fonction φ est représenté par $-\nabla^2\varphi$, de sorte que

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\nabla^2\varphi.$$

61. *Dérivée d'une fonction suivant une direction.* — En désignant par (a, b, c) les cosinus directeurs d'une direction quelconque, on a souvent à considérer l'expression

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

On peut assigner à cette expression une signification très simple. En effet, on a, en général,

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz.$$

Supposons qu'à partir du point (x, y, z) et dans la direction (a, b, c) on porte une longueur infiniment petite ds, les projections de cette longueur sur les axes sont

$$dx = a\,ds, \qquad dy = b\,ds, \qquad dz = c\,ds,$$

et la valeur correspondante de $d\varphi$ est

$$d\varphi = \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)ds.$$

(¹) *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 33.

On peut donc écrire

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{d\varphi}{ds},$$

$\frac{d\varphi}{ds}$ étant *la dérivée de la fonction* φ *suivant la direction* (a, b, c). Cette dérivée peut encore s'écrire symboliquement

$$\frac{d\varphi}{ds}=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi,$$

et, si l'on désigne par α le vecteur-unité de la direction (a, b, c), c'est-à-dire si l'on pose

$$\alpha=ai+bj+ck,$$

on a évidemment

$$a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}=-\mathrm{S}(\alpha\nabla), \tag{61}$$

de sorte que $-\mathrm{S}(\alpha\nabla)$ est la caractéristique de la dérivation suivant la direction α.

62. *Dilatation cubique d'un système déformé.* — Considérons un système de points infiniment rapprochés rapporté à trois axes rectangulaires. Concevons ce système déplacé de telle manière que les projections (ξ, η, ζ) du déplacement d'un point quelconque M du système soient des fonctions continues des coordonnées primitives (x, y, z) de ce point.

Pour un point N $(x+h, y+k, z+l)$ infiniment voisin de M, les projections du déplacement sont

$$\xi'=\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}h+\frac{\partial\xi}{\partial y}k+\frac{\partial\xi}{\partial z}l,$$

$$\eta'=\eta+\frac{\partial\eta}{\partial x}h+\frac{\partial\eta}{\partial y}k+\frac{\partial\eta}{\partial z}l,$$

$$\zeta'=\zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial x}h+\frac{\partial\zeta}{\partial y}k+\frac{\partial\zeta}{\partial z}l.$$

Imaginons, par le point M, des axes parallèles à OX, OY, OZ. Par rapport à ces axes, les coordonnées de N sont h, k, l avant le déplacement; après le déplacement, ces coordonnées relatives

deviennent

$$\begin{aligned} h' &= h + \xi' - \xi, \\ k' &= k + \eta' - \eta, \\ l' &= l + \zeta' - \zeta, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après les formules précédentes,

$$(62)\qquad \begin{cases} h' = \left(1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right) h + \dfrac{\partial \xi}{\partial y} k + \dfrac{\partial \xi}{\partial z} l, \\ k' = \dfrac{\partial \eta}{\partial x} h + \left(1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right) k + \dfrac{\partial \eta}{\partial z} l, \\ l' = \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} h + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} k + \left(1 + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\right) l. \end{cases}$$

Ces expressions sont linéaires en h, k, l; par suite, les points N situés, dans le voisinage de M, sur une surface $F(h, k, l) = 0$, seront, après le déplacement, sur une surface du même degré. Ainsi, les points d'une sphère viendront sur un ellipsoïde; les points d'un plan sur un plan. De même, les points d'une droite restent sur une droite.

63. Cela posé, considérons un élément de volume renfermant le point M. La déformation du système change le volume de cet élément et le rapport de l'accroissement de ce volume à sa valeur primitive est ce que l'on appelle la *dilatation cubique* au point M. Tout volume étant décomposable en tétraèdres, il suffit de chercher la dilatation d'un tétraèdre.

A cet effet, considérons, avec le point M, trois points infiniment voisins N_1, N_2, N_3. Désignons leurs coordonnées relatives par les lettres (h, k, l) affectées des indices 1, 2, 3. Le volume du tétraèdre dont ces quatre points sont les sommets est, avant la déformation du système,

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix}.$$

En désignant par (h', k', l') les valeurs de (h, k, l) après la déformation, le volume devient

$$V' = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} h'_1 & k'_1 & l'_1 \\ h'_2 & k'_2 & l'_2 \\ h'_3 & k'_3 & l'_3 \end{vmatrix}.$$

En ayant égard aux formules qui expriment (h', k', l') en fonction de (h, k, l), on voit immédiatement, par la règle de multiplication des déterminants, que V′ est le produit de V par le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\xi}{\partial z} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & 1+\frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x} & \frac{\partial\zeta}{\partial y} & 1+\frac{\partial\zeta}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{63}$$

On a donc $V' = V\Delta$ et la dilatation cubique, égale à $\frac{V'-V}{V}$, est donnée par la formule

$$\theta = \Delta - 1.$$

Cette expression, ne dépendant pas de l'orientation du tétraèdre, s'étend à un volume quelconque. Elle s'applique à des déplacements quelconques (ξ, η, ζ), sans aucune restriction relative à l'ordre de grandeur des neuf dérivées partielles qui figurent dans le déterminant Δ.

64. Considérons, en particulier, des déplacements tels que les différences $h'-h$, $k'-k$, $l'-l$ soient très petites par rapport à h, k, l. Dans cette hypothèse, les neuf dérivées partielles ont des valeurs très petites; en les traitant comme des quantités infiniment petites et en réduisant le déterminant Δ à sa partie principale, l'expression de la dilatation cubique, dans le cas d'une petite déformation, se réduit à la valeur

$$\theta = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Si donc on désigne par σ le vecteur qui représente, en grandeur et en direction, le déplacement du point M, c'est-à-dire si l'on pose

$$\sigma = \xi i + \eta j + \zeta k,$$

on a, dans la notation des quaternions (¹),

$$\theta = -\mathrm{S}(\nabla\sigma). \tag{64}$$

(¹) *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 50.

65. *Rotations élémentaires.* — Considérons, comme précédemment, un système de points infiniment rapprochés. Concevons que les points de ce système soient en mouvement, de telle sorte que les composantes rectangulaires (u, v, w) de la vitesse d'un point quelconque M soient des fonctions continues des coordonnées (x, y, z) de ce point.

Pour un point N$(x+h, y+k, z+l)$ infiniment voisin de M, les composantes de la vitesse sont

$$(65)\qquad \begin{cases} u' = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}h + \dfrac{\partial u}{\partial y}k + \dfrac{\partial u}{\partial z}l, \\ v' = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}h + \dfrac{\partial v}{\partial y}k + \dfrac{\partial v}{\partial z}l, \\ w' = w + \dfrac{\partial w}{\partial x}h + \dfrac{\partial w}{\partial y}k + \dfrac{\partial w}{\partial z}l. \end{cases}$$

Ces formules montrent que, pendant un temps infiniment petit dt, le mouvement d'un élément entourant le point M est déterminé par les valeurs que présentent en ce point les neuf dérivées partielles de (u, v, w) par rapport à (x, y, z).

66. On peut substituer à ces dérivées neuf nouveaux coefficients dont l'interprétation est plus facile. En posant

$$a_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad a_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad a_3 = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$2b_1 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad 2b_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad 2b_3 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$2p_1 = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad 2p_2 = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad 2p_3 = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

les valeurs (65) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} u' &= u + p_3 k - p_2 l + a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ v' &= v + p_1 l - p_3 h + b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ w' &= w + p_2 h - p_1 k + b_2 h + b_1 k + a_3 l. \end{aligned}$$

On en conclut que la vitesse (u', v', w') du point N est la résultante :

1° De la vitesse (u, v, w) identique à celle du point M;

2° De la vitesse dont les composantes sont

$$(66)\qquad \begin{cases} u_1 = p_2 k - p_3 l, \\ v_1 = p_1 l - p_3 h, \\ w_1 = p_3 h - p_1 k, \end{cases}$$

correspondant à une rotation, aux composantes (p_1, p_2, p_3), autour d'un axe passant par le point M;

3° De la vitesse dont les composantes sont

$$(67)\qquad \begin{cases} u_2 = a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ v_2 = b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ w_2 = b_2 h + b_1 k + a_3 l, \end{cases}$$

que l'on peut représenter comme il suit.

67. Soit la série des surfaces homothétiques ayant pour équation

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2 b_1 yz + 2 b_2 zx + 2 b_3 xy = \lambda.$$

Supposons le centre au point M et considérons celle de ces surfaces qui passe par le point N, ce qui détermine λ par la condition

$$a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + 2 b_1 kl + 2 b_2 lh + 2 b_3 hk = \lambda.$$

D'après les valeurs (67), le plan tangent à cette surface, au point N, a pour équation

$$u_2 x + v_2 y + w_2 z = \lambda.$$

Par suite, la vitesse (u_2, v_2, w_2) est normale à la surface qui passe par le point N. De plus, si l'on désigne par δ la grandeur de cette vitesse et par ϖ la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan tangent, on a

$$\varpi = \frac{\lambda}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}} = \frac{\lambda}{\delta};$$

d'où il résulte que la grandeur de la troisième vitesse composante est donnée par la formule

$$\delta = \frac{\lambda}{\varpi}.$$

68. En résumé, on peut dire que, pendant un temps infiniment petit dt, le mouvement d'un élément environnant le point M se

compose d'une translation, d'une rotation autour d'un axe et d'un troisième mouvement que l'on peut appeler *déformation*, parce qu'il modifie les distances mutuelles des points compris dans l'élément considéré.

69. La *rotation élémentaire* en un point M du système est déterminée par les quantités

$$(68)\qquad \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{cases}$$

et le *vecteur de la rotation élémentaire* est un vecteur obtenu en portant sur l'axe de la rotation une longueur égale à la vitesse angulaire de cette rotation. En le désignant par ω, on a

$$\omega = p_1 i + p_2 j + p_3 k$$

ou bien, en remplaçant p_1, p_2, p_3 par leurs valeurs,

$$(69)\qquad \omega = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) i + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) k\right].$$

On voit, d'après les valeurs (68), que lorsque les composantes de la vitesse sont les dérivées partielles

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

d'une fonction $\varphi(x, y, z)$ des coordonnées, le mouvement du système de points s'effectue sans rotation (¹).

70. D'après la formule (59) du n° 68, si l'on désigne par σ le vecteur de la vitesse du point M, c'est-à-dire si l'on pose

$$\sigma = ui + vj + wk,$$

le vecteur de la rotation élémentaire est représenté par le symbole

$$(70)\qquad \omega = -\tfrac{1}{2} V(\nabla \sigma).$$

(¹) *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 20.

71. On vient de voir, dans ce qui précède, comment les notations du *Calcul des quaternions* s'introduisent lorsqu'on veut représenter les quantités les plus fréquemment rencontrées dans les recherches de Mécanique ou de Physique mathématique. De nombreuses conséquences de ces principes se trouvent dans des Ouvrages récents, notamment dans le Traité de M. Tait. Les limites imposées à cette Note ne permettaient pas de les présenter ici; mais le lecteur trouvera, croyons-nous, dans les indications qui viennent d'être données, tout ce qui est nécessaire pour l'intelligence complète des applications faites par Maxwell.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

IIIe PARTIE.

MAGNÉTISME.

CHAPITRE I.

Théorie élémentaire du magnétisme.

		Pages.
371.	Propriété d'un aimant soumis à l'action de la terre	1
372.	Définition de l'axe de l'aimant et de la direction de la force magnétique	1
373.	Actions réciproques des aimants. Loi de la force magnétique	3
374.	Définition des unités magnétiques, leurs dimensions	3
375.	Certitude de la loi de la force magnétique	4
376.	Le magnétisme considéré comme quantité mathématique	4
377.	Dans un aimant, les quantités des magnétismes de noms contraires sont toujours égales	5
378.	Effet de la rupture d'un aimant	6
379.	Un aimant se compose de molécules qui sont chacune un aimant	6
380.	Théorie de la matière magnétique	6
381.	L'aimantation est de la nature des vecteurs	7
382.	Sens du terme : polarisation magnétique	8
383.	Propriétés d'une molécule aimantée	9
384.	Définition des termes : moment magnétique, intensité d'aimantation, composantes de l'aimantation	9
385.	Potentiel d'un élément de volume aimanté	10
386.	Potentiel d'un aimant de dimensions finies. Deux expressions de ce potentiel correspondant : l'une, à la théorie de la polarisation ; l'autre, à celle de la matière magnétique	10
387.	Action d'une molécule magnétique sur une autre	11
388.	Positions particulières	13

		Pages.
389.	Énergie potentielle d'un aimant placé dans un champ de force magnétique	16
390.	Moment magnétique et axe d'un aimant	18
391.	Développement du potentiel d'un aimant en harmoniques sphériques	19
392.	Du centre d'un aimant, et des axes primaires et secondaires passant par ce centre	21
393.	Dans cet ouvrage, on appelle extrémité nord d'un aimant celle qui se tourne vers le nord et magnétisme boréal celui que l'on suppose exister autour du pôle nord de la Terre et à l'extrémité sud d'un aimant. On compte positivement le magnétisme austral	23
394.	La direction de la force magnétique est celle suivant laquelle le magnétisme austral tend à se mouvoir, soit du sud au nord : c'est la direction positive sur les lignes de force magnétique. On dit qu'un aimant est aimanté de son extrémité sud à son extrémité nord	23

CHAPITRE II.

Force et induction magnétiques.

395.	La force magnétique définie au moyen du potentiel magnétique	25
396.	Force magnétique dans une cavité cylindrique pratiquée à l'intérieur d'un aimant uniformément aimanté suivant l'axe du cylindre	25
397.	Application à un aimant quelconque	26
398.	Cylindre allongé, force magnétique	27
399.	Disque mince, induction magnétique	27
400.	Relation entre la force magnétique, l'induction magnétique et l'aimantation	28
401.	Intégrale de la force magnétique le long d'une ligne, ou potentiel magnétique	28
402.	Intégrale de l'induction magnétique sur une surface	29
403.	Distribution solénoïdale de l'induction magnétique	31
404.	Tubes et surfaces d'induction magnétique	31
405.	Potentiel vecteur de l'induction magnétique	32
406.	Relation entre le potentiel vecteur et le potentiel scalaire	36

CHAPITRE III.

Solénoïdes et feuillets magnétiques.

407.	Définition d'un solénoïde magnétique	36
408.	Définition d'un solénoïde complexe, et expression de son potentiel en un point quelconque	37
409.	Le potentiel d'un feuillet magnétique en un point est égal au produit de sa puissance par l'angle solide sous-tendu au point par son contour	38
410.	Autre démonstration	38
411.	Le potentiel en un point de la face positive d'un feuillet de puissance Φ excède de $4\pi\Phi$ le potentiel au point de la face négative le plus rapproché	39

Pages.

412. Distribution lamellaire de l'aimantation..... 39
413. Distribution lamellaire complexe..... 40
414. Potentiel d'un aimant solénoïdal..... 40
415. Potentiel d'un aimant lamellaire..... 41
416. Potentiel vecteur d'un aimant lamellaire..... 42
417. Angle solide sous-tendu en un point par une courbe..... 42
418. L'angle solide exprimé par la longueur d'une courbe tracée sur la sphère..... 43
419. L'angle solide exprimé par deux intégrations suivant des lignes..... 44
420. Il exprimé sous forme de déterminant..... 45
421. L'angle solide est une fonction cyclique..... 46
422. Théorie du potentiel vecteur d'une courbe fermée..... 47
423. Énergie potentielle d'un feuillet magnétique placé dans un champ magnétique..... 48

CHAPITRE IV.

Aimantation induite.

424. On appelle induction magnétique le phénomène par lequel un corps soumis à l'action d'une force magnétique devient lui-même un aimant..... 51
425. Induction magnétique dans les différents corps..... 52
426. Définition du coefficient d'aimantation induite..... 54
427. Théorie mathématique de l'induction magnétique. Méthode de Poisson..... 54
428. Méthode de Faraday..... 56
429. Cas d'un corps entouré d'un milieu magnétique..... 59
430. Théorie physique de Poisson sur la cause du magnétisme induit..... 60

CHAPITRE V.

Problèmes particuliers relatifs à l'induction magnétique.

431. Feuillet sphérique creux..... 63
432. Cas où $\varkappa$ est considérable..... 65
433. Cas où $i = 1$..... 65
434. Cas correspondant pour deux dimensions..... 66
435. Cas d'une sphère solide dont les coefficients d'aimantation ne sont pas les mêmes dans les différentes directions..... 69
436. Les neuf coefficients se réduisent à six..... 70
437. Théorie d'un ellipsoïde soumis à une force magnétique uniforme..... 72
438. Ellipsoïdes très allongés et très aplatis..... 76
439. Énoncés de problèmes résolus par Neumann, Kirchhoff et Green..... 79
440. Méthode d'approximation pour la solution du problème général, quand $\varkappa$ est très petit. Les corps magnétiques tendent à prendre les positions où la force magnétique est la plus intense, les corps diamagnétiques celles où la force est la plus faible..... 80
441. Magnétisme d'un navire..... 82

CHAPITRE VI.

Théorie du magnétisme induit de Weber.

		Pages.
442.	Expériences révélant un maximum d'aimantation	86
443.	Théorie mathématique de Weber sur le magnétisme temporaire	87
444.	Théorie modifiée pour tenir compte du magnétisme résiduel	91
445.	Explication des phénomènes dans la théorie modifiée	93
446.	Aimantation, désaimantation et réaimantation	97
447.	Effet de l'aimantation sur les dimensions de l'aimant	99
448.	Expériences de Joule	100

CHAPITRE VII.

Mesures magnétiques.

449.	Suspension de l'aimant	102
450.	Méthodes d'observation par le miroir et l'échelle; méthode photographique	104
451.	Méthode de collimation employée dans le magnétomètre de Kew	107
452.	Détermination de l'axe d'un aimant et de la direction de la composante horizontale de la force magnétique	108
453.	Mesure des forces magnétiques	111
454.	Observation des déviations	114
455.	Méthode des tangentes et méthode des sinus	116
456.	Observation des oscillations	117
457.	Élimination des effets de l'induction magnétique	120
458.	Méthode statique pour la mesure de la force horizontale	121
459.	Suspension bifilaire	123
460.	Système d'observations d'un observatoire	127
461.	Observations au cercle d'inclinaison	128
462.	Méthode de correction de J.-A. Brown	132
463.	Suspension de Joule	135
464.	Magnétomètre-balance pour la composante verticale	135

CHAPITRE VIII.

Du magnétisme terrestre.

465.	Éléments de la force magnétique	138
466.	Cartes magnétiques	139
467.	Conséquence du développement du potentiel magnétique terrestre en harmoniques sphériques	141
468.	Définition des pôles magnétiques de la terre : ils ne sont pas aux extrémités de l'axe magnétique; faux pôles. Ils ne sont pas à la surface de la terre	142
469.	Calcul de Gauss pour les vingt-quatre coefficients des quatre premiers harmoniques	142

Pages.
470. Distinction des causes intérieures et des causes extérieures de la force magnétique..... 143
471. Les variations solaires et lunaires..... 144
472. Les variations périodiques..... 144
473. Les perturbations et la période de onze ans..... 145
474. Réflexions sur les études de magnétisme..... 145

IVe PARTIE.

ÉLECTROMAGNÉTISME.

CHAPITRE I.

Force électromagnétique.

475. Découverte par Œrsted de l'action d'un courant sur un aimant..... 147
476. L'espace, au voisinage d'un courant électrique, est un champ magnétique..... 149
477. Action d'un courant vertical sur un aimant..... 149
478. La force due à un courant rectiligne indéfini est en raison inverse de la distance..... 150
479. Mesure électromagnétique du courant..... 150
480. Fonction potentielle pour un courant rectiligne : c'est une fonction à valeurs multiples..... 150
481. Comparaison de l'effet du courant à celui d'un feuillet magnétique ayant un bord rectiligne indéfini, et s'étendant indéfiniment d'un côté de ce bord..... 151
482. A une grande distance, un petit circuit agit comme un aimant..... 152
483. On en conclut l'action d'un circuit fermé de forme et de dimensions quelconques, sur un point non situé sur le circuit lui-même..... 153
484. Comparaison du circuit et du feuillet magnétique..... 153
485. Potentiel magnétique d'un circuit fermé..... 154
486. Conditions de la rotation continue d'un aimant autour d'un courant.. 154
487. Forme des surfaces équipotentielles dues à un circuit fermé..... 156
488. Action mutuelle d'un système quelconque d'aimants et d'un circuit fermé..... 158
489. Réaction sur le circuit..... 158
490. Force agissant sur un fil traversé par un courant et placé dans un champ magnétique..... 159
491. Théorie des rotations électromagnétiques..... 161
492. Action d'un circuit électrique sur tout ou partie d'un autre..... 163
493. La méthode de recherche suivie est celle de Faraday..... 164
494. Exemple de l'emploi de cette méthode : cas des courants parallèles.... 164
495. Dimensions de l'unité de courant..... 165
496. Le fil tend à être déplacé du côté où son action magnétique accroît la force magnétique vers le côté où elle la diminue..... 165

Pages.

497. Action d'un courant rectiligne indéfini sur un courant situé dans son plan..... 166
498. Énoncé des lois de la force électromagnétique. Force magnétique due à un courant..... 168
499. Généralité de ces lois..... 169
500. Force agissant sur un circuit placé dans un champ magnétique..... 169
501. La force électromagnétique est une force mécanique qui agit sur le conducteur, et non sur le courant lui-même..... 170

Note I. — Sur l'équivalence d'un courant infiniment petit et d'un petit aimant de même puissance; Note de M. Cornu..... 172
Note II. — Sur la construction de la *Pl. XVII*, par M. Cornu..... 175

CHAPITRE II.

Recherches d'Ampère sur l'action mutuelle de deux courants.

502. Recherches d'Ampère sur la loi de la force agissant entre deux éléments de courants électriques..... 185
503. Sa méthode expérimentale..... 185
504. Balance d'Ampère..... 186
505. Première expérience d'Ampère. Des courants égaux et de sens contraire se neutralisent l'un l'autre..... 186
506. Seconde expérience. Un conducteur sinueux est équivalent à un conducteur rectiligne traversé par le même courant..... 187
507. Troisième expérience. L'action d'un courant fermé sur un élément d'un autre courant est perpendiculaire à cet élément..... 188
508. Quatrième expérience. Des courants égaux dans des systèmes géométriquement semblables produisent des forces égales..... 189
509. Dans toutes ces expériences, le courant agissant est un courant fermé. 190
510. Mais pour des développements mathématiques, on peut regarder les deux circuits comme formés de parties élémentaires, et l'action des circuits est la résultante des actions de ces parties..... 190
511. Forme nécessaire des relations entre deux éléments de ligne..... 191
512. Quantités géométriques qui déterminent leurs positions relatives..... 191
513. Forme des composantes de leur action mutuelle..... 192
514. Décomposition suivant trois directions parallèles aux éléments eux-mêmes et à la ligne qui les joint..... 194
515. Expression générale de l'action d'un courant fini sur un élément d'un autre courant..... 195
516. Condition introduite par la troisième expérience d'Ampère..... 196
517. Théorie de la directrice et des déterminantes de l'action électrodynamique..... 196
518. Expression des déterminantes en fonction des composantes du potentiel vecteur du courant..... 197
519. La partie indéterminée de la force peut s'exprimer par la variation d'un potentiel dans l'espace..... 198
520. Expression complète de l'action de deux courants finis..... 198
521. Potentiel mutuel de deux courants fermés..... 199

Pages.
522. Convenance des quaternions pour cette étude..... 199
523. Détermination de la forme de la loi au moyen de la quatrième expérience d'Ampère..... 200
524. Unités électromagnétique et électrodynamique d'intensité..... 201
525. Expressions définitives de la force électromagnétique agissant entre deux éléments..... 201
526. Quatre formes de la théorie admissibles et différentes..... 201
527. On donne la préférence à l'hypothèse d'Ampère..... 203

CHAPITRE III.

Induction des courants électriques.

528. Découverte de Faraday. Sa méthode..... 204
529. La méthode de cet Ouvrage est fondée sur celle de Faraday..... 205
530. Phénomènes d'induction électromagnétique..... 207
531. Loi générale de l'induction des courants..... 208
532. Exemples de la direction des courants induits..... 208
533. Induction par le mouvement de la Terre..... 209
534. La force électromotrice d'induction ne dépend pas de la nature du conducteur..... 210
535. Elle ne tend pas à déplacer le conducteur..... 211
536. Expériences de Felici sur les lois de l'induction..... 211
537. Emploi du galvanomètre pour déterminer l'intégrale de la force électromotrice par rapport au temps..... 213.
538. Positions conjuguées de deux bobines..... 214
539. Expression mathématique du courant d'induction totale..... 215
540. Conception de Faraday d'un état électrotonique..... 216
541. Sa manière d'énoncer les lois de l'induction au moyen des lignes de force magnétique..... 217
542. La loi de Lenz, et la théorie de l'induction de Neumann..... 219
543. La loi de l'induction déduite par Helmholtz de l'action mécanique des courants, au moyen du principe de la conservation de l'énergie..... 220
544. Application du même principe par Thomson..... 221
545. Travaux de Weber en électricité..... 222

CHAPITRE IV.

Induction d'un courant sur lui-même.

546. Secousse donnée par un électro-aimant..... 224
547. Quantité de mouvement apparente de l'électricité..... 224
548. En quoi ce cas diffère de celui d'un tube parcouru par un courant d'eau..... 225
549. S'il y a une quantité de mouvement, elle n'est pas due à l'électricité qui se meut..... 225
550. Néanmoins, les phénomènes sont exactement semblables à ceux que produirait une quantité de mouvement..... 225

Pages.

551. Un courant électrique a une énergie qu'on peut appeler énergie électrocinétique 226
552. On est ainsi conduit à former une théorie dynamique des courants électriques 229

CHAPITRE V.

Sur les équations du mouvement d'un système à liaisons.

553. La méthode de Lagrange convient pour l'étude des sciences dynamiques supérieures 228
554. Mais il y a lieu de la traduire du langage des Mathématiques dans celui de la Dynamique 228
555. Degrés de liberté d'un système à liaisons 229
556. Sens généralisé du mot *vitesse* 230
557. Sens généralisé du mot *force* 230
558. Sens généralisé des mots *quantités de mouvement* et *impulsion* 230
559. Travail d'une petite impulsion 232
560. Énergie cinétique en fonction des quantités de mouvement T_p 233
561. Équations du mouvement de Hamilton 234
562. Énergie cinétique en fonction des quantités de mouvement et des vitesses T_{pq} 235
563. Énergie cinétique en fonction des vitesses T_q 235
564. Relations entre T_p et T_q, p et q 236
565. Moments et produits d'inertie et de mobilité 237
566. Conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire ces coefficients ... 238
567. Lien des notions mathématiques, dynamiques et électriques 239

NOTE relative aux équations de Lagrange; par M. Potier 241

CHAPITRE VI.

Théorie dynamique de l'électromagnétisme.

568. Le courant électrique possède de l'énergie 244
569. Le courant est un phénomène de mouvement 244
570. Travail de la force électromotrice 245
571. Expression la plus générale de l'énergie cinétique d'un système comprenant des courants électriques 246
572. Les variables électriques ne paraissent pas dans cette expression 247
573. Force mécanique agissant sur un conducteur 248
574. La partie qui dépend du produit des vitesses ordinaires par les intensités des courants s'annule 249
575. Autre vérification expérimentale 252
576. Discussion de la force électromotrice 254
577. Si les termes comprenant le produit des vitesses par les intensités n'étaient pas nuls, ils donneraient lieu à des forces électromotrices qui n'existent pas 254

CHAPITRE VII.

Théorie des courants électriques.

		Pages.
578.	Énergie électrocinétique d'un système de circuits linéaires	257
579.	Force électromotrice dans chaque circuit	258
580.	Force électromagnétique	259
581.	Cas de deux circuits	260
582.	Théorie des courants induits	260
583.	Action mécanique entre les circuits	261
584.	Tous les phénomènes d'action réciproque des deux circuits ne dépendent que d'une seule quantité, le potentiel des deux circuits	262

CHAPITRE VIII.

Exploration du champ au moyen du circuit secondaire.

585.	Quantité de mouvement électrocinétique du circuit secondaire	263
586.	Son expression par une intégrale prise le long d'une ligne	263
587.	Un système de circuits qui se touchent est équivalent au circuit formé par leur limite extérieure	264
588.	Expression de la quantité de mouvement électrocinétique par une intégrale prise sur une surface	265
589.	Un élément de circuit sinueux est équivalent à un élément rectiligne	265
590.	La quantité de mouvement électrocinétique en un point exprimée par un vecteur A	266
591.	Relation avec l'induction magnétique B. Équations (A)	267
592.	Justification de ces noms	268
593.	Conventions sur le signe des translations et des rotations	269
594.	Théorie du conducteur glissant	270
595.	Force électromotrice due au mouvement d'un conducteur	271
596.	Force électromagnétique agissant sur la pièce glissante	271
597.	Quatre définitions d'une ligne d'induction magnétique	272
598.	Équations générales de la force électromotrice (B)	273
599.	Décomposition de la force électromotrice	275
600.	Équations générales rapportées à des axes mobiles	276
601.	Le mouvement des axes ne change que la valeur apparente du potentiel électrique	277
602.	Force électromagnétique agissant sur un conducteur	278
603.	Force électromagnétique sur un élément de conducteur. Équations (C)	279

CHAPITRE IX.

Équations générales du champ magnétique.

604.	Récapitulation	282
605.	Équations d'aimantation (D)	283

		Pages.
606.	Relation de la force magnétique et des courants électriques	284
607.	Équations des courants électriques (E)	285
608.	Équations du déplacement électrique (F)	287
609.	Équations de conduction électrique (G)	287
610.	Équations du courant total (H)	288
611.	Intensité en fonction de la force électromotrice (I)	288
612.	Densité de l'électricité libre rapportée au volume (J)	288
613.	Densité de l'électricité libre rapportée à la surface (K)	289
614.	Équations de la perméabilité magnétique (L)	289
615.	Théorie d'Ampère sur les aimants	289
616.	Les courants électriques exprimés en fonction de la quantité de mouvement électrocinétique	290
617.	Potentiel-vecteur des courants électriques	291
618.	Expressions en quaternions des quantités électromagnétiques	292
619.	Équations du champ électromagnétique en quaternions	2

CHAPITRE X.

Dimensions des unités électriques.

620.	Deux systèmes d'unités	295
621.	Les douze quantités fondamentales	295
622.	Quinze relations entre ces quantités	296
623.	*Dimensions en fonction de* $[e]$ *et de* $[m]$	297
624.	Propriétés réciproques des deux systèmes	297
625.	Le système électrostatique et le système électromagnétique	298
626.	Dimensions des douze quantités dans les deux systèmes	299
627.	Les six unités dérivées	299
628.	Rapport des unités correspondantes des deux systèmes	300
629.	Systèmes d'unités électriques pratiques. Table des unités pratiques	301

CHAPITRE XI.

Énergie et tensions dans le champ électromagnétique.

630.	Expression de l'énergie électrostatique en fonction de l'électricité libre et du potentiel	303
631.	Expression de l'énergie électrostatique en fonction de la force électromotrice et du déplacement électrique	303
632.	Expression de l'énergie magnétique en fonction de l'aimantation et de la force magnétique	304
633.	Expression de l'énergie magnétique en fonction du carré de la force magnétique	304
634.	Expression de l'énergie électrocinétique en fonction de la quantité de mouvement électrocinétique et de l'intensité	305
635.	Expression de l'énergie électrocinétique en fonction de l'induction magnétique et de la force magnétique	306
636.	Méthode de cet Ouvrage	307
637.	Comparaison de l'énergie magnétique et de l'énergie électrocinétique	307

		Pages.
638.	L'énergie magnétique ramenée à l'énergie électrocinétique	308
639.	La force qui agit sur une particule de matière est due à son aimantation	310
640.	Force électromagnétique due au courant qui traverse la particule	310
641.	Explication de ces forces par l'hypothèse d'une tension dans le milieu.	312
642.	Caractères généraux de la tension capable de produire les phénomènes	313
643.	Lorsqu'il n'y a point d'aimantation, la tension se compose d'une tension suivant les lignes de force magnétique et d'une pression suivant les directions perpendiculaires, la grandeur de la tension comme de la pression étant $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$, où $\mathfrak{H}$ est la force magnétique	315
644.	Force agissant sur un conducteur traversé par un courant	316
645.	Forme sous laquelle Faraday énonçait la théorie des tensions dans le milieu	316
646.	Valeur numérique de la tension magnétique	317
	APPENDICE I.	318
	APPENDICE II.	320

CHAPITRE XII.

Nappes de courants.

647.	Définition d'une nappe de courants	322
648.	Fonction de courant	322
649.	Potentiel électrique	323
650.	Théorie des courants permanents	323
651.	Cas d'une conductibilité uniforme	323
652.	Action magnétique d'une nappe de courants dont les courants sont fermés	324
653.	Potentiel magnétique dû à une nappe de courants	325
654.	Courants induits dans une nappe de conductibilité infinie	326
655.	Une semblable nappe est imperméable à l'action magnétique	326
656.	Théorie d'une nappe de courants plane	326
657.	Expression des fonctions magnétiques par les dérivées d'une seule fonction	327
658.	Action sur la nappe d'un système magnétique variable	329
659.	S'il n'y a point d'action extérieure, les courants s'éteignent, et leur action magnétique diminue comme si la nappe s'éloignait avec la vitesse constante R	330
660.	Les courants développés par l'introduction instantanée d'un système magnétique produisent un effet équivalent à celui d'une image de ce système	331
661.	Cette image s'éloigne de sa position initiale avec la vitesse constante R	332
662.	Cortège d'images formées par un système magnétique en mouvement continu	332
663.	Expression mathématique de l'effet des courants induits	333

Pages.
664. Cas du mouvement uniforme d'un pôle magnétique..... 334
665. Grandeur de la force agissant sur le pôle magnétique..... 334
666. Cas d'une trajectoire courbe..... 335
667. Cas du mouvement dans le voisinage du bord de la nappe..... 335
668. Théorie du disque d'Arago..... 336
669. Cortège d'images en forme d'hélice..... 339
670. Nappe de courants sphérique..... 340
671. Potentiel vecteur..... 341
672. Produire à l'intérieur d'un feuillet sphérique un champ de force magnétique constant..... 342
673. Produire une force constante agissant sur une bobine suspendue..... 343
674. Courants parallèles à un plan..... 345
675. Circuit électrique plan. Feuillet sphérique. Feuillet ellipsoïdal..... 345
676. Solénoïde..... 346
677. Solénoïde allongé..... 347
678. Force dans le voisinage des bouts..... 348
679. Bobine d'induction..... 349
680. Grosseur à donner au fil..... 350
681. Solénoïde fermé sur lui-même..... 351

CHAPITRE XIII.

Courants parallèles.

682. Conducteurs cylindriques..... 354
683. L'action magnétique extérieure d'un fil cylindrique ne dépend que du courant total qui traverse ce fil..... 355
684. Potentiel vecteur..... 356
685. Énergie cinétique du courant..... 356
686. Répulsion entre le courant direct et le courant de retour..... 358
687. Tension des fils. Expérience d'Ampère..... 358
688. Self-induction d'un fil replié sur lui-même..... 359
689. Courants d'intensité variable dans un fil cylindrique..... 360
690. Relation entre la force électromotrice et le courant total..... 361
691. Moyenne distance géométrique de deux figures dans le plan..... 363
692. Cas particuliers..... 364
693. Application de la méthode à une bobine de fil isolé..... 367

Note I; par M. A. Potier..... 370
Note II. — Sur l'induction de conducteurs magnétiques; par M. A. Potier..... 372
Note III. — Addition au § 690; par M. A. Potier..... 376

CHAPITRE XIV.

Courants circulaires.

694. Potentiel dû à un segment de sphère..... 377
695. Angle sous-tendu par un cercle en un point..... 380
696. Énergie potentielle de deux courants circulaires..... 381

Pages.

697. Moment du couple qui agit entre deux bobines..... 382
698. Valeurs de P'_i..... 383
699. Attraction de deux courants circulaires parallèles..... 383
700. Calcul des coefficients pour une bobine de section finie..... 384
701. Expression par les intégrales elliptiques du potentiel de deux cercles parallèles..... 385
702. Lignes de force autour d'un courant circulaire (*Pl. XVII*)..... 387
703. Équation différentielle du potentiel de deux cercles..... 388
704. Approximation, dans le cas où les deux cercles ne sont pas très rapprochés..... 390
705. Deuxième approximation..... 391
706. Bobine de self-induction maximum..... 393

NOTE; par M. A. Potier..... 395

APPENDICE I..... 397

APPENDICE II..... 400

APPENDICE III..... 401

CHAPITRE XV.

Instruments électromagnétiques.

707. Galvanomètres étalons et galvanomètres de sensibilité..... 402
708. Construction d'une bobine étalon..... 402
709. Théorie mathématique du galvanomètre..... 404
710. Principe de la boussole des tangentes et de la boussole des sinus..... 405
711. Galvanomètre à une seule bobine..... 405
712. Suspension excentrique de Gaugain..... 406
713. Double bobine de Helmholtz (*Pl. XIX*)..... 407
714. Galvanomètre à quatre bobines..... 410
715. Galvanomètre à trois bobines..... 410
716. Grosseur du fil du galvanomètre..... 412
717. Galvanomètres de sensibilité..... 413
718. Théorie du galvanomètre de sensibilité maximum..... 414
719. Loi des sections du fil..... 415
720. Galvanomètre à fil de section uniforme..... 418
721. Bobines suspendues, mode de suspension..... 418
722. Bobine sensible de Thomson..... 419
723. Détermination de la force magnétique au moyen d'une bobine suspendue et d'une boussole des tangentes..... 420
724. Combinaison de la bobine suspendue et du galvanomètre de Thomson. 420
725. Électrodynamomètre de Weber..... 421
726. Balance de Joule..... 426
727. Section des solénoïdes..... 428
728. Rendre uniforme la force normale à la bobine suspendue..... 428
729. Électrodynamomètre de torsion..... 428

CHAPITRE XVI.

Observations électromagnétiques.

		Pages
730.	Observation des oscillations	429
731.	Mouvement sur une spirale logarithmique	429
732.	Oscillations rectilignes dans un milieu résistant	431
733.	Valeur des élongations successives	432
734.	Données et résultats à obtenir	432
735.	Au moyen de trois élongations successives, déterminer la position d'équilibre	432
736.	Déterminer le décrément logarithmique	433
737.	Quand peut-on cesser l'expérience	434
738.	Au moyen de trois passages, déterminer la durée des oscillations	434
739.	Deux séries d'observations	435
740.	Corrections d'amplitude et d'amortissement	435
741.	Galvanomètres *dead beat*	436
742.	Mesurer un courant permanent avec le galvanomètre	437
743.	Quelle déviation est la plus avantageuse avec un galvanomètre des tangentes?	438
744.	Comment il convient d'envoyer le courant	438
745.	Mesure du courant par la première élongation	439
746.	Faire une série d'observations sur un courant permanent	440
747.	Méthode de multiplication pour les courants faibles	441
748.	Mesure d'un courant instantané par la première élongation	442
749.	Correction d'amortissement	443
750.	Série d'observation. Méthode de recul	444
751.	Méthode de multiplication	446

CHAPITRE XVII.

Comparaison des bobines.

752.	Les mesures électriques sont quelquefois plus exactes que les mesures directes	448
753.	Détermination de G_1	449
754.	Détermination de g_1	450
755.	Détermination de l'induction mutuelle de deux bobines	451
756.	Détermination de la self-induction d'une bobine	453
757.	Comparaison de la self-induction de deux bobines	455

CHAPITRE XVIII.

Unité électromagnétique de résistance.

758.	Définition de la résistance	456
759.	Méthode de Kirchhoff	456
760.	Méthode de Weber par les courants instantanés	458
761.	Sa méthode d'observation	459

Pages.
702. Méthode d'amortissement de Weber..... 460
703. Méthode de la bobine tournante de Thomson..... 462
704. Théorie mathématique de la bobine tournante..... 463
705. Calcul de la résistance..... 464
706. Corrections..... 466
707. Méthode calorimétrique de Joule..... 466

CHAPITRE XIX.

Comparaison des unités électrostatique et électromagnétique.

768. Nature et importance de cette étude..... 468
769. Le rapport des unités est une vitesse..... 469
770. Courant de convection..... 470
771. Méthode de Weber et Kohlrausch..... 471
772. Méthode de Thomson par l'électromètre et l'électrodynamomètre séparés..... 472
773. Méthode de Maxwell par l'électromètre et l'électrodynamomètre combinés..... 473
774. Mesure électromagnétique de la capacité d'un condensateur. Méthode de Jenkin..... 474
775. Méthode du courant intermittent..... 475
776. Condensateur et inverseur formant un des bras d'un pont de Wheatstone..... 476
777. Correction pour le cas d'inversions trop rapides..... 477
778. Comparaison de la capacité d'un condensateur et de la self-induction d'une bobine..... 478
779. Bobine et condensateur associés..... 480
780. Comparaison de la mesure électrostatique et de la mesure électromagnétique d'une résistance..... 483

CHAPITRE XX.

Théorie électromagnétique de la lumière.

781. Comparaison des propriétés du milieu électromagnétique et de celles du milieu que suppose la théorie ondulatoire de la lumière... 485
782. Énergie de la lumière durant sa propagation..... 485
783. Équation de la propagation d'une perturbation électromagnétique.... 486
784. Solution dans le cas d'un milieu non-conducteur..... 488
785. Caractères de la propagation ondulatoire..... 489
786. Vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques..... 489
787. Comparaison de cette vitesse et de celle de la lumière..... 490
788. Le pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique est le carré de son indice de réfraction..... 491
789. Comparaison de ces deux quantités dans le cas de la paraffine..... 491
790. Théorie des ondes planes..... 492
791. Le déplacement électrique et la perturbation électromagnétique sont dans le plan de l'onde, et perpendiculaires l'un à l'autre..... 494

Pages.

792. Énergie et tension durant la radiation..... 495
793. Pression exercée par la lumière..... 495
794. Équations du mouvement dans un milieu cristallin..... 496
795. Propagation des ondes planes..... 497
796. Il ne se propage que deux ondes..... 498
797. Cette théorie s'accorde avec celle de Fresnel..... 498
798. Relation entre la conductibilité électrique et la transparence..... 499
799. Comparaison avec les faits établis..... 500
800. Métaux transparents..... 500
801. Solution des équations quand le milieu est conducteur..... 500
802. Cas d'un milieu infini dont on donne l'état initial..... 501
803. Caractères de la diffusion..... 502
804. Perturbation du champ électromagnétique au moment où un courant commence à s'établir..... 502
805. Première approximation de l'état final..... 503

NOTE I, par M. Potier..... 505

NOTE II. — Sur la réflexion, par M. Potier..... 507

CHAPITRE XXI.

Action des aimants sur la lumière.

806. Quelles formes peut avoir la relation du magnétisme et de la lumière..... 514
807. Rotation du plan de polarisation par l'action magnétique..... 515
808. Lois du phénomène..... 515
809. Découverte, par Verdet, de la rotation négative dans les milieux ferromagnétiques..... 516
810. Rotation non magnétique produite par le quartz, la térébenthine, etc. 516
811. Analyse cinématique des phénomènes..... 517
812. La vitesse d'un rayon polarisé circulairement change suivant le sens de la rotation..... 517
813. Rayons droits et rayons gauches..... 518
814. Dans les milieux doués par eux-mêmes de la propriété rotatoire, la vitesse n'est pas la même pour les structures droites et les structures gauches..... 519
815. Dans les milieux soumis à l'influence magnétique, la vitesse est différente pour des sens de rotation opposés..... 519
816. Au point de vue mathématique, la perturbation lumineuse est un vecteur..... 520
817. Équations cinématiques de la lumière polarisée circulairement..... 520
818. Énergie cinétique et potentielle du milieu..... 521
819. Condition de la propagation ondulatoire..... 522
820. L'action magnétique dépend d'une rotation réelle s'effectuant autour de la direction de la force magnétique prise comme axe..... 522
821. Énoncés des résultats obtenus par l'analyse des phénomènes..... 523
822. Hypothèse des tourbillons moléculaires..... 524
823. Variation des tourbillons suivant la loi de Helmholtz..... 525
824. Variation de l'énergie cinétique dans le milieu troublé..... 525

Pages.
825. Expression en fonction de l'intensité et de la vitesse 526
826. Énergie cinétique dans le cas des ondes planes 526
827. Équations du mouvement 527
828. Vitesse d'un rayon polarisé circulairement 528
829. Rotation magnétique 528
830. Recherches de Verdet 529
831. Note sur une théorie mécanique des tourbillons moléculaires 532
Note III. — Sur le pouvoir rotatoire magnétique; par M. Potier 534

CHAPITRE XXII.

Explication du ferromagnétisme et du diamagnétisme au moyen des courants moléculaires.

832. Le magnétisme est un phénomène moléculaire 538
833. Les phénomènes dus aux molécules magnétiques peuvent être imités au moyen de courants électriques 539
834. Différence entre la théorie élémentaire des aimants continus et la théorie des courants moléculaires 539
835. Simplicité de la théorie électrique 540
836. Théorie d'un courant dans un milieu parfaitement conducteur 541
837. Cas où le courant est entièrement dû à l'induction 541
838. Théorie du diamagnétisme de Weber 542
839. Induction magnétocristallique 542
840. Théorie d'un conducteur parfait 543
841. Milieu contenant des molécules sphériques parfaitement conductrices 543
842. Action mécanique de la force mécanique sur le courant qu'elle produit 544
843. Théorie d'une molécule traversée par un courant initial 545
844. Modifications de la théorie de Weber 546
845. Conséquences de cette théorie 546

CHAPITRE XXIII.

Théorie des actions à distances.

846. Quantités qui interviennent dans la formule d'Ampère 548
847. Mouvement relatif de deux molécules électriques 548
848. Mouvement relatif de quatre molécules électriques. Théorie de Fechner 549
849. Deux nouvelles formes de la formule d'Ampère 550
850. Deux expressions différentes de la force agissant entre deux molécules électriques en mouvement 550
851. Elles sont dues, l'une à Gauss, l'autre à Weber 551
852. Toutes les forces doivent être conformes au principe de la conservation de l'énergie 551
853. La formule de Weber est compatible avec ce principe, et non celle de Gauss 552

Pages.
854. Conséquences tirées par Helmholtz de la formule de Weber..... 552
855. Potentiel de deux courants..... 554
856. Théorie de l'induction des courants électriques de Weber..... 554
857. Force de séparation dans un conducteur..... 555
858. Cas de conducteurs mobiles..... 556
859. La formule de Gauss conduit à un résultat inexact..... 557
860. Celle de Weber est en accord avec les faits..... 557
861. Lettre de Gauss à Weber 558
862. Théorie de Riemann..... 559
863. Théorie de C. Neumann..... 559
864. Théorie de Betti..... 560
865. Répugnance à accepter l'idée d'un milieu..... 560
866. On ne peut se dispenser de la notion du milieu..... 561

NOTE. — Sur l'électromètre absolu; par M. Potier..... 563

APPENDICE.

Note sur la théorie des Quaternions;

PAR M. SARRAU.

Introduction..... 591
Notions générales sur les quantités complexes..... 591
Principes du Calcul des quaternions..... 595
Interprétation géométrique du Calcul des quaternions..... 602
Différentiation des fonctions de quaternions..... 607
Applications géométriques..... 611
Applications cinématiques..... 616
Applications mécaniques et physiques..... 622

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

ERRATA.

TOME I.

Pages.	Lignes.	Au lieu de	Lisez
30	11, 2e membre de (11).....	$\iint$	$\int$
90	note (1).....	p. 2	Chap. II
145	12 et 13.....	extérieure s_1	s
168	22.....	de milieu	du milieu
244	12.....	quarante-six	4σ
279	2.....	$\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
»	6.....	$+\ldots+$	$\ldots$
»	8.....	$\frac{\partial^p}{\partial x^{p-1}}$	$\frac{\partial^p}{\partial x^{p-1}\partial y}$
»	24.....	$\frac{\partial}{\partial x^{\sigma-2}}\frac{\partial}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^{\sigma-2}}{\partial x^{\sigma-2}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$
283	4 en remontant.....	$\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2$	$\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2$
341	19.....	$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial^2 y^2}$	$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$
349	22.....	γ	φ
527	14.....	du numérateur	de numération

TOME II.

178	2 en remontant.....	los	log
232	8.....	$\dot{q}_1''(p_1'-p_1)$	$\dot{q}_1'(p_1'-p_1)$

12362 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.